8° H.lit.P.332 sv (B,5 Zapiski

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

МОСКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

ОТДѢЛЪ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКІЙ.

ВЫПУСКЪ ПЯТЫЙ.

МОСКВА.

1885.

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

МОСКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

ОТДѢЛЪ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКІЙ.

ВЫПУСКЪ ПЯТЫЙ.

МОСКВА.
Въ Университетской типографіи (Катковъ),
на Страстномъ бульварѣ.
1885.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Московскаго Университета.

Редакторъ Физико-Математическаго Отдѣла, экстраорд. проф. *Ѳ. Орловъ*.

ОГЛАВЛЕНІЕ 5-го ВЫПУСКА.

Изслѣдованіе о психрометрѣ (съ таблицею чертежей).
Кандидата **Н. А. Зворыкина.**

Стр.

ПРЕДИСЛОВІЕ профессора **А. Г. Столѣтова** III
ГЛАВА I. .. 1
ГЛАВА II. ... 17
ГЛАВА III. .. 48

О приложеніяхъ теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ.
Кандидата **П. С. Назимова.**

ВВЕДЕНІЕ... 69
ГЛАВА I. Первый методъ Якоби. Примѣненіе этого метода къ изученію квадратичныхъ формъ.................................. 84
ГЛАВА II. Второй способъ Якоби. Изслѣдованіе Якоби о рядахъ, въ которыхъ показатели выражаются двумя квадратичными формами.. 136
ГЛАВА III. Способъ Эрмита. Формулы Кронекера и Гирстера 3-й ступени. Задачи о числѣ разложеній на три квадрата и о числѣ изображеній формами съ тремя перемѣнными............ 148
ГЛАВА IV. Числовыя теоремы Ліувилля, относящіяся до общихъ свойствъ аналитическихъ и всякихъ числовыхъ функцій............ 211
ГЛАВА V. Теорія Гауссовыхъ цѣлыхъ чиселъ. Свойства уравненія, отъ котораго зависитъ дѣленіе цѣлой лемнискаты на Гауссово нечетное, первоначальное число. Примѣненіе этихъ свойствъ къ выводу законовъ взаимности вычетовъ 4-й и 8-й степеней, а также къ доказательству одной теоремы Гаусса.... 272
ГЛАВА VI. Формула Дирикле, опредѣляющая число классовъ собственно-первоначальныхъ квадратичныхъ формъ съ мнимыми коэффиціентами и съ двумя перемѣнными при данномъ опредѣлителѣ.. 344
ГЛАВА VII. Какимъ образомъ теорія умноженія на мнимыя количества аргументовъ эллиптическихъ функцій связана съ Кронекеровыми формулами. Нѣсколько словъ о формулахъ Гирстера.. 429

ИЗСЛѢДОВАНІЕ

О ПСИХРОМЕТРѢ.

Н. А. Зворыкина.

«Изслѣдованіе о психрометрѣ», представленное 15-го декабря 1883 г. въ Физико-Математическій Факультетъ Московскаго Университета въ качествѣ диссертаціи на степень магистра физики, окончено печатаніемъ послѣ смерти автора: Николай Алексѣевичъ Зворыкинъ скончался 6-го февраля 1884 г. отъ болѣзни сердца, 29-ти лѣтъ отъ роду. Покойный успѣлъ прокорректировать 1-й листъ и часть 2-го; недѣли за двѣ до кончины, объострившаяся болѣзнь заставила его отказаться отъ всякихъ занятій и поручить дальнѣйшія заботы о корректурѣ пишущему эти строки. Къ рукописи, представленной въ факультетъ и сданной въ типографію, авторъ думалъ прибавить небольшое заключеніе и нѣсколько вступительныхъ строкъ, надѣясь обработать ихъ, когда поправится здоровье; они остались ненаписанными.

Изученіемъ психрометра Н. А. Зворыкинъ занимался съ 1880 года. Окончивъ курсъ въ Московскомъ Университетѣ со степенью кандидата и проведя полтора года за границей, онъ поселился въ Петербургѣ, и въ это время сдѣлалъ рядъ наблюденій въ Главной Физической Обсерваторіи; они обработаны въ статьѣ, представленной въ 1881 г. въ С.-Петербургскую Академію Наукъ. Настоящее «Изслѣдованіе» является дальнѣйшимъ развитіемъ этого перваго этюда. Познакомившись съ нѣкоторыми новыми теоретическими попытками по данному вопросу и произведя новый рядъ наблюденій въ 1881—83 гг. (въ Физической Лабораторіи Московскаго Университета), Н. А. Зворыкинъ могъ значительно подвинуть впередъ свою работу. Предлагаемая имъ теорія психрометра—обобщеніе пріема Максвелля—повела къ результатамъ, замѣчательно совпадающимъ съ опытными данными: новая точка зрѣнія на этотъ трудный предметъ, очевидно, формулирована вѣрно.

Покойный авторъ съ особенной любовью занимался вопросами метеорологіи; но, хорошо владѣя анализомъ и имѣя основательныя познанія въ астрономіи и физикѣ, онъ стремился въ своихъ

занятіяхъ къ той точности мысли и метода, которая—и по свойству предмета, и по свойству лицъ—далеко не часто встрѣчается въ метеорологическихъ работахъ. Можно сказать, что въ молодомъ Зворыкинѣ, съ его солидной подготовкой и строгимъ отношеніемъ къ дѣлу, мы потеряли много-обѣщавшаго дѣятеля по раціональной метеорологіи.

Печатные труды Н. А. Зворыкина, появившіеся при жизни его, были:

Опредѣленіе влажности воздуха помощію психрометра (Записки Имп. Академіи Наукъ, приложеніе къ XL тому, № 6). 1881.

Die Bestimmung der Feuchtigkeit der Luft mit dem Psychrometer. (Метеорол. Сборникъ, т. VII, № 8).—Переводъ предыдущей статьи.

Le mouvement sur la surface de la Terre sous l'action de la seule force d'attraction terrestre. (Nouveaux Mémoires de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou, t. XIV, livr. 3). 1882.

Круги и ложныя солнца 27-го декабря 1882 г. въ Москвѣ. (Bulletin de la Soc. Imp. des Natur. de Moscou, t. LVII, № 3). 1883.

Наблюденія надъ атмосфернымъ электричествомъ въ іюлѣ (н. ст.) 1882 г. въ г. Муромѣ. (Bulletin, t. LVII, № 4). 1883.

Покойный былъ членомъ Общества Естествоиспытателей и Общества Любителей Естествознанія въ Москвѣ. Въ Физическомъ Отдѣленіи послѣдняго онъ сдѣлалъ въ 1882—83 гг. нѣсколько сообщеній (кромѣ рефератовъ о работахъ въ послѣдствіи напечатанныхъ), именно: объ употребленіи планетарія для объясненія кажущагося движенія планетъ; о переносномъ электрометрѣ Томсона; объ атмосферномъ электричествѣ; о теоріи маятника Фуко.

Н. А. Зворыкинъ преподавалъ физическую географію на Московскихъ Женскихъ Курсахъ (при 3-ей гимназіи); въ его бумагахъ найдены подробный конспектъ этого курса и полный текстъ лекцій, записанный слушательницами.

А. Столѣтовъ.

Февраль 1884.

ГЛАВА I.

§ 1. На возможность судить о влажности воздуха, наблюдая величину охлажденія термометра, если сосудъ его смоченъ водой, указалъ въ первый разъ *Гюттонъ* (Hutton) [1]. Позднѣе *Лесли* (Leslie) [2] рекомендовалъ для этой цѣли употреблять его дифференціальный термометръ, покрывая одинъ шарикъ его мокрой кисеей, а другой—оставляя сухимъ. *Айвори* (Ivory) [3] и *Гэ-Люссакъ* (Gay-Lussac) [4] сдѣлали попытку выразить аналитически величину охлажденія смоченнаго водой термометра, послѣднiй для случая испаренія въ совершенно сухомъ воздухѣ; при этомъ *Гэ-Люссакъ* произвелъ рядъ опытовъ, которыми думалъ подтвердить свои теоретическія соображенія, но затѣмъ отъ подобныхъ наблюденій отказался въ виду недостаточной точности данныхъ, входящихъ въ формулу.

§ 2. Внимательнымъ изученіемъ вновь предложеннаго гигрометра занялся первый *Августъ* (August) [5] назвавшій его психрометромъ (измѣритель охлажденія при испареніи) и произведшій длинный рядъ сравненій его показаній съ показаніями гигрометра Даніэля. Что касается до его теоріи психрометра, то въ основаніи ея положена та же гипотеза, что и у *Айвори*, только пріемъ вывода

[1]) *J. F. Daniell.* Meteorological Essays and Observations, p. 199.

[2]) Encyclopaedia Britannica, 8-th ed. Vol. I p. 764.

[3]) Phil. Magaz. Vol. LX, p. 81.

[4]) Annales de Chim. et de Phys., T. 21, p. 82. 1822.

[5]) Pogg. Ann. Bd. V. S. 69 и 335. 1825.

формулы у него нѣсколько иной; именно предполагается, что сосудъ влажнаго термометра окруженъ слоемъ воздуха, который насыщенъ парами и имѣетъ одинаковую съ нимъ температуру; толщина этого слоя можетъ быть принимаема какъ угодно малой. Воздухъ, возобновляясь постоянно возлѣ термометра, отдаетъ ему при соприкосновеніи часть своего тепла, охлаждаясь при этомъ до его температуры, и насыщается парами, на образованіе которыхъ и идетъ тепло, получаемое термометромъ отъ воздуха. Когда количество тепла, затрачиваемое на испареніе, дѣлается равнымъ количеству тепла, получаемому отъ воздуха, термометръ приходитъ въ состояніе равновѣсія.

Примемъ слѣдующія обозначенія:

t — температура воздуха, даваемая сухимъ термометромъ;

t' — температура влажнаго термометра;

p_1 — упругость пара, насыщеннаго при температурѣ t';

P — атмосферное давленіе;

p_0 — абсолютная влажность воздуха;

k и $\varkappa$ — удѣльная теплота воздуха и водянаго пара;

L — скрытая теплота испаренія при температурѣ t';

α — коэффиціентъ расширенія воздуха;

σ — плотность пара;

ω — вѣсъ воздушнаго слоя, окружающаго влажный термометръ, въ предположеніи, что онъ сухъ, имѣетъ температуру 0° и давленіе 760^{mm}.

Вѣсъ сухаго воздуха въ слоѣ, предполагаемомъ по гипотезѣ *Августа* вполнѣ насыщеннымъ парами и имѣющемъ температуру t', равенъ

$$\omega \frac{P-p_1}{760} \frac{1}{1+\alpha t'}.$$

Паръ, насыщающій воздухъ возлѣ влажнаго термометра, состоитъ изъ двухъ частей: изъ пара, прежде бывшаго въ воздухѣ, вѣсъ котораго равенъ

$$\omega\sigma \frac{p_0}{760} \frac{1}{1+\alpha t'},$$

и изъ вновь образовавшагося пара, вѣсъ котораго

$$\omega\sigma\frac{p_1-p_0}{760}\,\frac{1}{1+\alpha t'}.$$

Количество тепла, получаемое термометромъ отъ воздуха, равно

$$\omega\left\{\frac{P-p_1}{760}\,\frac{k}{1+\alpha t'}+\frac{p_0}{760}\,\frac{\varkappa\sigma}{1+\alpha t'}\right\}(t-t'). \qquad (1)$$

Количество тепла, необходимое для образованія указаннаго выше количества пара, равно

$$L\omega\sigma\frac{p_1-p_0}{760}\,\frac{1}{1+\alpha t'}.$$

Приравнивая приходъ тепла расходу его, получимъ уравненіе, которое позволитъ намъ опредѣлить p_0:

$$p_0=\frac{1+\frac{k}{L\sigma}(t-t')}{1+\frac{\varkappa}{L}(t-t')}\,p_1-\frac{\frac{k}{L\sigma}(t-t')}{1+\frac{\varkappa}{L}(t-t')}\,P$$

или

$$p_0=\frac{p_1-\frac{k}{L\sigma}(t-t')(P-p_1)}{1+\frac{\varkappa}{L}(t-t')}.$$

Величинами $\frac{\varkappa}{L}(t-t')$ и $\frac{k}{L\sigma}(t-t')$ можно пренебречь, ибо онѣ сравнительно съ единицей малы; то же можно сказать и о p_1. Тогда имѣемъ

$$p_0=p_1-\frac{kP}{L\sigma}(t-t')$$

или, полагая $\frac{k}{L\sigma}=A$,

$$p_0=p_1-AP(t-t'). \qquad (2)$$

Если положить здѣсь $p_0=0$, то получимъ формулу, данную *Гэ-Люссакомъ* [1]). Если вмѣсто k, σ и L подставимъ числовыя значенія, какъ это дѣлаетъ *Реньйо* (Regnault) [2]), именно $k=0,237$, $\sigma=0,622$, а L принять въ среднемъ равнымъ 600 при $t'>0^\circ$, т. е. въ случаѣ покрытія термометра водой, и равнымъ 680 при $t'<0^\circ$, т. е. въ случаѣ покрытія термометра льдомъ, то для A получимъ слѣдующія значенія:

$$A=0,000635 \text{ при } t'>0^\circ \text{ и } A=0,000560 \text{ при } t'<0.$$

Самъ *Августъ* давалъ въ разное время разныя величины коэффиціенту A [3]) и согласіе теоріи и наблюденія, замѣченное имъ въ началѣ, было совершенно случайно; оно обусловливалось съ одной стороны той таблицей упругости пара (на основаніи наблюденій *Дальтона*), которую онъ употреблялъ при вычисленіяхъ, съ другой—тѣми данными, при помощи которыхъ онъ теоретически вычислялъ величину A. Послѣдній разъ въ «Psychrometertafeln» (1848 г.) таблица, содержащая величину втораго члена второй части уравненія (2) (таблица B) вычислена имъ съ $A=0,000952$, если t и t' считать по Реомюру, или $A=0,000762$, если считать t и t' по стоградусному термометру [4]); если же $t'<0^\circ$, то величина A должна быть уменьшена, по его мнѣнію, на $^1/_8$ долю (ibid. стр. 9). Такая величина для A принята была имъ на основаніи позднѣйшихъ его наблюденій. Такимъ образомъ *Августъ* самъ принужденъ былъ подъ конецъ убѣдиться въ несоотвѣтствіи его теоріи съ дѣйствительностью.

Августъ для опредѣленія влажности воздуха, кромѣ вышеприведенной формулы, употреблялъ еще другой болѣе грубый пріемъ, именно онъ отыскивалъ тотъ коэффиціентъ, на который надо умножить $t-t'$, чтобы имѣть $t-t''$, если t''— точка росы; по его

[1]) Ann. de Chim. et de Phys., T. 21, p. 87. 1822.

[2]) Ibid. 3-me série, T. 37, p.p. 262 и 274. 1853.

[3]) Въ Pogg. Ann. Bd. V онъ даетъ $A = 0,0007782$; въ „Über die Fortschritte der Hygrometrie“ $A=\frac{0,568}{640-t'}$ или 0,00088.

[4]) Вюльнеръ въ своей Физикѣ (изд. 3-е, томъ III, стр. 691) даетъ рядомъ нѣсколько величинъ для A и не обращаетъ вниманія на то, что однѣ изъ нихъ имѣютъ мѣсто при счетѣ по Реомюру, а другія—по Цельзію.

мнѣнію, этотъ коэффиціентъ =2. Эти изслѣдованія его были впослѣдствіи продолжены *Глэшеромъ* (Glaisher) [1]) и *Ноблемъ* (Noble) [2]). Величина этого коэффиціента зависитъ главнымъ образомъ отъ температуры; приведемъ нѣкоторыя цифры, полученныя ими:

Температура воздуха.	Коэффиціенты Глэшера.	Нобля.
+20°С.	1,7	—
+10°	2,1	2,3
0°	3,4	3,3
— 5°	8,5	5,8

§ 3. Нѣсколько позднѣе *Августа* попытка дать теорію психрометра была сдѣлана учеными *Белли* (Belli) [3]) и *Апджономъ* (Apjohn) [4]). Теорія послѣдняго не представляетъ никакого отличія отъ теоріи *Августа*. Теорія *Белли* имѣетъ своимъ основаніемъ ту же гипотезу, что и теорія *Августа*, но отличается отъ нея въ двухъ отношеніяхъ: 1) *Белли* принимаетъ во вниманіе тепло, получаемое термометромъ чрезъ лучеиспусканіе окружающихъ предметовъ; 2) онъ обращаетъ вниманіе на то, что воздушная масса, насыщаясь парами вблизи термометра, должна нѣсколько расшириться, чтобы сумма давленій сухаго воздуха и пара послѣ насыщенія осталась прежняя, вслѣдствіе чего для насыщенія данной массы воздуха потребуется нѣсколько больше пара, чѣмъ принимаетъ *Августъ*. Вслѣдствіе расширенія при насыщеніи давленіе пара, бывшаго уже прежде въ воздухѣ, послѣ насыщенія равно не p_0, а $p_0\frac{P-p_1}{P-p_0}$; точно также давленіе, производимое вновь образовавшимся паромъ, равно не p_1-p_0, а

[1]) Въ „Tables Meteorological und Physical, *Arn. Guyot*“. См. также *Miller*, Philos. Trans., Part I, p. 141. 1851.

[2]) Philos. Magaz. Vol. XI, p. 304. 1856.

[3]) *Belli*. Corso di fisica, Vol. II., p. 554. Также см. Meteorologia italiana. Memorie e Notizie. Anno 1878. Fascicolo V., p. 48. Или Zeitschrift d. Oesterreich. Gesellschaft für Meteorologie, Bd. XVI. S. 80. 1881.

[4]) Transact. of the Royal Irish Academy, Novemb. 1834.

$p_1 - p_0 \frac{P - p_1}{P - p_0}$. Поэтому выше при выводѣ формулы психрометра слѣдуетъ вездѣ поставить на мѣсто p_0 величину $p_0 \frac{P - p_1}{P - p_0}$.

Если принять, что количество тепла, получаемое чрезъ лучеиспусканіе окружающихъ предметовъ, въ r разъ меньше того, какое получается отъ воздуха, то, чтобы получить количество тепла, притекающаго къ термометру обоими этими путями, слѣдуетъ выраженіе (1) умножить на $\left(1 + \frac{1}{r}\right)$. Введя эти поправки, мы послѣ нѣкоторыхъ преобразованій легко получимъ вмѣсто формулы *Августа* формулу *Белли*:

$$p_0 = p_1 - \frac{(p_1 \varkappa\sigma - p_1 k + Pk)(t - t')\left(1 + \frac{1}{r}\right)(P - p_1)}{PL\sigma + (P - p_1)\left(1 + \frac{1}{r}\right)(t - t')(\varkappa\sigma - k)}.$$

Такъ какъ съ увеличеніемъ скорости вѣтра количество тепла, получаемое отъ воздуха, возрастаетъ, а получаемое черезъ лучеиспусканіе окружающихъ предметовъ остается неизмѣннымъ и поэтому $\frac{1}{r}$ съ увеличеніемъ скорости вѣтра уменьшается, то *Белли*, чтобы опредѣлить значеніе члена $\frac{1}{r}$, произвелъ рядъ опытовъ надъ вліяніемъ вѣтра на показанія психрометра. Эти опыты показали, что при измѣненіи скорости вѣтра отъ 0 до 1 метра въ 1 сек. показанія психрометра мѣняются значительно, и въ этихъ же предѣлахъ вѣтра размѣры и форма термометрическаго сосуда имѣютъ замѣтное вліяніе; дальнѣйшее увеличеніе скорости вѣтра до 3 м. въ сек. еще продолжаетъ измѣнять показанія психрометра, хотя и очень мало; при переходѣ же скорости вѣтра за 3 м. въ 1 сек. возрастаніе ея уже не имѣетъ никакого вліянія на показанія психрометра. Отсюда онъ заключаетъ, что при скорости вѣтра, бо́льшей 1 метра, значеніе члена $\frac{1}{r}$ настолько не велико, что его можно отбросить, не дѣлая чувствительной погрѣшности. Пренебрегая далѣе вторымъ членомъ въ знаменателѣ

сравнительно съ первымъ и двумя первыми членами первой скобки въ числителѣ, онъ въ окончательномъ выводѣ приходитъ къ той же формулѣ, какъ и *Августъ*, что необходимо и должно быть, какъ скоро пренебрегается вліяніе лучеиспусканія, ибо вліяніе расширенія при насыщеніи имѣетъ сравнительно очень малое значеніе. Изъ этихъ же опытовъ *Белли* убѣдился въ необходимости возлѣ психрометра производить при наблюденіи искусственный вѣтеръ, для чего онъ рекомендовалъ помѣщать психрометръ въ трубку, чрезъ которую воздухъ долженъ просасываться при помощи всасывающихъ мѣховъ.

§ 4. Убѣдившись въ недостаточности теоріи психрометра, данной *Августомъ, Реньйо* [1]) при своихъ изслѣдованіяхъ психрометра обратилъ вниманіе почти исключительно на экспериментальное изученіе свойствъ психрометра. Прежде всего онъ занялся опредѣленіемъ вліянія вѣтра на показанія психрометра и произвелъ рядъ сравненій психрометра, выставленнаго на открытомъ воздухѣ, съ другимъ, возлѣ котораго воздухъ приводится въ движеніе съ различной скоростью помощію вентилятора, или же съ психрометромъ, установленнымъ въ коробкѣ, чрезъ которую воздухъ просасывался помощію аспиратора или воздушнаго насоса, проходя предварительно чрезъ длинную спиралеобразную трубку. Но эти его изслѣдованія страдаютъ существенными недостатками, особенно при употребленіи втораго способа; поэтому полученные имъ результаты слишкомъ разнорѣчивы. Такъ при первомъ способѣ изслѣдованія мы видимъ [2]), что скорость въ 8 метровъ въ 1 сек. измѣняетъ показанія психрометра не болѣе, какъ на —0,3 mm.; при второмъ [3]) же, въ случаѣ дѣйствія двухъ аспираторовъ, психрометръ въ аппаратѣ показываетъ суше на 0,68 mm., тогда какъ количество воздуха, проходящаго чрезъ аппаратъ, въ этомъ случаѣ не болѣе 5067 куб. сантиметр. въ 1 мин. [4]) или 84,5 куб. сантим. въ 1 сек.. и слѣдовательно скорость врядъ ли болѣе 1 метра въ 1 секунду.

[1]) Ann. de Chim. et de Phys. 3-e série, T. 15, p. 201; T. 37. p. 259.

[2]) Ibid. T. 15, p. 222.

[3]) Ann. de Chim. et de Phys., T. 15, p. 211.

[4]) Ibid. p. 208 и 209.

Дѣло въ томъ, что *Реньйо* совсѣмъ не обратилъ вниманія на разность давленія воздуха внутри и внѣ коробки; а эта разность должна быть довольно велика, иначе нельзя получить сколько нибудь значительной скорости вѣтра въ длинной и узкой трубкѣ. Это уменьшеніе давленія имѣетъ двойное значеніе: съ одной стороны уменьшается P, съ другой—самое p_0; упругость пара въ воздухѣ, конечно, уменьшается въ той же пропорціи и вмѣсто прежняго p_0 получается $p_0 \frac{P'}{P}$, гдѣ P'—давленіе воздуха внутри коробки, P—внѣ ея.

Наконецъ въ обоихъ случаяхъ имъ употреблялся для сравненія психрометръ, выставленный на открытый воздухъ, и скорость вѣтра возлѣ него была совершенно неизвѣстна и къ тому же, вѣроятно, непостоянна.

Далѣе онъ дѣлалъ неоднократныя сравненія психрометра съ химическимъ способомъ опредѣленія влажности воздуха при различныхъ температурахъ, различной степени насыщенія и притомъ въ разныхъ мѣстахъ. Величины, полученныя имъ при этихъ сравненіяхъ для A, суть слѣдующія:

1) Въ небольшой отовсюду запертой комнатѣ 0,00128
2) Въ большомъ амфитеатрѣ Французской Коллегіи 0,00100
3) Тамъ же, если окна открыты. 0,00077
4) На большомъ квадратномъ дворѣ Франц. Коллегіи 0,00074
5) На продолговатомъ, усаженномъ деревьями дворѣ Француз. Коллегіи. 0,00100
6) Тамъ же, если на психрометръ падали лучи солнца. 0,00090
7) Тамъ же, если $t' < 0^\circ$ 0,00075—0,00130

Первыя три группы наблюденій показываютъ намъ вліяніе движенія воздуха и другаго интереса не представляютъ. Значеніе остальныхъ группъ наблюденій, къ сожалѣнію, много уменьшается тѣмъ обстоятельствомъ, что при наблюденіяхъ въ одномъ и томъ же мѣстѣ, но въ разные дни, сила вѣтра можетъ быть весьма различна, равно какъ и лучеиспусканіе окружающихъ предметовъ,

температура которыхъ можетъ отклоняться отъ температуры воздуха въ разные дни различно то въ ту, то въ другую сторону; такимъ образомъ эти два обстоятельства могутъ, хотя отчасти, маскировать вліяніе другихъ—температуры воздуха, влажности его и др. Остановимся нѣсколько долѣе на 4-й группѣ, самой многочисленной (41 наблюденіе). Предѣлами для температуры при этихъ наблюденіяхъ были $+7°,16$ и $+29°,78$; для относительной влажности: 19% и 75% и для $(t—t')$: $1°,86$ и $10°,84$. Этими наблюденіями мы воспользуемся, чтобы обнаружить зависимость величины A отъ величины $t—t'$; съ этой цѣлью разобьемъ наблюденія на 2 серіи: къ одной отнесемъ тѣ, при которыхъ $t-t'>5°$ (18 наблюд.), а къ другой—при которыхъ $t—t'<5°$ (23 наблюд.); найдемъ для каждой изъ этихъ серій среднюю величину для t, $t—t'$, для положительныхъ и отрицательныхъ разностей между показаніями психрометра и химическаго способа, а также общія среднія разности и имъ соотвѣтствующія величины въ абсолютной влажности. Такимъ образомъ получимъ слѣдующую табличку

	t	$t—t'$	Разности средния полож.	Разности средния отриц.	Общая средняя разность.	Общ. ср. разн. въ абсолютной влажн.
1-я серія	$+20°,03$	$7°,72$	0,8%	1,1%	—0,15%	—0,03 mm.
2-я серія	$+13°,80$	$3°,34$	1,4%	0,5%	+0,45%	+0,05 ›

Положительныя разности означаютъ, что психрометръ даетъ бо́льшую влажность, отрицательныя—меньшую, чѣмъ химическій способъ; слѣдовательно изъ приведенной таблицы можно заключить, что $A=0,00074$ нѣсколько велико для наблюденій 1-й серіи и мало для 2-й, но эта неточность настолько мала, что ее можно приписать погрѣшностямъ наблюденій. Во всякомъ случаѣ эти наблюденія говорятъ за крайне малую измѣнчивость A даже при значительныхъ измѣненіяхъ t и $t—t'$. Прежде произведенныя наблюденія [1]) привели *Реньйо* къ противоположному заключенію, благодаря, вѣроятно, въ значительной мѣрѣ тому, что при нихъ онъ пользовался двумя различными психрометрами.

Изъ наблюденій 7-й группы при $t'<0°$ одна часть удовлетворяется величиной $A=0,000750$, значительно меньшей, чѣмъ та,

[1]) Ann. de Chim. et de Phys., T. 15, p. 216.

какую даютъ наблюденія 5-й группы, другая же часть наоборотъ удовлетворяется величиной гораздо большей, именно $A=0,0013$. Причину этого *Реньйо* склоненъ видѣть въ томъ, что при первыхъ наблюденіяхъ $t-t'$ было больше (между $1^\circ,10$ и $1^\circ,83$), чѣмъ при вторыхъ (между $0^\circ,23$ и $0^\circ,89$); но такое объясненіе, основанное на допущеніи грубаго скачка величины A, почти удвоенія, при переходѣ $t-t'$ черезъ 1°, намъ кажется весьма неправдоподобнымъ, тѣмъ болѣе что наблюденія, какъ мы видѣли выше, вообще не указываютъ, чтобы величина $t-t'$ могла оказывать значительное вліяніе на величину A. Если здѣсь принять $A=0,00085$, то отклоненія показаній психрометра отъ химическаго способа не выйдутъ изъ предѣловъ $\pm 0,2$ mm. въ абсолютной влажности, а такія разности при сравненіи психрометра съ другими гигрометрами, особенно при отсутствіи возлѣ перваго вѣтра постоянной скорости, неизбѣжны. Имѣя въ виду, что наблюденія въ томъ же мѣстѣ при $t'>0^\circ$ (5-я группа) дали для A величину 0,00100, бо̀льшую той, какую, по видимому, слѣдуетъ здѣсь приписать A, можно судить отчасти объ измѣненіи A при переходѣ отъ воды ко льду, но дать точный отвѣтъ на этотъ любопытный вопросъ наблюденія *Реньйо* не могутъ.

Въ концѣ своего изслѣдованія о психрометрѣ *Реньйо* приходитъ къ заключенію, что психрометръ, какъ приборъ чисто эмпирическій, не имѣетъ никакихъ преимуществъ передъ гигрометромъ *Соссюра* (Saussure) и даже во многомъ уступаетъ ему; какія либо усложненія психрометра онъ находитъ недостигающими цѣли, такъ какъ и тогда психрометръ будетъ уступать въ точности другимъ гигрометрамъ, напр. его сгустительному гигрометру, не будучи уже проще ихъ.

Большая часть имѣющихся психрометрическихъ таблицъ (Tables psychrométriques par *M. Haeghens* въ Annuaire météorologique de la France pour 1849, психрометрическія таблицы *Вильда* и др.) вычислена по формуламъ:

$$p_0=p_1-\frac{0,480(t-t')}{610-t'}P \text{ при } t'>0^\circ$$

и

$$p_0=p_1-\frac{0,480(t-t')}{689-t'}P \text{ при } t'<0^\circ,$$

изъ которыхъ первую *Реньйо* нашелъ [1]) довольно согласной со своими первоначальными наблюденіями, а вторую далъ, руководствуясь теоретическими соображеніями, которыми самъ онъ при своихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ никогда не пользовался.

Какъ на простѣйшій способъ имѣть всегда возлѣ психрометра вѣтеръ болѣе или менѣе значительной скорости, *Реньйо* указываетъ на пріемъ, предложенный *Вальфердиномъ* (Walferdin) [2]) и состоящій въ томъ, что сначала сухой, а потомъ влажный термометръ привязывается на шнуръ и приводится передъ отсчитываніемъ во вращательное движеніе. Въ недавнее время *Масэ-де-Лепиней* (Macé de Lépinay) [3]), производя сравненія такого психрометра-праща съ сгустительнымъ гигрометромъ, нашелъ для A величину 0,000693.

§ 5. Изслѣдованія *Кистони* (Chistoni) [4]) довольно убѣдительно доказываютъ всю важность примѣненія искусственнаго вѣтра постоянной скорости возлѣ психрометра; онъ сравнивалъ показанія психрометра съ сгустительнымъ гигрометромъ, иногда производя помощію вентилятора системы *Кантони* [5]) (Cantoni) вѣтеръ возлѣ психрометра, иногда же оставляя вентиляторъ безъ движенія. Сумма наибольшихъ противоположныхъ отклоненій психрометра отъ показаній сгустительнаго гигрометра въ случаѣ употребленія вентилятора у него достигала 1,40 mm. для одного психрометра и 1,52 mm. для другаго, или около 9% въ относительной влажности при температурѣ воздуха около +20°, тогда какъ безъ вентилятора эта величина достигаетъ 2,2 mm, или 12—14% въ относительной влажности. Къ сожалѣнію у него недостаетъ указаній на скорость наружнаго вѣтра во время наблюденія, такъ что нельзя судить о роли его въ отклоненіяхъ психрометра безъ вентилятора отъ сгустительнаго гигрометра [6]).

[1]) Ann. de Chim. et de Phys., T. 15, p. 226.

[2]) Ibid., T. 37, p. 280.

[3]) Journal de Physique. T. 10, Janv. 1881, p. 17.

[4]) Meteorologia italiana. Memorie e Notizie. Anno 1878, fascicoli I, II, V.

[5]) Этотъ вентиляторъ состоитъ изъ 4 плоскихъ вертикальныхъ лопатокъ, укрѣпленныхъ на концахъ горизонтальнаго креста, приводимаго въ движеніе около вертикальной оси помощію часоваго механизма.

[6]) Сравненія *Бланфорда* (Blanford, Journal of the Asiatic Society of Bengal. Vol. 45, part. II, № 11, p. 53. 1876) между психрометромъ и сгустительнымъ

Далѣе онъ произвелъ очень длинный рядъ сравненій двухъ психрометровъ, при дѣйствіи вентилятора, со сгустительнымъ гигрометромъ при различныхъ температурахъ и влажности, съ цѣлью убѣдиться во вліяніи температуры и влажности на величину A и опредѣлить эмпирически, какой видъ формулы психрометра всего лучше будетъ удовлетворять результатамъ сравненій. Подробно вдаваться въ эти его изслѣдованія не будемъ, такъ какъ они кажутся намъ недостигающими цѣли. Чтобы подтвердить свое мнѣніе, приведемъ 2 таблички, которыя мы находимъ у него и которыя показываютъ измѣненія A съ измѣненіемъ t и $t-t'$: [1])

t	A (психрометръ № 1).	A (психрометръ № 2).
между 0° и 10°	0,00102	0,00081
» 10° и 20°	0,00089	0,00084
» 20° и 30°	0,00085	0,00079
$t-t'$		
между 0° и 2°	0,00089	0,00089
» 2° и 5°	0,00085	0,00078
свыше 5°	0,00087	0,00061

Изъ этой таблички можно видѣть, что A для психрометра № 1 значительно уменьшается съ возвышеніемъ температуры и почти не мѣняется съ измѣненіемъ $t-t'$, тогда какъ въ случаѣ психрометра № 2 происходитъ какъ разъ обратное; изъ этого несомнѣнно слѣдуетъ, что измѣненія A въ зависимости отъ t и $t-t'$ находятся въ предѣлахъ погрѣшности *данныхъ* наблюденій, такъ какъ трудно подыскать какую-нибудь другую причину, которая объяснила бы разницу результатовъ, полученныхъ для двухъ разныхъ психрометровъ. Поэтому на основаніи такихъ наблюденій вывести сколько-нибудь точно зависимость A отъ t и $t-t'$ нельзя.

Точность, на которую можно разсчитывать при опредѣленіи влажности воздуха психрометромъ съ вентиляторомъ, по мнѣнію *Кистони*, не больше ±0,5 mm.

§ 6. Въ заключеніе обзора опытныхъ изслѣдованій психрометра упомянемъ о 3670 сравненіяхъ, произведенныхъ недавно во Фран-

гигрометромъ съ цѣлью опредѣлить величину A показываютъ довольно наглядно эту зависимость психрометра отъ наружнаго вѣтра, на что отчасти обращаетъ вниманіе и самъ авторъ.

[1]) Meteorologia italiana. Mem. e Notiz. Anno 1878, fascic. V.

ціи, о которыхъ мы узнаемъ изъ статьи *Анго* (Angot) [1]), а также о сравненіяхъ психрометра съ объёмнымъ и сгустительнымъ гигрометрами, произведенныхъ *Перптеромъ* (Pernter) [2]) на Обирѣ (Obir, 2048 метр. надъ уровнемъ моря). Первыхъ сравненій въ упомянутой статьѣ *Анго* мы не имѣемъ передъ собой и вообще не можемъ судить, на сколько точны они; между тѣмъ знать это тѣмъ болѣе важно, что при этихъ сравненіяхъ употреблялся психрометръ безъ искусственнаго вѣтра и притомъ они производились, повидимому, на ряду съ обычными метеорологическими наблюденіями. По этимъ наблюденіямъ зависимость A отъ величины $t—t'$ даже больше чѣмъ у *Кистони*.

Сравненія *Перптера* дали для A величины 0,001042 и 0,001284, первая при употребленіи сгустительнаго гигрометра, вторая — объёмнаго. Такую большую величину A онъ объясняетъ исключительно вліяніемъ слабаго давленія воздуха, которое при наблюденіяхъ было около 600 mm.

§ 7. Теперь обратимся къ теоріи психрометра въ спокойномъ воздухѣ, данной *Максвеллемъ* (Maxwell) [3]), которую мы изложимъ съ небольшими измѣненіями, имѣя въ виду нѣкоторыя поправки къ ней *Стефана* (Stefan) и вообще изслѣдованія послѣдняго по теоріи диффузіи паровъ [4]).

Максвелль въ своей теоріи принимаетъ во вниманіе три обстоятельства, вліяющія на показанія влажнаго термометра: испареніе съ поверхности термометра воды, распространяющейся въ видѣ пара путемъ диффузіи въ окружающемъ воздухѣ; теплопроводность окружающаго воздуха, благодаря которой къ термометру можетъ притекать тепло или отъ него утекать; лучеиспусканіе термометра и окружающихъ его предметовъ, имѣющихъ, по предположенію, ту же температуру, какъ и окружающій воздухъ на далекомъ отъ него разстояніи.

[1]) Journal de Physique. 2-e série. T. I. 1882. p. 119.

[2]) Sitzungsberichte d. Wiener Akad., Mathematisch-Naturwissensch. Classe, II Abtheil. Bd. 87. S. 777.

[3]) Encyclopaedia Britanica, 9-th ed., Vol. VII, p. 218. Art. Diffusion. 1877. Edinburgh. См. также Zeitschrift d. Oesterreich. Gesellschaft für Meteorologie. Bd. 16, S. 177.

[4]) Sitzungsberichte d. Wiener Akad., Naturwissenschaftliche Classe, II Abtheil. Bd. 68, S. 385; Bd. 83, S. 943.

Стаціонарное распространеніе тепла путемъ теплопроводности опредѣляется условіями:

$t=t_0$ на большомъ разстояніи отъ термометра;

$t=t'$ вблизи поверхности его, температура самаго термометра;

$\triangle^2 t=0$ [1]) вездѣ, внѣ поверхности термометра.

Стаціонарная диффузія опредѣляется подобными же условіями:

$p=p_0$ на большомъ разстояніи отъ термометра, упругость пара въ окружающей средѣ;

$p=p_1$ вблизи поверхности, упругость пара насыщеннаго при температурѣ t';

$\triangle^2 lg\frac{P-p_0}{P-p}=0$ всюду, внѣ поверхности термометра.

Количество тепла H, утекающаго въ единицу времени отъ термометра, выразится такъ:

$$H=-K\int\!\!\int\frac{dt}{dn}\,ds=-K\int\!\!\int\frac{d(t-t_0)}{dn}ds\,, \qquad \text{(I)}$$

если чрезъ K означимъ коэффиціентъ теплопроводности воздуха, чрезъ t—температуру воздуха въ какой-либо точкѣ, а чрезъ n и ds—нормаль къ поверхности термометра и элементъ ея.

Количество пара Q, распространяющагося чрезъ диффузію въ пространствѣ, будетъ

$$Q=-D\rho\sigma\int\!\!\int\frac{d}{dn}\left(lg\frac{P-p_0}{P-p}\right)ds, \qquad \text{(II)}$$

гдѣ D—коэффиціентъ диффузіи паровъ, ρ—вѣсъ единицы объема сухаго воздуха при 0^0 и 760 mm., σ—удѣльный вѣсъ водянаго пара, p—упругость пара въ какой-либо точкѣ окружающаго воздуха и lg—неперовъ логариѳмъ.

Интегралы въ выраженіяхъ (I) и (II) распространяются по всей испаряющей поверхности.

Если въ выраженіи (I) положить

[1]) Здѣсь, какъ и далѣе, $\triangle^2$ означаетъ сумму вторыхъ производныхъ по всѣмъ 3 координатамъ, т. е.

$$\triangle^2=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}.$$

$$t-t_0=V \text{ и } t'-t_0=V_1,$$

а въ выраженіи (II):

$$lg\frac{P-p_0}{P-p}=V \quad \text{и} \quad lg\frac{P-p_0}{P-p_1}=V_1,$$

то оба интеграла, встрѣчающіеся въ выраженіяхъ (I) и (II), приводятся въ виду

$$\int\int\frac{dV}{dn}ds,$$

причемъ V удовлетворяетъ такимъ условіямъ:

$V=0$ на большомъ разстояніи отъ термометра;

$V=V_1$ возлѣ самой поверхности термометра;

$\triangle^2 V=0$ вездѣ, внѣ поверхности термометра.

Если принять сосудъ термометра за проводникъ и предположить, что онъ заряженъ до потенціала V_1 и въ пространствѣ вокругъ него нѣтъ другихъ электрическихъ массъ, то зарядъ его E будетъ

$$E=-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{dV}{dn}ds,$$

гдѣ V удовлетворяетъ тѣмъ же условіямъ, что и выше; поэтому интегралы въ выраженіяхъ (I) и (II) можно замѣнить чрезъ $-4\pi E$ или $-4\pi CV_1$, если чрезъ C означимъ электрическую ёмкость термометрическаго сосуда. Такимъ образомъ получаемъ

$$H=4\pi KC(t'-t_0),$$

$$Q=4\pi D\rho\sigma Clg\frac{P-p_0}{P-p_1}=4\pi D\rho\sigma C\frac{p_1-p_0}{P-p_1}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{p_1-p_0}{P-p_1}+\ldots\right\}.$$

Количество тепла h, теряемое чрезъ лучеиспусканіе, будетъ

$$h=SR(t'-t_0),$$

если R — коэффиціентъ лучеиспусканія какъ окружающихъ предметовъ, такъ и поверхности термометра, S — поверхность термометрическаго сосуда.

Условіе стаціонарнаго состоянія термометра выразится такъ:

$$H+h+LQ=0,$$

гдѣ L — скрытая теплота испаренія при температурѣ t'.

Отсюда имѣемъ, если въ разложеніи $\frac{P-p_0}{P-p_1}$ ограничимся однимъ первымъ членомъ,

$$p_0=p_1-\frac{P-p_1}{L\rho\sigma}\left\{\frac{K}{D}+\frac{SR}{4\pi DC}\right\}(t_0-t');$$

t_0—здѣсь то же, что прежде t.

Чтобы сравнить полученную формулу съ формулой *Апджона* (или что то же *Августа), Максвелль* множитъ и дѣлитъ второй членъ второй части на k—удѣльную теплоту воздуха при постоянномъ давленіи; тогда присутствіе скобки $\left\{\frac{K}{Dk}+\frac{SR}{4\pi CDk}\right\}$ и будетъ служить отличіемъ этой формулы отъ формулы *Августа*. Первый членъ этой скобки, по мнѣнію *Максвелля*, навѣрное меньше единицы и вѣроятно около 0,77; тогда какъ, по мнѣнію *Стефана*, принимающаго K=0,000055 и D=0,18, онъ долженъ равняться единицѣ; отсюда для $\frac{K}{D}$ мы имѣемъ, по *Максвеллю*, величину 0,000236 и 0,000307, по *Стефану*. Въ послѣднемъ случаѣ отличіе отъ формулы *Августа* заключалось бы только въ членѣ, обусловленномъ лучеиспусканіемъ, которое у него не принято во вниманіе.

Въ случаѣ, если воздухъ находится въ движеніи, то къ диффузіи и теплопроводности присоединяется еще конвекція, которая усиливаетъ испареніе и нагрѣваніе, и это усиленіе происходитъ, по мнѣнію *Стефана*, такъ, какъ будто бы коэффиціенты теплопроводности и диффузіи возрастали съ усиленіемъ вѣтра приблизительно пропорціонально между собой; въ такомъ случаѣ членъ, зависящій отъ лучеиспусканія, будетъ съ увеличеніемъ скорости вѣтра убывать.

Для этого коэффиціента пропорціональности *Пернтеръ* изъ наблюденій *Кистони* и др. находитъ величину 3,0, а изъ своихъ на Обирѣ даже только 2,0; при тѣхъ и другихъ употреблялся психрометръ системы *Кантони*.

ГЛАВА II.

§ 1. Взглядъ *Максвелля* и *Стефана* на процессы, имѣющіе мѣсто возлѣ влажнаго термометра при вѣтрѣ, слишкомъ далекъ отъ опредѣленности: такъ совсѣмъ не указывается, въ чемъ собственно состоитъ тотъ процессъ, которому дается названіе конвекціи, и насколько представленія о немъ *Августа* и *Белли* отвѣчаютъ дѣйствительности; можно ли его какимъ-нибудь образомъ съ надлежащей точностью ввести въ формулу психрометра и такимъ образомъ получить возможность теоретически судить о свойствахъ психрометра, зависимости его показаній отъ атмосфернаго давленія, отъ температуры и влажности воздуха и т. д.

Нижеприведенныя теоретическія соображенія представляютъ именно попытку—съ одной стороны уяснить различныя детали процессовъ, происходящихъ возлѣ влажнаго термометра, и съ другой—выразить ихъ аналитически въ этомъ общемъ случаѣ, по отношенію къ которому случай, разобранный *Максвеллемъ*, представляется не болѣе, какъ частнымъ.

Основаніемъ нашихъ теоретическихъ соображеній будутъ служить слѣдующія допущенія—тѣ же, что и у *Максвелля*: 1) паръ вблизи испаряющей поверхности жидкости находится всегда въ состояніи насыщенія или отличается отъ него крайне мало; 2) температура воздуха и пара возлѣ испаряющей поверхности отличается крайне мало отъ ея температуры [1]); 3) температура испаряющей поверхности одинакова во всѣхъ ея точкахъ.

[1]) *Крова* (Crova) изъ своихъ сравненій психрометра съ гигрометромъ *Реньйо* заключаетъ, что гигрометръ *Реньйо* при сильномъ вѣтрѣ даетъ точку росы гораздо ниже дѣйствительной и слѣдов. можетъ быть охлажденъ ниже точки росы безъ появленія послѣдней (Journal de Phys. 2 série T. II, p. 450); это, по

Въ случаѣ, когда воздухъ находится въ покоѣ, увлажняющее и охлаждающее вліяніе влажнаго термометра на окружающій воздухъ простирается, постепенно уменьшаясь въ силѣ, до безконечности; напротивъ при вѣтрѣ разстояніе, на которомъ измѣненіе температуры и влажности воздуха вслѣдствіе присутствія влажнаго термометра дѣлается уже нечувствительнымъ, отъ поверхности термометра вообще не велико и тѣмъ меньше, чѣмъ сильнѣе вѣтеръ. Воздухъ, приближаясь къ термометру, начинаетъ измѣнять свою температуру и влажность, строго говоря, еще на значительномъ разстояніи отъ термометра, но чувствительными измѣненія эти дѣлаются только возлѣ самаго термометра; когда воздухъ обтекаетъ термометръ, то температура слоя, непосредственно касающагося испаряющей поверхности, остается неизмѣнно равной температурѣ термометра, но слѣдующіе слои продолжаютъ еще охлаждаться, отдавая свое тепло черезъ теплопроводность термометру, и увлажняться, получая паръ черезъ диффузію, и это охлажденіе и увлажненіе простирается постепенно все на бо̀льшее разстояніе; когда воздухъ начинаетъ отходить отъ термометра, то температура его повышается вслѣдствіе притока тепла отъ болѣе отдаленныхъ слоевъ, не принимавшихъ участія замѣтнымъ образомъ въ охлажденіи при проходѣ мимо термометра, а избытокъ пара разсѣевается, благодаря диффузіи. Такимъ образомъ воздухъ, пройдя возлѣ самаго термометра, не мѣняетъ своей температуры и влажности, или, лучше сказать, онъ подвергается такому же измѣненію въ этомъ отношеніи, какъ и тѣ массы воздуха, которыя, минуя термометръ на значительномъ разстояніи, почти не претерпѣли при этомъ никакихъ измѣненій. Нагрѣваніе термометра происходитъ поэтому не на счетъ только небольшой массы воздуха, которая непосредственно касается термометра,

его мнѣнію, зависитъ оттого, что воздухъ, касаясь гигрометра, не успѣваетъ при сильномъ вѣтрѣ принять его температуру, т. е. при переходѣ отъ гигрометра къ воздуху имѣетъ мѣсто скачокъ въ температурѣ. По нашему мнѣнію, замѣченное имъ обстоятельство можетъ быть болѣе правдоподобно объяснено тѣмъ, что вслѣдствіе сильнаго нагрѣванія при вѣтрѣ колпачокъ гигрометра имѣетъ температуру высшую, чѣмъ термометръ и эѳиръ возлѣ него, и переходъ отъ температуры термометра къ температурѣ воздуха совершается постепенно, безъ грубыхъ скачковъ.

какъ думали *Августъ* и др., но и на счетъ того воздуха, который проходитъ мимо термометра на довольно значительномъ разстоянiи отъ него; такъ какъ вся масса воздуха, подвергающагося охлажденiю, велика, то пониженiе ея температуры такъ мало, что имъ можно пренебречь. Точно также и паръ идетъ на увлажненiе всей этой массы, и поэтому измѣненiе ея влажности можно также принять равнымъ нулю.

Итакъ влiянiе вѣтра сводится въ концѣ концовъ къ тому, что оно на извѣстномъ разстоянiи отъ термометра поддерживаетъ постоянную температуру и влажность, равныя температурѣ и влажности окружающаго воздуха; причемъ мы примемъ пока, что предѣлы охлаждающаго влiянiя термометра не совпадаютъ съ предѣлами увлажняющаго влiянiя. Эти границы замѣтнаго влiянiя термометра будутъ, какъ видно изъ предыдущаго, всего ближе къ поверхности на навѣтренной сторонѣ его и всего дальше — на противоположной; съ уменьшенiемъ скорости вѣтра онѣ должны отдаляться отъ термометра и уходить въ безконечность при полномъ покоѣ воздуха; съ увеличенiемъ размѣровъ термометра онѣ должны въ среднемъ отдаляться отъ его поверхности, такъ какъ съ увеличенiемъ размѣровъ увеличивается время, въ теченiе котораго воздухъ обтекаетъ термометръ.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что термометръ получаетъ *отъ воздуха* столько тепла, сколько его можетъ притечь къ нему путемъ теплопроводности отъ того слоя, гдѣ температура, благодаря вѣтру, поддерживается постоянной, равной температурѣ воздуха до приближенiя его къ термометру; а испаряется съ его поверхности то количество пара, которое успѣваетъ продиффундировать отъ его поверхности до того слоя, гдѣ влажность, благодаря вѣтру, постоянно равна влажности воздуха до его приближенiя къ термометру.

§ 2. Стацiонарное распространенiе тепла при указанныхъ обстоятельствахъ опредѣляется слѣдующими условiями:

$t=t_0$ въ точкахъ того слоя, далѣе котораго охлаждающее влiянiе термометра не простирается;

$t=t'$ вблизи поверхности термометра;

$\Delta^2 t=0$ во всѣхъ точкахъ между поверхностью термометра и указаннымъ выше слоемъ.

Стаціонарная диффузія будетъ опредѣляться подобными же условіями:

$p=p_0$ въ точкахъ слоя, дальше котораго увлажняющее вліяніе термометра не идетъ;

$p=p_1$ вблизи поверхности термометра;

$\nabla^2 lg \dfrac{P-p_0}{P-p}=0$ во всѣхъ точкахъ между испаряющей поверхностью и указаннымъ выше слоемъ.

Количество тепла H, утекающаго отъ термометра, и количество пара Q, уходящаго отъ поверхности его, выразятся такъ же, какъ и въ случаѣ полнаго покоя воздуха:

$$H=-K\iint\frac{d(t-t_0)}{dn}ds, \qquad \text{(I)}$$

$$Q=-D\rho\sigma\iint\frac{d}{dn}\left(lg\frac{P-p_0}{P-p}\right)ds. \qquad \text{(II)}$$

Всѣ принятыя въ концѣ предыдущей главы обозначенія мы удерживаемъ и здѣсь.

Интегралы, встрѣчающіеся въ этихъ выраженіяхъ, какъ и выше, могутъ быть приведены къ виду

$$\iint\frac{dV}{dn}ds;$$

только условія, которымъ удовлетворяетъ V, здѣсь иныя, именно:

$V=0$ въ точкахъ того слоя, гдѣ температура равна температурѣ окружающаго воздуха, въ случаѣ выраженія (I), и — гдѣ влажность равна влажности окружающаго воздуха, въ случаѣ выраженія (II);

$V=V_1$ вблизи поверхности термометра;

$\triangle^2 V=0$ въ точкахъ между испаряющей поверхностью и указаннымъ выше слоемъ.

Если испаряющую поверхность принять за металлическую и предположить, что она заряжена до потенціала V_1; если далѣе допустить, что слой воздуха, служащій границей вліянія термометра, въ первомъ случаѣ охлаждающаго, а во второмъ—увлаж-

няющаго, представляетъ собой металлическую оболочку, отведенную къ землѣ: то зарядъ E на внутренней оболочкѣ полученнаго такимъ образомъ конденсатора будетъ

$$E = -\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{dV}{dn}ds,$$

гдѣ V удовлетворяетъ тѣмъ же условіямъ, что и выше. Поэтому интегралы въ выраженіяхъ (I) и (II) можно замѣнить чрезъ $-4\pi E$ или $-4\pi CV_1$, если чрезъ C означимъ здѣсь емкость конденсатора, причемъ C будетъ различно въ выраженіяхъ (I) и (II). Если чрезъ C означимъ емкость конденсатора, чрезъ которую выражается количество уходящаго пара, то чрезъ $C\zeta$ можно означить емкость конденсатора, чрезъ которую выражается количество уходящаго тепла; и тогда

$$H = 4\pi KC\zeta(t' - t_0), \qquad \text{(III)}$$

$$Q = 4\pi D\rho\sigma C\frac{p_1 - p_0}{P - p_1}. \qquad \text{(IV)}$$

Количество тепла h, теряемаго испаряющей поверхностью чрезъ лучеиспусканіе, здѣсь то же, что и въ случаѣ покоющагося воздуха:

$$h = RS(t' - t_0).$$

Чтобы опредѣлить количество тепла h_1, утекающаго по стержню термометра, предположимъ, что этотъ стержень безконечно-дlittlenенъ и движеніе воздуха возлѣ него повсюду одинаково; тогда извѣстно, что, если на одномъ концѣ стержня поддерживать температуру его на одной и той же высотѣ, на τ^0 выше температуры окружающей среды, количество тепла, утекающаго по стержню отъ этого конца, будетъ равно

$$\tau\sqrt{qsnk},$$

гдѣ k—коэффиціентъ теплопроводности стержня, s—площадь его сѣченія, n—периметръ этого сѣченія и q—количество тепла, которое теряла бы въ единицу времени единица поверхности стержня, если бы температура его въ данномъ мѣстѣ была на 1^0 выше температуры окружающей среды.

Слѣдовательно

$$h_1=(t'-t_0)\sqrt{qsnk}=B(t'-t_0),$$

если $B=\sqrt{qsnk}$.

Отсюда мы видимъ, что h_1 будетъ возрастать съ увеличенiемъ скорости вѣтра возлѣ стержня термометра, такъ какъ q возрастаетъ.

Условiе стацiонарнаго состоянiя термометра будетъ выражаться слѣдующимъ образомъ:

$$QL+H+h+h_1=0.$$

Изъ этого уравненiя получимъ

$$p_0=p_1-\frac{P-p_1}{L\rho\sigma}\left\{\frac{K}{D}\zeta+\frac{SR+B}{4\pi DC}\right\}(t_0-t'). \qquad (V)$$

Величина ζ зависитъ отъ отношенiя между скоростью распространенiя тепла въ воздухѣ чрезъ теплопроводность и скоростью распространенiя пара чрезъ диффузiю. Съ точки зрѣнiя кинетической теорiи газовъ, какъ извѣстно, явленiя теплопроводности газовъ и диффузiи между собою не только подобны, но и тожественны; разница только въ томъ, что въ одномъ случаѣ имѣется въ виду масса газа, переходящая изъ одного мѣста въ другое, а во второмъ—энергiя, переносимая этой массой; словомъ, это двѣ различныя стороны одного и того же процесса. Такъ какъ коэффицiентъ диффузiи въ данной смѣси двухъ газовъ всегда одинъ и тотъ же для обоихъ газовъ, то D—представляетъ собою коэффицiентъ диффузiи не только пара, но и сухаго воздуха въ данной смѣси пара и сухаго воздуха. Отсюда слѣдуетъ, что ζ должна быть равна единицѣ.

§ 3. Пользуясь выведенной формулой психрометра, разсмотримъ, каково влiянiе различныхъ обстоятельствъ—размѣровъ термометра, вѣтра, температуры, влажности и атмосфернаго давленiя—на величину A:

$$A=\frac{1}{L\rho\sigma}\left\{\frac{K}{D}+\frac{SR+B}{4\pi CD}\right\}.$$

1) Чѣмъ меньше B сравнительно съ $S.R$, т. е. чѣмъ меньше сѣченіе стержня термометра выше термометрическаго сосуда сравнительно съ поверхностью испаренія S, тѣмъ меньше A [1]).

2) Чѣмъ больше $\frac{C}{S}$, что при данной скорости вѣтра зависитъ отъ формы и размѣровъ термометра, тѣмъ меньше A.

3) Чѣмъ больше скорость вѣтра, тѣмъ больше C и слѣдовательно тѣмъ меньше A. Такъ какъ B съ увеличеніемъ скорости вѣтра возрастаетъ, то въ случаѣ значительнаго B уменьшеніе A съ увеличеніемъ скорости вѣтра идетъ гораздо медленнѣе, чѣмъ когда B ничтожно.

4) K съ температурой возрастаетъ нѣсколько медленнѣе, чѣмъ пропорціонально абсолютной температурѣ, а именно, по наблюденіямъ *Винкельмана* (Winkelmann) [2]), пропорціонально $1+0{,}00277\, t_0$. Коэффиціентъ D съ температурой тоже возрастаетъ; для него *Стефанъ* даетъ такое выраженіе: [3])

$$D=\frac{P_0 T}{A_{12} d_1 d_2 T_0},$$

гдѣ P_0—нормальное давленіе=760 mm; T—абсолютная температура, при которой имѣетъ мѣсто диффузія; $T_0=273°$; d_1 и d_2—плотности, въ нашемъ случаѣ, сухаго воздуха и водянаго пара; A_{12} — коэффиціентъ пропорціональности, зависящій отъ числа столкновеній частицы пара съ частицами воздуха въ единицу времени при нормальной плотности и при температурѣ T. Такъ какъ число столкновеній, и поэтому A_{12}, съ температурой возрастаютъ не быстрѣе, какъ пропорціонально квадратному корню изъ абсолютной температуры, то измѣненіе D съ температурой вѣроятно весьма близко къ измѣненію K. Далѣе, L, равное $606{,}5—0{,}695\, t_0$, съ температурой убываетъ, хотя и медленно. R съ температурой возрастаетъ; впрочемъ величина втораго члена у A

[1]) Какъ здѣсь, такъ и въ другихъ мѣстахъ предполагается, что смочена только поверхность термометрическаго сосуда.

[2]) Pogg. Ann. Bd. 159, S. 177. 1876.

[3]) Sitzungsberichte d. Wiener Akad., Naturwissensch. Classe, II Abtheil. Bd. 68, S. 406.

сравнительно съ первымъ, какъ мы увидимъ далѣе, вообще не велика, а потому измѣненія его имѣютъ второстепенное значеніе. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что, если нашъ коэффиціентъ A съ температурой и мѣняется, то измѣненіе это весьма не велико.

5) Величины K и D, собственно, должны измѣняться въ зависимости отъ абсолютной влажности воздуха; но имѣя въ виду то, что количество пара въ воздухѣ колеблется въ довольно тѣсныхъ предѣлахъ и составляетъ обыкновенно только небольшую долю атмосфернаго воздуха, можно думать, что эти измѣненія очень малы, и слѣдовательно величина A отъ влажности воздуха почти не зависитъ.

6) K и D отъ атмосфернаго давленія не зависятъ. Отъ него во всей формулѣ можетъ зависѣть только C, такъ какъ съ уменьшеніемъ давленія скорость распространенія пара и тепла возрастаетъ; поэтому съ уменьшеніемъ давленія C должно убывать, т. е. A немного возрастать.

§ 4. Теперь обратимся къ произведеннымъ нами опытамъ, которые могутъ служить подтвержденіемъ вышеизложенныхъ теоретическихъ соображеній. Опыты состояли, во-первыхъ, въ опредѣленіи количества испаряющейся въ единицу времени воды съ данной поверхности и температуры послѣдней при данныхъ условіяхъ вѣтра, температуры воздуха, влажности и давленія его.

Испаряющей поверхностью при этихъ опытахъ служилъ батистовый цилиндръ, навитый на цилиндрическій сосудъ термометра (длина сосуда термометра=35 mm., діаметръ его=4,5 mm) и способный вбирать въ себя достаточный запасъ воды. Толщина его въ разныхъ случаяхъ колебалась около 9,6 mm. и около 6 mm., а длина около 70 mm.; для опредѣленія его средней толщины измѣрялись въ трехъ сѣченіяхъ по два взаимно перпендикулярныхъ діаметра и бралась средняя величина изъ найденныхъ такимъ образомъ. Термометръ тщательно взвѣшивался и затѣмъ или помѣщался на мѣсто влажнаго термометра въ психрометрѣ съ вентиляторомъ (вентиляторъ G. Hasler'а въ Бернѣ, системы *Кантони*), или на разныхъ отъ него разстояніяхъ: 7,5 cm., 22 cm., 50 cm., или наконецъ совсѣмъ вдали отъ него; это дѣлалось съ цѣлью имѣть наблюденія при разной скорости вѣтра.

Длина батистоваго цилиндра почти равнялась ширинѣ лопатокъ упомянутаго вентилятора. Показанія термометра, помѣщеннаго въ срединѣ батистоваго цилиндра и дававшаго среднюю температуру его, отсчитывались чрезъ каждыя 5 минутъ или около того съ разстоянія около 3 метровъ помощію теодолита; одновременно же наблюдались показанія сухаго термометра. Испареніе продолжалось различно, смотря по скорости вѣтра, отъ 1 часа до 30 мин.; термометръ приходилъ въ стаціонарное состояніе обыкновенно не болѣе, какъ черезъ 5 мин. Затѣмъ термометръ взвѣшивался вторично. При опредѣленіи количества испарившейся воды важно возможно точно опредѣлять моменты, къ которымъ относится найденный для термометра вѣсъ, а также отмѣчать точно время постановки и удаленія термометра, и необходимо вводить поправки на испареніе, предшествовавшее постановкѣ термометра и послѣдовавшее за удаленіемъ его, такъ какъ поправки эти иногда могутъ быть довольно значительны. Влажность воздуха находилась при помощи психрометра передъ наблюденіемъ и послѣ него; если же при наблюденіи не было надобности въ вентиляторѣ, то влажность воздуха опредѣлялась во время самаго наблюденія. Психрометръ состоялъ изъ двухъ одинаковыхъ термометровъ *Фусса* съ сосудиками въ видѣ шарика (*Fuess* № 383 и 383*, діаметръ шариковъ около 9 mm.); онъ былъ неоднократно сравниваемъ съ гигрометромъ *Реньйо*, и сравненія эти, если ихъ вычислять по формулѣ $p_0 = p_1 - A(t - t')(P - p_1)$, даютъ для A величину 0,000743 съ погрѣшностью не бóльшей одного процента величины A. Приводить эти сравненія не считаемъ нужнымъ, такъ какъ они производились (въ комнатѣ) при условіяхъ, во всѣхъ случаяхъ между собою одинаковыхъ (температура воздуха около $+22^\circ$ и величина $t - t'$ между 6° и 8°), и полученная нами величина A имѣетъ мѣсто, какъ мы далѣе увидимъ, только при употреблявшейся нами манерѣ покрывать батистомъ термометръ.

Слѣдующая таблица содержитъ результаты, полученные при этихъ опытахъ. Укажемъ принятыя въ ней обозначенія кромѣ извѣстныхъ уже.

ТАБЛИЦА № I.

№№	Психрометръ. P	t	t'	p_0	t_1	t'_1	p_1	$10^6.m$	S	d	l	$\frac{10^8.m}{S(p_1-p_0)}$	$\frac{C}{S}$	δ	$\frac{10^6 Lm}{S(t_1-t'_1)}$	$10^6 A$	$10^6.\Delta A$	$10^6.Ra$	$10^6.Bb$
№ 0	758,2	$+24{,}04^0$	$+16{,}65^0$	10,00 mm.	$+24{,}19^0$	+16,66	14,10 mm	287,3	22,73	0.94	7,30	315	1,287	0,066	998	716	+ 3	98,3	18,2
№ 1	—	24,27	16,85	10,17	24,28	16,85	14,27	255,7	—	—	—	282	1,151	0,075	900	722	+11	110,1	20,4
№ 0	—	24.32	17,02	10,38	24,36	16,95	14,36	277,8	—	—	—	311	1,270	0,067	994	723	— 2	99,7	18,5
	—	24,18	17,03	10,48															
№ 0	757,2	23,41	16,70	10,43	23.42	16,66	14,10	261,8	23,75	0,98	—	306	1,249	0,068	970	717	+ 5	101,4	18,0
№ 2	—	23,59	16,86	10,56	23,66	17.07	14,47	182,8	—	—	—	200	0,815	0,108	695	786	— 6	155,3	21,7
	—	23,82	17,03	10,68															
№ 3	755,7	23,62	16,43	9,94	23,77	17,63	14,99	87,3	23,86	0,973	7.39	74	0,299	0,354	354	1092	—27	423,2	39,3
№ 0	—	23,80	16,62	10,10	23,76	16,51	13,96	286,5	—	—	—	312	1,270	0,067	985	716	+ 4	99,7	17,6
№ 2	—	23,91	15,67	10,12	24,10	17,03	14,43	200,7	—	—	—	197	0,803	0,109	708	813	—31	157,8	22,0
	—	24,16	16,83	10,21															
№ 0	744,8	22,88	16,69	10,77	22,93	16,59	14,04	162,3	13,42	0,580	7,19	369	1,479	0,059	1134	708	+ 7	85,6	26,9
№ 2	—	22,96	16,71	10,75	23,04	16,73	14,16	116,2	—	—	—	250	1,001	0,092	816	752	+ 8	126,5	31,3
	—	23,07	16,66	10,62															
№ 3	748,3	21,74	14,24	7,98	22,02	15,45	13,05	81,1	22,58	0,926	7,36	71	0,285	0,383	326	1051	+38	443,3	43,5
	—	22,20	14,41	7,95															
№ 4	—	22,43	14,31	7,69	22,43	15,73	13,29	81,6	—	—	—	65	0,260	0,433	321	1137	— 1	485,8	47,7
—	745,6	21,39	14,07	7,96	21,39	15,43	13,04	72,1	—	—	—	63	0,253	0,451	319	1163	—11	500,1	49 1
—	—	21,82	14,34	8,09	21,82	15,50	13,09	131,0	38,00	0,646	18,5	69	0,277	0,463	325	1079	+ 6	455,8	26,6
					23,22	16,49													

Столбецъ (№№) даетъ положеніе термометра съ батистовымъ цилиндромъ относительно вентилятора: № 0—термометръ вблизи вентилятора на мѣстѣ влажнаго термометра психрометра; № 1—на разстояніи 7,5 cm. отъ вентилятора; № 2 — на разстояніи 22 cm.; № 3—на разстояніи 50 cm.; № 4—совсѣмъ вдали.

t и t'—температура сухаго и влажнаго термометра психрометра.

t_1 и t'_1—одновременная температура сухаго термометра и термометра съ батистовымъ цилиндромъ.

p_1—упругость пара насыщеннаго при температурѣ t'_1.

d, l, S—діаметръ, длина и поверхность батистоваго цилиндра въ сантиметрахъ.

m—количество испарившейся со всей поверхности цилиндра воды въ 1 сек. въ граммахъ.

C—находится при помощи уравненія (IV), причемъ для D принята величина, которую даетъ *Стефанъ* [1]), 0,18; погрѣшность въ D вызываетъ обратно пропорціональную погрѣшность въ C. Здѣсь насъ интересуетъ хотя приблизительное значеніе этой величины и ея измѣненія въ зависимости отъ скорости вѣтра и размѣровъ испаряющаго цилиндра.

δ—средняя величина разстоянія, на которое распространяется замѣтное вліяніе испаряющей поверхности; точнѣе говоря, это толщина изолирующаго слоя конденсатора, составленнаго изъ двухъ безконечно-длинныхъ одноосныхъ цилиндровъ и имѣющаго $\frac{C}{S}$ (для внутренняго цилиндра, діаметръ котораго тотъ же, что и батистоваго) то же, что и въ нашемъ случаѣ. Измѣненіе D производитъ измѣненіе δ въ томъ же смыслѣ. Такъ какъ величина, принятая для D, вѣроятно меньше той, какая должна имѣть мѣсто при температурѣ нашихъ опытовъ (около 19°), то найденныя величины δ меньше дѣйствительныхъ.

$\frac{Lm}{S(t_1-t'_1)}$ —выражаетъ количество тепла, какое цилиндръ тѣхъ же размѣровъ и при той же скорости вѣтра получалъ бы или те-

[1]) Zeitschrift d. Oesterreich. Gesellsch. für Meteorologie. Bd. 16, S. 181. Нѣсколько опредѣленій величины D, произведенныхъ нами по методѣ *Стефана* (Sitzungsberichte d. Wiener Akad., Naturw. Classe, II Abth. Bd. 68, S. 385), дали для нея 0,228 при 15°,3.

рялъ бы въ 1 сек. на каждый квадратный сантиметръ, если бы его температура была ниже или выше на 1° температуры воздуха и окружающихъ предметовъ. Тепло, притекающее по стержню термометра, оставлено безъ вниманія.

A найдено черезъ раздѣленіе $p_1 - p_0$ на $(t_1 - t'_1)(P - p_1)$.

Величины, полученныя въ разныхъ случаяхъ при той же скорости вѣтра для A, δ и $\frac{C}{S}$, даютъ возможность судить о согласіи отдѣльныхъ наблюденій между собою; согласіе это всего менѣе при отсутствіи искусственнаго вѣтра, что зависитъ оттого, что въ этомъ случаѣ скорость движенія воздуха болѣе подвержена случайнымъ колебаніямъ и въ той же комнатѣ можетъ быть въ разные дни различна.

Величина δ, какъ это видно изъ таблицы, значительно колеблется съ измѣненіемъ скорости вѣтра и вообще очень не велика даже въ случаѣ отсутствія искусственнаго вѣтра, что указываетъ между прочимъ, въ какой малой степени теорія *Максвелля* соотвѣтствуетъ наблюденіямъ даже при отсутствіи сколько-нибудь замѣтнаго вѣтра (двери и окна во время наблюденія были закрыты). Въ случаѣ тонкаго цилиндра δ при вѣтрѣ нѣсколько меньше, чего и слѣдовало ожидать на основаніи вышеизложенныхъ теоретическихъ соображеній.

Приведенными наблюденіями мы воспользуемся для провѣрки нашей теоріи слѣдующимъ образомъ. Величину A мы можемъ такъ представить:

$$A = \beta + Ra + Bb, \qquad \text{(VI)}$$

гдѣ $\beta = \frac{1}{L\rho\sigma} \cdot \frac{K}{D}$, $a = \frac{S}{4\pi CDL\rho\sigma}$ и $b = \frac{a}{S}$.

Величины β и R совершенно не зависятъ ни отъ вѣтра, ни отъ размѣровъ испаряющаго цилиндра. Что же касается до величины B, то она мѣняется съ вѣтромъ пропорціонально $\sqrt{q}$; о величинѣ q судить довольно трудно, такъ какъ вѣтеръ возлѣ стержня термометра у насъ былъ не совсѣмъ тотъ же, что возлѣ батистоваго цилиндра; но, имѣя въ виду малость члена Bb, мы приблизительно положимъ, что количество тепла, притекающаго

въ 1 сек. на 1-цу поверхности стержня, то же, что и количество тепла, получаемаго при тѣхъ же условіяхъ поверхностью тонкаго батистоваго цилиндра, толщина котораго немного болѣе толщины стержня (діаметръ стержня=0,53 cm.); именно, если $\sqrt{q}$ при положеніи № 4 и № 3 принять за 1-цу, то при положеніи № 2 его можно принять =1,5, а при положеніи №1 и № 0—=1,9 (см. въ предыдущей таблицѣ столбецъ $\left.\frac{Lm}{S(t_1-t'_1)}\right)$. Введя вмѣсто B произведенія B на 1-цу, 1,5 и 1,9 и отнеся эти множители къ b, мы можемъ уже B считать во всѣхъ случаяхъ постояннымъ, принимая его $=\sqrt{qsnk}$, гдѣ q—то, какое имѣетъ мѣсто при отсутствіи искусственнаго вѣтра (q=0,00036). Величины A, a и b у насъ извѣстны, и мы изъ нашихъ наблюденій получаемъ 14 уравненій вышеприведеннаго вида (VI), изъ которыхъ по способу наименьшихъ квадратовъ можемъ вычислить β, R и B. Такимъ образомъ находимъ

$$\beta=0{,}0006025,\ R=0{,}000137 \text{ и } B=0{,}000304.$$

Вышеприведенная таблица содержитъ значенія произведеній Ra и Bb, а также $\triangle A=A_{\text{выч.}}-A_{\text{набл.}}$, т. е. разность между величиной A, вычисленной при помощи найденныхъ значеній β, R и B, и величиной, найденной раздѣленіемъ p_1-p_0 на $(t_1-t'_1)(P-p_1)$.

Зная въ равенствѣ $B=\sqrt{qsnk}$ величины B, q, s, n, мы можемъ опредѣлить k; находимъ k=0,0008. *Форбсъ* (Forbes) для коэффиціента теплопроводности стекла даетъ величину 0,0005; *Пекле* (Péclet) 0,0021—0,0024 [1]). Отсюда можно заключить, что количество тепла, притекающаго по стержню термометра, мы оцѣниваемъ приблизительно вѣрно.

Если принять законъ охлажденія и нагрѣванія чрезъ лучеиспусканіе, указанный *Дюлонгомъ* и *Пети* (Dulong et Petit), то R имѣетъ видъ

$$R=ma^{t_1}(a-1),$$

гдѣ a=1,0077, t_1—температура окружающихъ предметовъ.

Отсюда при t_1=20° и R=0,000137 имѣемъ m=0,0153.

[1]) *J. D. Everett*, Unités et Constantes physiques, pp. 116 и 121.

Наблюденія *Ленебаха* (Lehnebach) [1]) въ случаѣ поверхности покрытой сажей или стеклянной даютъ $m=0,0132$.

Если же воспользоваться формулой лучеиспусканія, принятой *Стефаномъ* [2]), согласно которой полное лучеиспусканіе $W=0,0067\left(\frac{T}{T_0}\right)^4$ въ случаѣ поверхности, покрытой сажей (T— абсолютная температура лучеиспускающей поверхности, $T_0=273$), то для R получаемъ такое выраженіе

$$R=0,0067\frac{(T+1)^4-T^4}{T^4};$$

откуда при $T=293^0$, $R=0,000122$.

Согласіе нами полученной величины R съ величинами, какія получаются у другихъ, можно считать удовлетворительнымъ и видѣть въ этомъ подтвержденіе нашей теоріи. При оцѣнкѣ этого согласія надо принять во вниманіе, что мы точно не знаемъ величины B, температуры окружающихъ предметовъ и величины S, которая нами оцѣнивается, вѣроятно, меньше дѣйствительной, такъ какъ батистъ всегда представляетъ выпуклости, впадины и вообще шероховатости, непринимаемыя во вниманіе при вычисленіи S; наконецъ членъ, содержащій R, сравнительно малъ.

Величина β позволяетъ найти отношеніе $\frac{K}{D}$:

$$\frac{K}{D}=0,000289.$$

Для отношенія $\frac{K}{D}$ *Стефанъ* даетъ, какъ мы видѣли выше, величину 0,000307, а *Максвелль* предполагаетъ, что оно должно быть меньше только-что приведенной цифры, именно около 0,000236.

Если бы мы выше приняли, что q, и слѣдовательно B, отъ вѣтра не зависятъ, то нашли бы для β, R и B слѣдующія значенія:

$$\beta=0,0006135,\quad R=0,000132 \text{ и } B=0,000346.$$

[1]) Pogg. Ann. Bd. 151, S. 96.

[2]) Sitzungsberichte d. Wiener Akad., Naturw. Classe, II Abth. Bd. 79, S. 391.

Различіе этихъ величинъ β и R отъ предыдущихъ нельзя назвать значительнымъ.

§ 5. Для опредѣленія величины отношенія $\frac{K}{D}$ и вмѣстѣ для убѣжденія, что охлажденіе (или нагрѣваніе) и испареніе выражаются при помощи одного и того же конденсатора, были произведены еще опыты надъ охлажденіемъ термометра приблизительно тѣхъ же размѣровъ, какъ и тонкій батистовый цилиндръ, и при тѣхъ же скоростяхъ вѣтра, при какихъ наблюдалось испареніе.

Пренебрегая тепломъ, притекающимъ или утекающимъ по стержню термометра, мы можемъ, согласно съ преждеизложеннымъ, дать для количества тепла $F\,d\tau$, получаемаго термометрическимъ сосудомъ въ безконечно-малый промежутокъ времени $d\tau$ чрезъ лучеиспусканіе и теплопроводность воздуха, слѣдующее выраженіе

$$Fd\tau = -\{4\pi KC + RS\}(t - t_0)d\tau;$$

такъ какъ $t > t_0$ (t—температура термометра, t_0—температура воздуха и окружающихъ предметовъ), то мы здѣсь имѣемъ дѣло съ потерей тепла и, помня это, мы можемъ предъ скобкой знакъ — замѣнить чрезъ +.

Если чрезъ G означимъ калориметрическій вѣсъ термометра и чрезъ dt измѣненіе температуры термометра во время $d\tau$, то

$$Fd\tau = Gdt = \{4\pi KC + RS\}(t - t_0)d\tau.$$

Имѣя въ виду сравнительно тѣсные предѣлы измѣненія температуры термометра, мы можемъ считать K и R постоянными. Если примемъ, что термометръ во время τ мѣняетъ свою температуру отъ t_1 до t_2, то изъ предыдущаго уравненія по интеграціи мы получимъ слѣдующее соотношеніе:

$$G\,lg\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = (4\pi KC + RS)\tau. \qquad \text{(VII)}$$

Этимъ уравненіемъ мы и воспользуемся для вычисленія результатовъ нашихъ наблюденій.

Термометръ (механика Грейнера), заказанный нами спеціально для этихъ опытовъ, имѣетъ цилиндрическій сосудъ 7,15 cm. длиной и 0,577 cm. въ діаметрѣ; толщина стѣнокъ сосуда около 0,25 mm., исключая самой нижней части, гдѣ она не менѣе 0,5 mm.; поверхность его=12,96 □ cm.; вѣсъ ртути въ сосудѣ при комнатной температурѣ=20,44 грамм. (термометръ былъ взвѣшенъ передъ наполненіемъ и послѣ), а калориметрическій вѣсъ ея =0,6784 калорій, если считать удѣльную теплоту ртути равной 0,0332; вѣсъ стекла въ сосудѣ=0,825 грамм. (стеклянная трубка, пошедшая на образованіе его, была вэвѣшена), а калометрическій вѣсъ его=0,146 кал., если для удѣльной теплоты стекла принять величину *Дюлонга* и *Пети*, 0,1770; слѣдовательно калориметрическій вѣсъ G всего сосуда=0,824 кал.

Охлажденіе наблюдалось при положеніи термометра № 0 и № 2 Для нагрѣванія термометръ помѣщался внутрь стеклянной трубки съ узкимъ горломъ, которая опускалась въ сосудъ съ горячею водою; при этомъ нагрѣванію подвергался не только самый термометрическій сосудъ, но и часть термометра выше сосуда на разстояніи большемъ 2-хъ сантиметровъ. По удаленіи воды и трубки наблюдались моменты прохожденія конца ртутнаго столба чрезъ дѣленія 30°, 25° и 20°. Наблюденіе надъ движеніемъ ртути производилось съ разстоянія двухъ—трехъ метровъ теодолитомъ, а время наблюдалось счетчикомъ, бьющимъ секунды. Послѣ наблюденія тотчасъ отсчитывался термометръ при вентиляторѣ, для опредѣленія температуры воздуха. Дѣленія, прохожденіе чрезъ которыя наблюдалось, соотвѣтствуютъ температурамъ: 30°,35; 25°,41; 20°,31. Слѣдующая таблица содержитъ полученные нами результаты.

t показываетъ, къ какой температурѣ въ данномъ наблюденіи относятся величины K и R; она принята равной $\frac{1}{2}\left\{t_0 + \frac{1}{2}(t_1 + t_2)\right\}$. Средняя величина t при положеніи № 0 равна 20°,66 и при № 2 = 20°,03.

Беря значенія $\frac{C}{S}$ для тонкаго батистоваго цилиндра изъ таблицы № I и подставляя ихъ въ уравненіе (VII) вмѣстѣ со средними

значеніями $\frac{G}{\tau} lg \frac{t_2-t_0}{t_1-t_0}$, мы получимъ 2 уравненія, которыя можно такъ представить:

$$(\text{№ } 0) \qquad 0{,}01213 = 4\pi SD . 1{,}479 \frac{K}{D} + RS,$$

$$(\text{№ } 2) \qquad 0{,}008835 = 4\pi SD . 1{,}001 \frac{K}{D} + RS.$$

ТАБЛИЦА № II.

t_0	t_1-t_0	t_2-t_0	τ	t	$\frac{G}{\tau} lg \frac{t_2-t_0}{t_1-t_0}$	№№
17,14°	13,21°	8,27°	31,3^s	22,5°	0,01233	№ 0
—	8,27	3,17	65,3	20,0	0,01210	—
15,03	15,32	10,38	26,8	21,5	0,01197	—
—	10,38	5,28	45,9	19,0	0,01213	—
16,62	13,73	8,79	30,25	22,3	0,01214	—
—	8,79	3,69	61,5	19,7	0,01163	—
14,85	15,50	10,56	26,0	21,4	0,01216	—
—	10,56	5,46	43,2	18,9	0,01258	—
15,02	15,33	10,39	36,0	21,5	0,00890	№ 2
—	10,39	5,29	62,8	18,9	0,00886	—
14,71	15,64	10,70	35,2	21,3	0,00888	—
—	10,70	5,60	59,0	18,8	0,00904	—
14,23	16,12	11,18	35,2	21,1	0,00857	—
—	11,18	6,08	57,3	18,6	0,00876	—

Полное лучеиспусканіе для стекла по *Стефану*

$$W = 0.0060 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4,$$

откуда при $T = 293°$, $R = 0{,}000110$.

Подставляя сюда вмѣсто R, S и D ихъ значенія, получимъ для $\frac{K}{D}$ изъ (№ 0) величину 0,000247 и изъ (№ 2) 0,000252, въ среднемъ 0,000250. Эта величина составляетъ 86,5% вышеполученной 0,000289.

Можно указать нѣсколько причинъ, обусловливающихъ эту разницу. Толщина слоя воздуха, имѣющаго температуру отличную отъ температуры окружающаго воздуха, очень невелика, близка къ толщинѣ стѣнокъ термометрическаго сосуда, и охлажденіе идетъ слишкомъ быстро; поэтому весьма вѣроятно, что температура поверхности термометра представляетъ замѣтное отличіе отъ температуры ртути, т.-е. $t_1—t_0$ и $t_2—t_0$ въ дѣйствительности меньше тѣхъ, какія мы принимаемъ. Далѣе, нами было уже замѣчено, что принимаемое нами S для батистоваго цилиндра, по всей вѣроятности, нѣсколько мало, и слѣдовательно $\frac{C}{S}$ нѣсколько велико. Поэтому безъ большаго преувеличенія можно утверждать, что согласіе этихъ опытовъ съ предъидущими удовлетворительно.

На первый взглядъ казалось бы ближе къ цѣли опредѣлить величину $\frac{K}{D}$ чрезъ исключеніе RS изъ предъидущихъ уравненій; такимъ образомъ мы получили бы для него 0,000235; но при этомъ намъ приходится имѣть дѣло со сравнительно небольшими по величинѣ разностями, случайныя погрѣшности которыхъ гораздо больше, и къ тому же быстрота охлажденія при положеніи № 0 больше и вызываетъ бо̀льшую погрѣшность, чѣмъ при положеніи № 2, что должно вліять уменьшающимъ образомъ на окончательный результатъ—величину $\frac{K}{D}$.

Въ заключеніе замѣтимъ, что скорость вѣтра вдали отъ вентилятора, наприм. при положеніи № 2, находится въ большой зависимости отъ присутствія предметовъ на сколько-нибудь близкомъ разстояніи отъ термометра; предъидущіе опыты съ охлажденіемъ при положеніи № 2 дѣлались вблизи шкафа съ вѣсами (разстояніе термометра отъ него около 0,5 метра),—тамъ же, гдѣ и опыты съ испареніемъ; наблюденія, произведенныя среди комнаты,

дали для охлажденія величину гораздо меньшую, именно вмѣсто 0,00884 только 0,0067. То же должно имѣть мѣсто, конечно, и при испареніи. На вѣтеръ вблизи самаго вентилятора (№ 0) близость различныхъ предметовъ вліяетъ гораздо меньше; изъ приведенныхъ опытовъ (№ 0) два послѣдніе были сдѣланы тамъ же, гдѣ производились опыты съ испареніемъ; остальные среди комнаты.

§ 6. Такъ какъ, съ возрастаніемъ скорости вѣтра, C въ уравненіи (VI) постепенно увеличивается и A приближается по величинѣ своей къ β, то для опредѣленія этого послѣдняго, а слѣдовательно и отношенія $\frac{K}{D}$, мы можемъ воспользоваться еще инымъ способомъ: именно, наблюдая измѣненіе A со скоростью вѣтра, мы можемъ отыскать предѣлъ, къ которому стремится A при очень большой скорости вѣтра и который есть ничто иное какъ β.

Для изслѣдованія вліянія скорости вѣтра на величину A, итальянскій психрометръ съ вентиляторомъ системы *Кантони* (термометры этого психрометра, № 7$^{\text{I}}$ и № 7$^{\text{II}}$ «Tecnomasio Milano», подраздѣлены на десятыя части градуса и имѣютъ цилиндрическіе сосуды 5,7 mm. въ діаметрѣ и 27 mm. въ длину; батистомъ покрывался почти одинъ только термометрическій сосудъ) былъ сравненъ съ двумя другими, изъ которыхъ одинъ состоялъ изъ термометровъ, №№ 7 и 8 Гейсслера въ Боннѣ, съ очень маленькими цилиндрическими сосудами, длиною около 8 mm. и діаметромъ въ 4 mm.; другой изъ обыкновенно употребляющихся на русскихъ метеорологическихъ станціяхъ термометровъ, №№ 212 и 212′ Гейсслера, съ шарообразными сосудами діаметромъ около 9,5 mm. Психрометры поочередно помѣщались въ металлическій цилиндръ, длиною болѣе 0,5 метра и діаметромъ въ 0,25 метра, внизу котораго находился вентиляторъ съ кривыми лопатками,—такой-же, какъ въ психрометрической клѣткѣ *Вильда* [1]); для отсчета термометровъ въ цилиндрѣ были сдѣланы 4 узкихъ окошечка, закрывавшіяся стеклами. Опытъ производился въ залѣ Главной Физической Обсерваторіи. Вентиляторъ былъ приводимъ въ движеніе съ разной, но постоянной скоростью, помощію водянаго двигателя въ одну лошадиную силу. Скорость вѣтра опредѣлялась анемометромъ

[1]) Метеорологическій Сборникъ. Томъ VI. № 9.

Комба, вывѣреннымъ *Дорандтомъ*. Итальянскій психрометръ помѣщался рядомъ и защищался отъ наблюдателя полуцилиндрическимъ желѣзнымъ листомъ.

Таблицы № III и № IV (стр. 38) содержатъ результаты описанныхъ наблюденій.

Съ психрометромъ № 7 и 8 были еще сдѣланы сравненія, при которыхъ воздухъ возлѣ него приводился въ движеніе по второму изъ упомянутыхъ выше способовъ *Реньйо*.

Термометры чрезъ два отверстія вставлялись въ не особенно большую коробку, причемъ сосуды ихъ находились въ трубкахъ, входящихъ въ коробку снизу; по одной изъ этихъ трубокъ воздухъ входитъ въ коробку, пройдя предварительно длинную спираль, а по другой выходитъ въ воздушный насосъ, проходя по пути черезъ большой резервуаръ, предназначенный для того, чтобы движеніе воздуха при дѣйствіи воздушнаго насоса было равномѣрно. Влажный термометръ помѣщался въ ту трубку, черезъ которую воздухъ выходитъ въ воздушный насосъ; для смачиванія батиста къ термометру подвѣшивался на проволокѣ маленькій сосудикъ съ водой; возлѣ него же оканчивалась трубка манометра для опредѣленія разности давленій внутри коробки и внѣ ея. Самая коробка вмѣстѣ со спиралью находилась въ металлическомъ ящикѣ, въ который наливалась вода, чтобы придать входящему воздуху опредѣленную постоянную температуру. Аппаратъ этотъ былъ устроенъ *Дорандтомъ* съ цѣлью изслѣдованія психрометра, хотя и не въ отношеніи вліянія вѣтра на него.

Скорость вѣтра въ спирали находилась при помощи формулы:

$$u = 395{,}88\sqrt{\frac{\gamma(1+\alpha t)d}{P(d+gl)}}$$ [1]), гдѣ

γ—разность давленій внутри коробки и внѣ ея;
u—скорость вѣтра въ метрахъ;
α—коэффиціентъ расширенія воздуха;
g=0,0238—коэффиціентъ сопротивленія воздуха въ металлическихъ трубкахъ;
P—давленіе воздуха;

[1]) *Mousson*, Physik, Bd. I, S. 192.

d—діаметръ спиралеобразной трубки, въ нашемъ аппаратѣ = 12,5 mm.

l—длина спирали, у насъ $l = 18,6$ m.

Діаметръ трубки, въ которой находился влажный термометръ, = 25 mm.; слѣдовательно скорость вѣтра возлѣ влажнаго термометра $v = \frac{u}{4}$.

Для опредѣленія скорости вѣтра въ первыхъ пяти случаяхъ употреблялся еще другой способъ, именно: при помощи газометра опредѣлялось количество воздуха, проходящаго чрезъ аппаратъ; величины, найденныя этимъ способомъ, гораздо меньше и помѣщены въ табл. V въ скобкахъ.

Итальянскій психрометръ при этихъ наблюденіяхъ помѣщался вблизи начала спирали.

Въ первыхъ пяти случаяхъ употреблялся для просасыванія воздуха черезъ аппаратъ одинъ воздушный насосъ, въ послѣднихъ шести—два; въ томъ и другомъ случаѣ они были приводимы въ движеніе упомянутымъ уже водянымъ двигателемъ.

Таблица № V содержитъ результаты наблюденій съ описаннымъ аппаратомъ. P_1 въ этой таблицѣ означаетъ давленіе воздуха въ аппаратѣ вблизи влажнаго термометра; $p_0 \frac{P_1}{P}$ — влажность воздуха въ аппаратѣ.

Для итальянскаго психрометра A принято равнымъ 0,000725, на основаніи сравненій его съ другими гигрометрами, помѣщенныхъ въ слѣдующей главѣ. Величина p'_0 во всѣхъ таблицахъ (№№ III, IV и V) вычислена съ тѣмъ же самымъ A. «A наблюденное» означаетъ ту величину, которая должна быть принята въ данномъ случаѣ, чтобы психрометръ давалъ ту же влажность, какъ и итальянскій. При вычисленіяхъ здѣсь въ формулѣ психрометра принято P вмѣсто $P-p_1$, что имѣетъ вліяніе на величину p_0 и p'_0, но не на величины $p_0-p'_0$ и A, которыя насъ здѣсь интересуютъ.

ТАБЛИЦА № III.

Италіанскій психрометръ.					Психрометръ № 212 и 212′.								
Баром.	Сухой термом.	Влажн. термом.	Разн.	Абсол. влажн.	Сухой термом.	Влажн. термом.	Разн.	Абсол. влажн.	Разн.	A наблюденное.	A вычисленное.	$A_н.—A_в.$	Скорос. вѣтра въ 1 сек. въ метр.
P	t	t'	$t—t'$	p_0	t_1	t'_1	$t_1—t'_1$	p'_0	$p_0—p'_0$				$v.$
mm				mm				mm	mm				
760	+16°,88	+11°,13	5°,75	6,71	+16°,86	+11°,63	5°,23	7,32	—0,61	0,000881	0,000880	+0,000001	0,5
—	16,88	11,23	5,65	6,82	16,78	11,43	5,35	7,12	—0,30	799	804	— 5	0,8
—	16,85	11,28	5,57	6,91	16,79	11,48	5,31	7,18	—0,27	791	776	+ 15	1,0
—	16,88	11,28	5,60	6,89	16,79	11,34	5,45	7,01	—0,12	759	749	+ 10	1,3
768,5	17,06	10,26	6,80	5,53	17,17	10,17	7,00	5,37	+0,16	695	689	+ 6	2,9
—	17,03	10,27	6,76	5,57	17,09	10,10	6,99	5,33	+0,24	681	687	— 6	3,0

ТАБЛИЦА № IV.

Италіанскій психрометръ.					Психрометръ № 7 и 8.								
Баром.	Сухой термом.	Влажн. термом.	Разн.	Абсол. влажн.	Сухой термом.	Влажн. термом.	Разн.	Абсол. влажн.	Разн.	A наблюденное.	A вычисленное.	$A_н.—A_в.$	Скорос. вѣтра въ 1 сек. въ метр.
P	t	t'	$t—t'$	p_0	t_1	t'_1	$t_1—t'_1$	p'_0	$p_0—p'_0$				$v.$
mm				mm				mm	mm				
759	+16°,66	+10°,39	6°,27	5,96	+16°,73	+11°,23	5°,50	6,93	—0,97	0,000954	—	—	—
760	16,76	10,77	5,99	6,35	16,81	10,93	5,88	6,51	—0,16	761	0,000776	—0,000015	0,4
759	16,67	10,41	6,26	5,98	16,76	10,49	6,27	6,03	—0,05	734	745	— 11	0,52
760	16,85	11,08	5,77	6,67	16,87	11,15	5,72	6,74	—0,07	741	719	+ 22	0,7
759	16,67	10,45	6,22	6,02	16,71	10,40	6,31	5,94	+0,08	708	712	— 4	0,77
—	16,66	10,48	6,18	6,06	16,74	10,43	6,31	5,96	+0,10	704	709	— 5	0,80
760	16,90	11,36	5,54	6,97	16,94	11,27	5,67	6,85	+0,12	696	702	— 6	0,90
—	16,81	10,93	5,88	6,51	16,83	10,91	5,92	6,47	+0,04	716	696	+ 20	1,00
759	16,67	10,52	6,15	6,11	16,73	10,37	6,36	5,89	+0,22	680	695	— 15	1,04
760	16,83	11,01	5,82	6,60	16,84	10,92	5,92	6,48	+0,12	698	684	+ 14	1,3
—	16,93	11,36	5,57	6,96	16,95	11,27	5,68	6,84	+0,12	697	681	+ 16	1,4
759	16,69	10,57	6,12	6,15	16,73	10,41	6,32	5,94	+0,21	682	673	+ 9	1,72
—	16,65	10,63	6,02	6,25	16,71	10,41	6,30	5,95	+0,30	663	672	— 9	1,75
768,5	17,04	10,29	6,75	5,58	17,23	10,08	7,15	5,24	+0,34	662	659	+ 3	3,2
—	16,89	10,08	6,81	5,41	17,12	9,92	7,20	5,11	+0,30	671	658	+ 13	3,3

ТАБЛИЦА № V.

Итальянскій психрометръ.					Психрометръ № 7 и 8.										
Бар.	Сухой терм.	Влажн. терм.	Разн.	Абсол. влажн.	Бар.	Сухой терм.	Влажн. терм.	Разн.	Абсол. влажн.	$p_0 \frac{P_1}{P}$	$p_0 \frac{P_1}{P} - p'_0$	A наблюд.	A вычисл.	$A_н.—A_в.$	Скорос. вѣтра v.
P	t	t'	$t-t'$	p_0	P_1	t_1	t'_1	$t_1-t'_1$	p'_0						
mm 759	+19°,86	+11°,52	8°,34	mm 5,54	mm 749	+19°,45	+11°,00	8°,45	mm 5,20	mm 5,47	+0,27	0,000683	0,000671	+0,000012	m 1,9(1,3)
—	19,85	11,50	8,35	5,53	750	19,39	11,00	8,39	5,23	5,46	0,23	688	—	+ 17	—
—	19,91	11,62	8,29	5,64	740	19,36	10,85	8,51	5,14	5,50	0,36	667	661	+ 6	2,8(1,8)
—	19,98	11,74	8,24	5,75	—	19,37	10,92	8,45	5,21	5,60	0,39	662	—	+ 1	—
—	19,99	11,74	8,25	5,74	738	19,36	10,90	8,46	5,20	5,58	0,38	665	—	+ 4	—
749	20,29	12,66	7,63	6,78	711	19,82	11,54	8,28	5,88	6,45	0,57	629	656	— 27	3,8
—	20,31	12,65	7,66	6,75	—	19,82	11,54	8,28	5,88	6,40	0,52	637	—	— 19	—
—	20,33	12,66	7,67	6,75	712	19,77	11,51	8,26	5,87	6,42	0,55	630	—	— 26	—
—	20,36	12,66	7,70	6,74	714	19,79	11,54	8,25	5,88	6,42	0,54	633	—	— 23	—
748	20,15	12,45	7,70	6,59	707	19,86	11,36	8,50	5,67	6,23	0,56	632	655	— 23	4,0
—	20,15	12,43	7,72	6,56	708	19,86	11,36	8,50	5,67	6,21	0,54	635	—	— 20	—

Такъ какъ величина A съ возрастаніемъ скорости вѣтра v стремится къ нѣкоторому предѣлу, одинаковому для всѣхъ психрометровъ, а съ уменьшеніемъ v постепенно возрастаетъ, то нами была принята слѣдующая аналитическая связь между A и v:

$$A = \beta + \frac{e}{\sqrt{v}} + \frac{f}{v}. \qquad \text{(VIII)}$$

Подставляя въ это уравненіе вмѣсто A и v ихъ соотвѣтственныя величины, мы получимъ для обоихъ психрометровъ рядъ уравненій, изъ которыхъ по способу наименьшихъ квадратовъ можемъ найти β, e и f. Для психрометра № 212 и 212′ находимъ

$$\beta = 0{,}0005931,\ e = 0{,}0001351,\ f = 0{,}0000480.$$

Для психрометра № 7 и 8:

$$\beta = 0{,}0006403,\ e = 0{,}0000043,\ f = 0{,}0000515.$$

Относительно послѣдняго психрометра замѣтимъ, что при вычисленіи были приняты во вниманіе наблюденія, помѣщенныя какъ въ таблицѣ № IV, такъ и въ № V; но при этихъ вычисленіяхъ предварительно были взяты среднія изъ нѣсколькихъ (двухъ или трехъ) близкихъ по скорости вѣтра величинъ A.

При отсутствіи искусственнаго вѣтра величина A очень измѣнчива, и для психрометра № 212 и 212′ она достигаетъ цифры отъ 0,001100 до 0,001500 и даже болѣе; для психрометра № 7 и 8 нѣсколько меньше, около 0,001000.

Величины A, найденныя по принятой нами формулѣ съ приведенными коэффиціентами, помѣщены въ таблицахъ подъ рубрикой «A вычисленное».

Для большей наглядности, на приложенномъ въ концѣ чертежѣ нанесены какъ непосредственно найденныя значенія A, такъ и кривыя, графически представляющія найденную нами связь между A и v; при этомъ за абсциссу принята скорость вѣтра v, а за ординату—соотвѣтственная величина A.

Согласіе между величинами A, непосредственно найденными и вычисленными, для психрометра № 212 и 212′ можно считать вполнѣ удовлетворительнымъ; разность между той и другой не переходитъ за 0,000015, что предполагаетъ погрѣшность въ сравненіи психрометровъ около 0,06 mm.

Для психрометра № 7 и 8 это согласіе нѣсколько меньше, особенно въ таблицѣ № V: здѣсь разногласіе достигаетъ 0,000022 (табл. № IV) и 0,000027 (табл. № V), что предполагаетъ погрѣшность около 0,10 mm. и 0,13 mm. въ абсолютной влажности. Причину этого можно видѣть отчасти въ трудности отсчета термометровъ, вслѣдствіе крайней тонкости ртутнаго столбика при не особенно хорошемъ освѣщеніи, и еще больше, быть можетъ, въ крайней чувствительности этого психрометра къ случайнымъ возмущеніямъ.

Аналитическая связь между A и v выбрана была нами прежде совершенно произвольно, какъ удовлетворительно согласующаяся съ наблюденіями (были испробованы еще другія, напр. $A=\beta+\frac{f}{v}$, $A=\beta+\frac{f}{v^2}$); но въ настоящее время можно привести въ пользу подобной связи и теоретическія основанія. Величина B, которую мы находимъ въ ур. (VI), пропорціональна $\sqrt{q}$; q же, подобно H въ ур. (III), можетъ быть выражено чрезъ ёмкость нѣкотораго конденсатора C, или чрезъ $\frac{C}{S}$ (тепло къ стержню притекаетъ главнымъ образомъ благодаря теплопроводности воздуха, и только меньшая часть его—чрезъ лучеиспусканіе). Это $\frac{C}{S}$ можетъ быть иногда то же, какое разумѣется въ уравненіяхъ (III) и (IV), но вообще говоря иное. Въ послѣднемъ случаѣ мы, опираясь отчасти на наши наблюденія (сравни въ табл. № I величины $\frac{C}{S}$ для толстаго и тонкаго цилиндра при положеніяхъ № 0 и № 2), можемъ принять, что этотъ новый коэффиціентъ $\frac{C}{S}$, чрезъ который выразится q, при измѣненіи v измѣняется пропорціонально тому, который входитъ въ урр. (III) и (IV); тогда Bb въ ур. (VI) будетъ обратно пропорціонально $\sqrt{C}$, гдѣ C то самое, которому обратно пропорціонально a въ ур. (VI). Такимъ образомъ ур. (VI) можетъ быть представлено въ такомъ видѣ

$$A=\beta+\frac{e'}{\sqrt{C}}+\frac{f'}{C}. \qquad (VI')$$

Изъ нашихъ наблюденій въ таблицѣ № I мы, къ сожалѣнію, не можемъ указать связи между C и v, вслѣдствіе незнанія величины v въ разныхъ случаяхъ; но, какъ первое приближеніе, можемъ принять, едва-ли уклоняясь значительно отъ дѣйствительности, что $C=C_1+hv$, гдѣ C_1—та электрическая емкость испаряющей поверхности, которой равно C при $v=0$. Если теперь пренебречь величиной C_1, то уравненіе (VI') будетъ тожественно съ ур. (VIII). Пренебрегая величиной C_1, мы дѣлаемъ погрѣшность, бо̀льшую или меньшую смотря по величинѣ v; когда $v<1$ m. ($\delta>0{,}1$ cm.), ошибка можетъ быть значительной; напротивъ при v большихъ ($\delta<0{,}1$ cm.) погрѣшность ничтожна. Имѣя въ виду тѣсные предѣлы измѣненія v въ нашихъ опытахъ и интересуясь величиной A при v значительныхъ, мы можемъ сдѣланный нами выборъ для аналитической связи между A и v признать довольно удачнымъ.

Относительная величина коэффиціентовъ e и f для нашихъ психрометровъ весьма различна. Причину этой разницы слѣдуетъ искать, въ значительной мѣрѣ, въ различіи отношенія между количествами тепла, получаемыми сосудомъ термометра чрезъ лучеиспусканіе и чрезъ теплопроводность стекла; для психрометра № 212 и 212' послѣднее, очевидно, сравнительно гораздо больше, что могло зависѣть отъ гораздо большей толщины термометра возлѣ шарика при той же приблизительно (если не меньшей) испаряющей поверхности. Если термометрическій сосудъ представляетъ достаточно длинный цилиндръ, то e' и C_1 мало отличны отъ нуля.

Обращаясь къ величинѣ β, насъ особенно интересующей, мы находимъ для нея и для $\frac{K}{D}$ слѣдующія среднія значенія:

$$\beta=0{,}0006167 \text{ и } \frac{K}{D}=0{,}000298.$$

Величины эти представляютъ вполнѣ удовлетворительное согласіе съ найденными выше изъ опытовъ надъ испареніемъ съ батистовыхъ цилиндровъ.

§ 7. Выше нами было принято, какъ одно изъ основаній нашихъ выводовъ, допущеніе, что упругость пара вблизи испаряющей поверхности равна упругости пара насыщеннаго; насколько вѣрно

это допущеніе, въ настоящее время точно сказать мы не можемъ; можно только утверждать въ виду предстоящихъ опытовъ, что оно не представляетъ сколько нибудь грубаго отклоненія отъ дѣйствительности. Переходя отъ воды ко льду, можно спросить въ такой ли же мѣрѣ это допущеніе вѣрно и здѣсь, или нѣтъ? Что касается другихъ допущеній и всѣхъ вообще выше изложенныхъ соображеній, то они имѣютъ мѣсто въ случаѣ льда съ такимъ-же правомъ, какъ и въ случаѣ воды.

Наблюденій надъ испареніемъ льда, которыя могли бы дать намъ сколько нибудь заслуживающій довѣрія отвѣтъ на нашъ вопросъ, нѣтъ. Сравненія психрометра въ случаѣ, когда влажный термометръ покрытъ слоемъ льда, съ показаніями другихъ термометровъ едва-ли могутъ быть пригодны для этой цѣли, вслѣдствіе малой точности.

Для опредѣленія разности между испареніемъ воды и льда нами былъ употребленъ слѣдующій простой пріемъ. Оба термометра психрометра съ вентиляторомъ (термометры Фусса №№ 383 и 383* и вентиляторъ Гаслера тѣже, что и выше) покрывались батистомъ, по возможности однообразно, и оба смачивались водой; такъ какъ вода на термометрахъ, какъ показали наблюденія, легко можетъ быть перестуженной почти до —5°, то на одномъ изъ нихъ она оставлялась въ перестуженномъ состояніи, а на другомъ замораживалась. Затѣмъ, убѣдившись въ стаціонарности термометровъ, производили рядъ послѣдовательныхъ отсчетовъ ихъ помощію теодолита, помѣщеннаго на разстояніи въ нѣсколько метровъ; далѣе, оба термометра или покрывались льдомъ, или оставались смоченными перестуженной водой и снова сравнивались. Эти послѣднія сравненія давали возможность видѣть вліяніе разности лучеиспусканія окружающихъ предметовъ на показанія термометровъ, а перемѣна ихъ мѣстами позволяла исключить разность ихъ поправокъ на нормальный термометръ; небольшія неточности абсолютной величины поправокъ имѣютъ здѣсь слишкомъ мало значенія. Вліяніе случайныхъ причинъ, какъ показали наблюденія, видоизмѣняло разность между показаніями термометровъ въ среднемъ изъ нѣсколькихъ отсчетовъ не болѣе $\pm 0^\circ,02$. Вліяніе мѣста (наблюденія производились въ нетопленной комнатѣ; одинъ термометръ былъ обращенъ къ окну, другой—внутрь

комнаты) выразилось тоже въ разности около 0°,02: болѣе холодный былъ обращенъ къ окну. Такъ какъ распредѣленіе льда по батисту не можетъ, подобно водѣ, постоянно выравниваться путемъ капилярности, то исчезаніе льда на навѣтренной сторонѣ термометра происходитъ въ случаѣ значительной сухости воздуха очень быстро, почему необходимо, чтобы слой льда былъ довольно толстъ (у меня обыкновено не болѣе 1 mm.); послѣ наблюденія производился внимательный осмотръ термометра, чтобы убѣдиться, былъ-ли онъ покрытъ непрерывнымъ слоемъ льда.

Слѣдующая таблица содержитъ результаты этихъ наблюденій.

t—температура воздуха; она опредѣлялась при наблюденіяхъ нѣсколько разъ и затѣмъ бралась средняя величина; небольшія неточности t не имѣютъ здѣсь почти никакого значенія.

t' и t'_1 — температуры термометровъ съ перестуженной водой и льдомъ.

p_0 и p'_0—влажность воздуха, вычисленная по показаніямъ термометровъ съ водой и льдомъ.

$\triangle p'_1 = p'_0 - p_0$.

При вычисленіи влажности воздуха по показаніямъ термометра съ водой принималось $A=0,000743$, т.-е. то же, что и при $t'>0°$. При вычисленіи по показаніямъ термометра со льдомъ A полагалось равнымъ 0,000656, т.-е. на 11,65% меньше, такъ какъ именно въ такомъ отношеніи мѣняется скрытая теплота испаренія при переходѣ отъ воды ко льду при 0°. Небольшія неточности величины A здѣсь не имѣютъ значенія, лишь бы отношеніе между величинами A, принятыми въ случаѣ воды и льда, было тоже.

ТАБЛИЦА № VI.

t	t' вода.	t'_1 ледъ.	$t-t'$ вода.	$t-t'_1$ вода.	p_1 вода.	p'_1 ледъ.	$A(t-t')(P-p_1)$. вода.	$A(t-t'_1)(P-p'_1)$. ледъ.	P	p_0 вода.	p'_0 ледъ.	$\triangle p'_1$
	°	°			mm	mm	mm	mm	mm	mm		mm
+0,7	—3,80	—3,87	4°,50	4°,57	3,42	3,40	2,54	2,28	763,5	0,88	1,12	0,24
—	3,71	3,81	4,41	4,51	3,44	3,42	2,49	2,25	—	0,95	1,17	0,22
—	3,85	3,93	4,55	4,63	3,41	3,38	2,57	2,31	—	0,84	1,07	0,23
—	3,84	3,91	4,54	4,61	3,41	3,39	2,56	2,30	—	0,85	1,09	0,24
+0,6	3,21	3,32	3,81	3,92	3,58	3,55	2,15	1,95	763,3	1,43	1,60	0,17
—	3,09	3,25	3,69	3,85	3,61	3,57	2,08	1,92	—	1,53	1,65	0,12
—	3,22	3,38	3,82	3,98	3,58	3,54	2,16	1,99	—	1,42	1,55	0,13
—0,1	4,34	4,41	4,44	4,51	3,27	3,26	2,52	2,27	768,1	0,75	0,99	0,24
+4,3	1,36	1,71	5,66	6,01	4,14	4,03	3,16	2,96	754,8	0,98	1,07	0,09
—	1,20	1,50	5,50	5,80	4,19	4,09	3,07	2,86	—	1,12	1,23	0,11
—	0,95	1,31	5,25	5,61	4,27	4,16	2,93	2,76	—	1,34	1,40	0,06
+4,4	0,65	0,87	5,05	5,27	4,38	4,30	2,79	2,57	747,3	1,59	1,73	0,14
—	0,72	1,02	5,12	5,42	4,35	4,25	2,83	2,64	—	1,52	1,61	0,09
—	0,69	0,97	5,09	5,37	4,36	4,26	2,81	2,62	—	1,55	1,64	0,09
—	0,48	0,76	4,88	5,16	4,43	4,34	2,69	2,52	—	1,74	1,82	0,08
—	0,74	1,03	5,14	5,43	4,34	4,24	2,84	2,65	—	1,50	1,59	0,09
—	0,58	0,88	4,98	5,28	4,40	4,30	2,75	2,57	—	1,65	1,73	0,08

Такъ какъ въ формулѣ психрометра членъ, содержащій A, долженъ мѣняться при переходѣ отъ воды ко льду только въ зависимости отъ измѣненія скрытой теплоты испаренія, что нами принято во вниманіе; то разница во влажности, находимой помощію психрометра въ случаѣ воды и льда, можетъ зависѣть только отъ погрѣшности въ величинѣ p'_1, упругости пара вблизи поверхности льда, именно отъ погрѣшности предположенія, что паръ вблизи поверхности льда находится въ состояніи насыщенія. Такимъ образомъ величина $\Delta p_1'$ показываетъ насколько паръ возлѣ поверхности льда отличается отъ состоянія полнаго насыщенія.

Величина $\Delta p'_1$ при первыхъ сравненіяхъ имѣетъ гораздо большее значеніе, чѣмъ при послѣднихъ; причина этого лежитъ, по всей вѣроятности, въ обстоятельствѣ, на которое въ началѣ не было обращено надлежащее вниманіе, именно въ томъ, что ледъ выше термометрическаго сосуда по краю батиста быстро сохъ и часть батиста во время наблюденія обнажалась отъ льда, почему количество тепла, притекающаго по стеклу непосредственно къ шарику, должно было возрастать. При послѣднихъ 9-ти наблюденіяхъ къ устраненію этого обстоятельства принимались мѣры,— особенно при двухъ послѣднихъ, когда вся часть термометра выше шарика была покрыта батистомъ, у одного термометра влажнымъ, у другаго—покрытымъ слоемъ льда. Поэтому послѣднія девять наблюденій заслуживаютъ бóльшаго довѣрія, чѣмъ первыя; изъ нихъ слѣдуетъ

$$\Delta p'_1 = 0,^{mm}09 \text{ при } p'_1 - p_0 = 2,^{mm}68.$$

Количество пара M, поднимающееся съ испаряющей поверхности, конечно зависитъ отъ разности Δp между дѣйствительной упругостью пара и упругостью пара насыщеннаго и, какъ первое приближеніе, можетъ быть принято пропорціональнымъ этой разности: $M = N. \Delta p$. Коэффиціенту пропорціональности N, т.-е. отношенію M къ Δp, *Стефанъ* [1]) даетъ названіе коэффиціента испаренія.

Коэффиціентъ испаренія въ настоящее время неизвѣстенъ, даже приблизительно, ни для какого тѣла; для воды нами выше предположено, что N весьма великъ.

[1]) Sitzungsber. d. Wien. Akad., Naturw. Cl. II Abth., Bd. 68, S. 408.

Не имѣя прямыхъ наблюденій надъ количествомъ испарявшагося льда въ нашихъ опытахъ, мы можемъ однако приблизительно судить о немъ по таблицѣ № I; изъ этой таблицы мы узнаемъ, что съ поверхности нашихъ цилиндровъ при той же скорости вѣтра (полож. № 0), но при температурѣ около $+20^\circ$, испаряется въ 1 сек. съ 1 □ cm. количество воды, которое, будучи приведено къ $p_1 - p_0 = 1$, равно въ среднемъ:

$$31 \times 10^{-7} \text{ и } 37 \times 10^{-7}.$$

Имѣя въ виду малость измѣненія величины коэффиціента диффузіи, можно думать, что съ нашихъ цилиндровъ при 0° испарилось бы приблизительно тоже количество воды; скорость же испаренія съ шариковъ (діаметръ около 9 mm.) едва ли много будетъ отличаться отъ скорости испаренія съ нашихъ цилиндровъ. Такимъ образомъ принимая $M = 34 \times 10^{-7}$ при $p_1 - p_0 = 1$, мы получаемъ возможность найти N для льда:

$$N = 0{,}00010.$$

Цифра эта имѣетъ, конечно, значеніе только приблизительное и указываетъ намъ, по крайней мѣрѣ, порядокъ величины N.

Чтобы имѣть согласіе между p_0 и p'_0, судя по послѣднимъ 9-ти наблюденіямъ, мы должны при переходѣ отъ воды ко льду измѣнять величину A не болѣе, какъ на $\frac{1}{12}$, а не на $11{,}65\%$, какъ мы дѣлали, имѣя въ виду измѣненіе скрытой теплоты испаренія.

ГЛАВА III.

§ 1. Теперь обратимся къ сравненіямъ психрометра съ гигрометрами, которыя могутъ служить въ извѣстной степени подтвержденіемъ нашихъ теоретическихъ заключеній о свойствахъ A, малой зависимости его отъ температуры и влажности.

При этихъ сравненіяхъ употреблялся вышеупомянутый итальянскій психрометръ съ вентиляторомъ; гигрометры же, взятые для сравненія, были объемный гигрометръ *Швакгёфера* (Schwackhöfer) [1]) и сгустительный гигрометръ въ томъ видѣ, какой ему придалъ *Аллюаръ* (Alluard) [2]).

Относительно гигрометра *Швакгёфера* замѣтимъ прежде всего, что формула, данная для него профессоромъ *Ханномъ* (Hann), не полна, такъ какъ не принято во вниманіе измѣненіе барометра въ промежутокъ времени между запираніемъ воздуха въ гигрометрѣ и измѣреніемъ объема воздуха послѣ высушиванія его, вслѣдствіе чего при нижеприведенныхъ измѣреніяхъ нерѣдко могла быть погрѣшность $>0{,}1$ mm.. Поэтому мы выведемъ новую формулу для этого гигрометра, принимая во вниманіе и указанное обстоятельство.

Пусть V, t и H означаютъ объемъ запертаго въ гигрометрѣ воздуха, его температуру и давленіе, равное атмосферному давленію; V_1, t_1, H_1—то же самое, но послѣ высушиванія воздуха. Если бы температура и давленіе во второмъ случаѣ были тѣ же, что и въ первомъ, то объемъ былъ бы не V_1, а $V_1 \cdot \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} \cdot \frac{H_1}{H}$, гдѣ α— коэффиціентъ расширенія воздуха. Если бы послѣ высу-

[1]) Zeitschrift d. Oesterreichischen Gesellsсhaft für Meteorologie. 1878. S. 241.

[2]) Ibid. S. 16.

шиванія объемъ воздуха оставался прежній, то давленіе его было бы $H - p_0$, гдѣ p_0 — упругость пара въ воздухѣ; но, будучи приведенъ къ прежнему давленію, воздухъ занимаетъ объемъ

$$V_1 \cdot \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} \cdot \frac{H_1}{H},$$

слѣдовательно

$$V_1 \cdot \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} \cdot \frac{H_1}{H} : V = H - p_0 : H;$$

откуда

$$p_0 = \frac{H \cdot V - H_1 V_1 \cdot \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}}{V} = \frac{H_1}{V}\left(V - V_1 \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}\right) - \Delta H,$$

если

$$H_1 = H + \Delta H.$$

Прибавляя къ числителю $+ H_1 V_1 - H_1 V_1$, имѣемъ

$$p_0 = H_1 \left\{ \frac{\Delta V}{V} + \frac{V_1}{V}\left(1 - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}\right) \right\} - \Delta H, \text{ если } V - V_1 = \Delta V.$$

Примемъ $\frac{V_1}{V}$ за единицу, что можно сдѣлать вслѣдствіе малости ΔV и $1 - \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1}$; тогда

$$p_0 = H_1 \left\{ \frac{\Delta V}{V} + \frac{\alpha(t_1 - t)}{1+\alpha t_1} \right\} - \Delta H.$$

Если $\frac{\Delta V}{V}$ дано въ % величины V $\left(\text{такъ что } 100\,\frac{\Delta V}{V} = \partial V\right)$, то

$$p_0 = \frac{H_1}{100} \left\{ \partial V + 100\,\frac{\alpha(t_1 - t)}{1+\alpha t_1} \right\} - \Delta H.$$

Такъ какъ въ теченіе измѣренія давленіе атмосферы измѣняется мало (при нижеприведенныхъ сравненіяхъ обыкновенно

не болѣе 0,1 mm.), то въ первомъ членѣ величина H_1 можетъ быть замѣнена чрезъ H, но величиной ΔH при точныхъ измѣреніяхъ пренебрегать нельзя. Точно то же нужно сказать и о знаменателѣ $1+\alpha t_1$: полагать его равнымъ единицѣ нельзя, если $t_1-t>0^\circ,1$, какъ это было постоянно при нашихъ сравненіяхъ.

Помѣщенная ниже таблица показываетъ, какова точность объемнаго гигрометра и какъ велико должно быть число перегонокъ воздуха въ сосудъ съ сѣрною кислотой для того, чтобы воздухъ былъ достаточно высушенъ: именно, она даетъ уменьшеніе упругости воздуха (на p_1 и p mm.) послѣ 3-хъ и 6-ти перегонокъ.

ТАБЛИЦА № VII.

послѣ		Разность	Отклоненіе
3-хъ перег. p_1	6-ти перег. p	$p-p_1$	отъ средней.
mm.	mm.	mm.	mm.
3,76	3,85	+0,09	+0,01
3,65	3,76	+0,11	+0,03
3,54	3,69	+0,15	+0,07
3,71	3,81	+0,10	+0,02
3,77	3,77	0,00	—0,08
3,68	3,77	+0,09	+0,01
3,48	3,61	+0,13	+0,05
3,40	3,45	+0,05	—0,03
3,09	3,17	+0,08	0,00
3,43	3,43	0,00	—0,08
		Средн. +0,080	
		±0,011	

Такимъ образомъ послѣ 3-хъ перегонокъ на долю послѣдующихъ 3-хъ приходится все еще 0,08 mm.; послѣ 6-ти перегонокъ воздухъ, вѣроятно, содержитъ еще нѣкоторое количество пара. Изъ предъидущей таблицы слѣдуетъ, что вѣроятная погрѣшность при каждомъ отдѣльномъ опредѣленіи разности p_1-p равна $\pm0,033$ mm.; слѣдовательно вѣроятная погрѣшность при каж-

домъ опредѣленіи p помощію этого прибора у насъ была $= \pm \frac{0,033}{\sqrt{2}} = \pm 0,024$ [1]).

§ 2. Помѣщенныя въ слѣдующей таблицѣ № VIII наблюденія произведены были въ залѣ Главной Физической Обсерваторіи въ С.-Петербургѣ. Итальянскій психрометръ стоялъ рядомъ съ объемнымъ гигрометромъ и къ нему шла отъ послѣдняго стеклянная трубка (около 1 метра). Воздухъ раза три насасывался въ гигрометръ чрезъ эту трубку и выгонялся чрезъ другой выходъ, послѣ четвертаго раза дѣлалось опредѣленіе влажности послѣ 6-ти перегонокъ; психрометръ отсчитывался передъ и послѣ послѣдняго насасыванія и былъ защищенъ отъ наблюдателя полуцилиндрическимъ желѣзнымъ листомъ. Влажность воздуха, по показаніямъ психрометра, вычислена по формулѣ

$$p_0 = p_1 - A(t - t')(P - p_1),$$

полагая $A = 0,000725$.

Разность между психрометромъ и объемнымъ гигрометромъ колеблется между $+0,28$ и $-0,10$. Вѣроятное отклоненіе отъ средней разности $+0,065$ при отдѣльныхъ сравненіяхъ равно $\pm 0,065$ mm., что составляетъ въ относительной влажности при данныхъ температурахъ около $\pm 0,4\%$.

[1]) Если принять во вниманіе вышеприведенную таблицу, то врядъ ли можно считать справедливымъ мнѣніе *Эдельмана* (Zeitschrift d. Oesterreich. Gesellsch. für Meteorologie. Bd. XIV, S. 54) и *Рюдорфа* (ibid. Bd. XV, S. 167), что въ теченіе нѣсколькихъ минутъ, 5 или 6, воздухъ въ ихъ гигрометрахъ высушивается вполнѣ, т.-е. до сотыхъ долей mm.; для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, необходимо было бы сдѣлать нѣсколько сравненій ихъ гигрометровъ съ гигрометромъ, основаннымъ на другомъ принципѣ, напр. со сгустительнымъ гигрометромъ. Что же касается до гигрометра г. *Матерна* (*Wiedem.* Annalen, Bd. 9, S. 147), то мы укажемъ на наблюденія *Реньйо* надъ упругостью пара въ атмосферномъ воздухѣ и азотѣ (Ann. de Chim. et de Phys. 3-e série. T. XV, p. 130): полученная имъ упругость пара меньше въ воздухѣ отъ 0,1 до 0,8 mm., чѣмъ въ пустотѣ; эта разность и значительныя колебанія ея во всякомъ случаѣ указываютъ на трудность имѣть воздухъ, вполнѣ насыщенный парами, если даже онъ находится въ соприкосновеніи съ водой сравнительно продолжительное время, а не нѣсколько минутъ.

ТАБЛИЦА № VIII.

Итальянскій психрометръ.					Объемн. гигром.		
Барометръ	Сухой термом.	Влажный термом.	Разность	Абсолют. влажн.	Абсолют. влажн.	Относ. влажн.	Разность.
P	t	t'	$t-t'$	p_0	p'_0	$\%$	$p_0-p'_0$
mm.	°	°	°	mm.	mm.		mm.
763	+18,89	+9,64	9,25	3,89	3,85	24,0	+0,04
—	18,89	9,59	9,30	3,84	3,76	23,6	+0,08
759	18,35	9,29	9,06	3,81	3,69	23,9	+0,12
—	18,25	9,24	9,01	3,81	3,81	24,3	0,00
—	18,26	9,19	9,07	3,75	3,77	24,2	—0,02
755	18,28	9,24	9,04	3,82	3,77	24,2	+0,05
756	18,25	9,07	9,18	3,63	3,61	23,1	+0,02
—	18,23	9,03	9,20	3,60	3,45	21,7	+0,15
—	18,20	8,88	9,32	3,45	3,17	20,3	+0,28
—	17,86	8,71	9,15	3,44	3,43	22,3	+0,01
—	17,84	8,67	9,17	3,41	3,51	22,8	—0,10
—	17,96	8,75	9,21	3,42	3,30	21,4	+0,12
							+0,065

При сравненіяхъ, помѣщенныхъ въ слѣдующей таблицѣ № IX, объемный гигрометръ былъ установленъ въ магнитной обсерваторіи у окна выходящаго въ пристройку, предназначенную для метеорологическихъ аппаратовъ и состоящую съ боковъ изъ жалюзи, а сверху изъ кровли, не доходящей до стѣны дома. Трубка отъ гигрометра была проведена сквозь раму наружу; емкость ея была немногимъ развѣ болѣе ½ объема запираемаго въ гигрометрѣ воздуха. Итальянскій психрометръ устанавливался не далеко отъ конца трубки и отсчитывался издали помощію зрительной трубы; отсчетъ его дѣлался передъ и послѣ окончательнаго (4-го или 5-го) насасыванія воздуха въ гигрометръ. Стеклянная трубка передъ началомъ наблюденій протиралась ватой на проволокѣ, а по окончаніи затыкалась. Всѣ сравненія были сдѣланы съ итальянскимъ психрометромъ, кромѣ трехъ послѣднихъ, при которыхъ употреблялся психрометръ, установленный въ клѣткѣ

системы *Вильда*; въ нижней части эта клѣтка въ отличіе отъ обыкновенно-употребляемыхъ имѣетъ вентиляторъ съ кривыми лопатками, который приводился въ движеніе помощію шнурка и небольшаго шкива, утвержденнаго на разстояніи 2-хъ метровъ отъ клѣтки [1]); вентиляторъ приводился въ движеніе съ возможной быстротой передъ наблюденіемъ $1\frac{1}{2}$ минуты и во время наблюденія. Отсчетъ этого психрометра производился чрезъ окно трубой.

Вѣроятное отклоненіе разности между психрометромъ и объемнымъ гигрометромъ при отдѣльномъ сравненіи отъ средней разности $+0,086$ mm. равно $\pm0,081$, что составляетъ въ относительной влажности $\pm1,6\%$ при температурѣ около 1°, $\pm0,9\%$— при 10° и $\pm0,5\%$—при 20°. Наблюденія здѣсь согласуются нѣсколько менѣе, чѣмъ въ предыдущей таблицѣ, потому что воздухъ наружный постоянно подверженъ болѣе быстрымъ и неправильнымъ измѣненіямъ влажности, чѣмъ комнатный.

Слѣдующая затѣмъ таблица № X содержитъ сравненія психрометра со сгустительнымъ гигрометромъ. Наблюденія производились въ упомянутой выше пристройкѣ. Психрометръ и гигрометръ ставились рядомъ и отсчитывались издали трубой; наружный вѣтеръ здѣсь могъ имѣть вліяніе на психрометръ, чего почти не было въ предъидущемъ случаѣ. Наиболѣе сильный вѣтеръ со стороны мало защищенной былъ при наблюденіяхъ, соотвѣтствующихъ давленію въ 756 mm. и 766 mm., когда анемометръ на башнѣ показывалъ около 6 метровъ въ 1 сек.; внизу вѣтеръ былъ, конечно, по крайней мѣрѣ раза въ 2 слабѣе. При остальныхъ наблюденіяхъ скорость вѣтра была на башнѣ отъ 4 до 3 м. и частію со стороны совершенно защищенной.

Вѣроятная разность между психрометромъ при отдѣльныхъ наблюденіяхъ была $\pm0,070$ mm., что составляетъ въ относительной влажности $\pm0,4\%$ при $+20^\circ$, около $\pm0,8\%$ при $+10^\circ$ и $\pm1,4\%$ при $+1^\circ$; наибольшія разности достигаютъ при низшихъ температурахъ 3%, а при болѣе высокихъ около 2%.

[1]) Метеорологическій Сборникъ, томъ VI, № 9.

ТАБЛИЦА № IX.

Психрометръ.					Объемн. гигром.		
Баро-метр.	Сухой термом.	Влажный термом.	Раз-ность.	Абсолют. влажн.	Абсолют. влажн.	Относит. влажн.	Разность.
P	t	t'	$t-t'$	p_0	p'_0	%	p_0-p_0'
mm.	°		°	mm.	mm.		mm.
759	+22,79	+16,82	5,97	11,01	10,81	52,5	+0,20
—	21,60	15,99	5,61	10,49	10,47	55,0	+0,02
752	16,20	10,45	5,75	6,33	6,05	44,3	+0,28
—	15,61	9,79	5,82	5,91	5,97	45,6	—0,06
—	15,23	9,87	5,56	6,19	6,03	47,0	+0,16
—	14,71	9,61	5,10	6,18	6,07	49,5	+0,11
753	12,23	8,09	4,4	5,82	5,79	54,6	+0,03
752	11,37	7,57	3,80	5,73	5,66	56,6	+0,07
—	10,90	7,78	3,12	6,21	5,91	61,1	+0,30
—	10,72	7,91	2,81	6,44	6,55	68,4	—0,11
750	9,66	6,16	3,50	5,18	5,06	56,0	+0,12
—	9,06	6,17	2,89	5,52	5,45	62,9	+0,07
—	8,36	5,50	2,86	5,22	5,11	62,1	+0,11
751	8,23	5,62	2,61	5,41	5,26	64,5	+0,15
765	6,73	3,01	3,72	3,64	3,78	51,6	—0,14
—	5,97	2,89	3,08	3,95	3,77	54,4	+0,18
763	5,91	2,85	3,06	3,95	4,05	58,0	—0,10
—	5,48	2,64	2,84	3,98	3,86	57,4	+0,12
765	5,05	2,57	2,48	4,16	4,03	61,6	+0,13
763	4,21	0,79	3,42	2,99	3,17	51,5	—0,18
—	4,17	1,06	3,11	3,25	3,16	51,4	+0,09
—	4,01	1,42	2,59	3,67	3,76	62,0	—0,09
—	3,25	2,07	1,18	4,68	4,55	79,0	+0,13
—	3,00	1,07	1,93	3,91	3,77	66,8	+0,14
—	2,59	1,71	0,88	4,71	4,56	81,2	+0,15
762	2,47	1,67	0,80	4,74	4,57	81,4	+0,17
754	2,27	0,90	1,37	4,17	4,02	74,6	+0,15
—	2,19	0,76	1,43	4,08	3,85	72,0	+0,23
—	1,10	0,04	1,06	4,03	3,97	80,4	+0,06
							+0,086

ТАБЛИЦА № X.

Психрометръ.					Сгустительный гигр.			Разность.
Бaром.	Сухой термом.	Влажный термомет.	Разность.	Абсол. влажн.	Точка росы.	Абсол. влажн.	Относ. влажн.	
P	t	t'	$t-t'$	p_0	t''	p'_0	%	p_0-p_0'
mm	°	°		mm	°	mm		mm
771	+21,40	+12,52	8,88	5,91	+3,72	5,98	31,4	—0,07
760	17,77	10,88	6,89	5,96	+3,52	5,90	39,0	+0,06
—	17,48	10,79	6,69	6,01	+3,92	6,07	41,1	—0,06
—	16,92	10,42	6,50	5,87	+3,32	5,82	40,5	+0,05
756	13,79	9,88	3,91	6,97	+6,13	7,06	61,3	—0,22
—	13,35	9,43	3,92	6,70	+5,72	6,86	59,8	—0,05
—	13,49	9,68	3,81	6,91	+6,13	7,06	61,1	—0,09
—	13,59	9,83	3,76	7,02	+6,03	7,01	61,1	+0,03
—	13,20	9,68	3,52	7,06	+6,23	7,11	65,3	—0,08
—	12,30	9,20	3,10	7,00				
—	11,71	8,81	2,90	6,89	+5,62	6,82	65,6	+0,20
—	12,21	9,28	2,93	7,14				
752	12,72	9,14	3,58	6,72	+5,40	6,72	61,2	0,00
—	12,58	9,25	3,33	6,92	+5,64	6,83	62,5	+0,09
—	12,37	9,05	3,32	6,80	+5,65	6,83	63,6	—0,03
—	12,23	9,30	2,93	7,16	+6,15	7,07	66,4	+0,09
—	12,13	9,00	3,13	6,87	+6,07	7,03	66,5	—0,16
—	11,91	9,39	2,52	7,44	+6,80	7,38	81,0	+0,06
763	3,92	0,53	3,39	2,92	—5,77	2,93	48,4	+0,02
—	3,92	0,59	3,33	2,97				
761	3,16	0,47	2,69	3,28	—4,45	3,25	57,0	+0,03
—	2,97	0,35	2,62	3,28	—4,96	3,12	54,4	+0,16
—	2,71	0,05	2,66	3,16	—4,85	3,15	56,0	+0,01
—	2,71	0,03	2,68	3,14	—4,95	3,12	55,4	+0,02
766	1,94	0,41	1,53	3,89	—1,97	3,94	75,8	—0,10
—	1,81	0,21	1,60	3,79				
761	1,74	0,30	1,44	3,91	—2,66	3,73	71,8	+0,18
—	1,61	0,36	1,25	4,03	—1,27	4,17	81,4	—0,14
								0,00

Величина, принятая нами для *A*, 0,000725, выбрана такъ, чтобы показанія психрометра и сгустительнаго гигрометра между собой согласовались; но если принять во вниманіе указанное выше обстоятельство, на которое обратилъ вниманіе *Крова*, именно, свойство гигрометра давать при вѣтрѣ температуру, низшую дѣйствительной точки росы, и слѣдовательно меньшую влажность воздуха, то слѣдуетъ признать, что принятая нами для *A* величина быть можетъ нѣсколько велика, но никакъ не мала. Правда, наружный вѣтеръ долженъ влiять и на психрометръ, но до тѣхъ поръ, пока онъ слабъ, вліяніе его сводится почти къ нулю, такъ какъ по направленію своему иногда онъ можетъ совпадать съ вѣтромъ, производимымъ вентиляторомъ, и усиливать его, иногда же можетъ быть противоположнымъ ему и ослаблять скорость движенія воздуха возлѣ влажнаго термометра; только въ случаѣ значительной скорости наружный вѣтеръ будетъ измѣнять величину *A*, какъ это показываютъ нижеприведенныя сравненія (табл. XI).

ТАБЛИЦА № XI.

Итальянскій психрометръ					Сгустительный гигр.			Разность.		Скорость и направл. вѣтра.
Бар.	Сухой терм.	Влажн. терм.	Разность	Абсол. влаж.	Точка росы.	Абсол. влаж.	Относ. влаж.			
P	t	t'	$t-t'$	p_0	t''	p'_0	%	p_0-p_0'	%	
mm	°	°	°	mm	°	mm		mm		
752	+12,03	+7,73	4,30	5,55	+2,94	5,66	54,0	−0,11	−1,0	WNW 10
—	12,15	7,93	4,22	5,69	3,72	5,98	56,7	−0,29	−2,8	
—	12,47	8,25	4,22	5,87	4,07	6,12	56,8	−0,25	−2,3	
761	11,80	8,00	3,80	5,94	4,12	6,14	59,6	−0,20	−1,9	WNW 9
—	11,53	7,94	3,59	6,02	4,87	6,47	63,9	−0,45	−4,5	
—	11,74	8,00	3,74	5,97	4,24	6,20	60,4	−0,23	−2,2	
—	12,50	8,27	4,23	5,85	3,67	5,96	55,2	−0,11	−1,0	
—	12,46	7,98	4,48	5,55	3,22	5,78	53,7	−0,23	−2,1	
—	12,83	8,17	4,66	5,56	3,12	5,74	52,1	−0,18	−1,6	
—	12,85	8,15	4,70	5,52	3,22	5,78	52,4	−0,26	−2,4	
—	12,93	8,02	4,91	5,34	3,12	5,74	51,7	−0,40	−3,6	
								−0,25	−2,3	

При этихъ сравненіяхъ вѣтеръ имѣлъ свободный доступъ къ мѣсту наблюденія и дулъ возлѣ приборовъ со скоростью, вѣроятно, около 5 метровъ въ 1 сек. (данныя въ таблицѣ скорости суть показанія анемометра на башнѣ). Чтобы достигнуть согласія между психрометромъ и гигрометромъ, здѣсь слѣдовало бы принять для A величину 0,000650 вмѣсто 0,000725. Въ дѣйствительности измѣненіе величины A, вѣроятно, было больше, такъ какъ найденная нами точка росы была вслѣдствіе вѣтра ниже дѣйствительной.

Что касается до разности между психрометромъ и объемнымъ гигрометромъ, то здѣсь мы находимся въ неизвѣстности, какое количество пара при нашихъ наблюденіяхъ могло оставаться въ гигрометрѣ. Если для A принять величину нѣсколько меньшую, напр. 0,000720, то разности въ таблицахъ № VIII и № IX будутъ одинаковы, именно около 0,10 mm.; весьма возможно, что именно это количество пара все-еще оставалось въ гигрометрѣ и послѣ 6-ти перегонокъ.

Во всякомъ случаѣ, при изученіи свойствъ психрометра черезъ сравненія съ другими гигрометрами, необходимо считаться и съ тѣми погрѣшностями, которыя могутъ содержать послѣднія, а не принимать ихъ за непогрѣшимыя, какъ это обыкновенно дѣлаютъ.

На основаніи приведенныхъ наблюденій мы считаемъ возможнымъ сдѣлать такое заключеніе: *Величина А, если и зависитъ отъ температуры и влажности воздуха, во всякомъ случаѣ подвержена настолько малымъ измѣненіямъ, что на основаніи сравненія психрометра съ другими гигрометрами судить о нихъ едва-ли возможно.*

§ 3. Прежде чѣмъ обращаться къ сравненіямъ, произведеннымъ въ случаѣ покрытія влажнаго термометра льдомъ, приведемъ наблюденія надъ вліяніемъ сильнаго лучеиспусканія окружающихъ предметовъ на показанія психрометра. При этихъ наблюденіяхъ психрометръ помѣщался передъ запертымъ окномъ, обращеннымъ къ югу; черная занавѣска, закрывавшая окно, то поднималась—причемъ солнечные лучи падали одинаково на оба термометра, то опускалась—и психрометръ при равенствѣ прочихъ условій былъ подвергнутъ только лучеиспусканію предметовъ, имѣющихъ температуру приблизительно одинаковую съ температурой воздуха. Слѣдующая таблица содержитъ полученные при подобныхъ на-

блюденіяхъ результаты. При послѣднемъ наблюденіи оба термометра были покрыты батистомъ—одинъ сухимъ, другой влажнымъ.

ТАБЛИЦА № XII.

	p	t	t'	$t-t'$	p_0	%	A
	mm	°	°	°	mm		
Въ тѣни.	750	+24,03	+15,68	8,35	8,68	39,1	0,000743
На солнцѣ.		25,91	16,69	9,22	9,09	36,6	806
Въ тѣни.	746	23,20	16,70	6,50	10,59	50,1	—
На солнцѣ.		24,60	17,39	7,21	10,84	47,2	791
Въ тѣни.	747	26,37	18,05	8,32	10,86	42,6	—
На солнцѣ.		28,24	19,09	9,15	11,45	40,2	831
Въ тѣни.	740	27,34	19,10	8,24	12,00	44,4	—
На солнцѣ.		29,38	20,18	9,20	12,63	41,5	839
Въ тѣни.	752	25,78	17,39	8,39	10,16	41,2	—
На солнцѣ.		27,44	18,11	9,33	10,33	38,0	768

Наблюденія эти производились съ психрометромъ, о которомъ упоминалось въ главѣ II (вентиляторъ Гаслера, термометры Фусса №№ 383 и 383*). Абсолютная влажность p_0 вычислена вездѣ, принимая $A=0,000743$; послѣдній столбецъ, съ надписью A, даетъ величины, которыя необходимо принять для A, чтобы абсолютная влажность, выведенная изъ показаній психрометра на солнцѣ, была таже, что и въ случаѣ психрометра въ тѣни.

Изъ приведенныхъ наблюденій слѣдуетъ, что вліяніе сильнаго лучеиспусканія, при употребленіи одной и той-же величины для A, увеличиваетъ абсолютную влажность и уменьшаетъ относительную. Такимъ образомъ наши наблюденія въ одинаковой мѣрѣ подтверждаютъ справедливость противоположныхъ заключеній *Реньйо* [1]), вычислявшаго обыкновенно относительную влажность,

[1]) Ann. de Chim. et de Phys. T. 37, p. 272.

и *Августа* [1]), вычислявшаго всегда абсолютную влажность. Если показанія сухаго термометра, вслѣдствіе лучеиспусканія окружающихъ предметовъ, выше температуры воздуха на 1°, то необходимо, судя по предъидущимъ наблюденіямъ, увеличить величину A на 0,000041, чтобы показанія психрометра въ абсолютной влажности были правильны.

§ 4. Слѣдующія таблицы № XIV и № XV содержатъ сравненія при $t' < 0°$ между психрометромъ и гигрометрами объемнымъ и сгустительнымъ; въ первомъ случаѣ употреблялся психрометръ въ клѣткѣ, о которомъ упоминалось выше,—кромѣ первыхъ трехъ сравненій, сдѣланныхъ съ итальянскимъ психрометромъ; во второмъ—по преимуществу итальянскій, кромѣ послѣднихъ двухъ, сдѣланныхъ съ психрометромъ въ клѣткѣ. При нижеслѣдующихъ наблюденіяхъ неточность допущенія $1 + \alpha t_1 = 1$ могла бы произвести въ объемномъ гигрометрѣ иногда ошибку болѣе 0,06 mm., такъ какъ температура во время наблюденія иногда (именно каждый разъ при первомъ наблюденіи) поднималась даже болѣе, чѣмъ на 0°,5.

Чтобы опредѣлить величину постояннаго A для психрометра въ клѣткѣ при практиковавшемся нами способѣ наблюденія, было сдѣлано нѣсколько сравненій его съ итальянскимъ психрометромъ (табл. XIII).

[1]) Pogg. Ann., Bd. V, S. 337. 1825.

ТАБЛИЦА № XIII.

Итальянскій психрометръ.					Психрометръ въ клѣткѣ.				Разности.		
Барометръ.	Сухой термом.	Влажн. термом.	Разность	Абсолютная влажность	Сухой термом.	Влажн. термом.	Разность	Абсолютная влажность.			
P	t	t'	$t-t'$	p_0	t_1	t'_1	$t_1-t'_1$	p'_0	$t-t_1$	$t'-t'_1$	$p_0-p'_0$
mm	°	°	°	mm	°	°	°	mm	°	°	mm
760	+20,63	+16,11	4,52	11,08	+20,22	+15,90	4,32	11,02	+0,48	+0,08	—0,16
—	20,77	15,84	4,93	10,63	20,04	15,30	4,74	10,28	+0,63	+0,50	+0,35
—	20,57	15,76	4,81	10,62	20,06	15,80	4,26	10,97	+0,59	+0,01	—0,32
—	20,73	15,86	4,87	10,67							
	Средняя влажность			=10,75				=10,76			—0,04
768	—4,60	—6,46	1,86	1,82	—4,50	—6,25	1,75	1,90	—0,10	—0,21	—0,08
—	4,52	6,64	2,12	1,66	4,82	6,83	2,01	1,64	+0,30	+0,19	+0,02
—	3,19	5,24	2,05	2,02	3,42	5,51	2,09	1,89	+0,23	+0,27	+0,13
—	4,25	6,29	2,04	1,78	4,36	6,29	1,93	1,80	+0,11	+0,00	—0,02
											+0,01

Наблюденія въ этой таблицѣ, при $t'>0^{\circ}$, вычислены для обоихъ психрометровъ съ однимъ и тѣмъ же $A=0,000750$; эта величина A, вмѣсто 0,000725, принята здѣсь для итальянскаго психрометра въ виду того, что температура его сухаго термометра, вслѣдствіе значительнаго лучеиспусканія окружающихъ предметовъ, выше на $0^{\circ},6$ температуры воздуха, которую даетъ сухой термометръ въ клѣткѣ; наблюденія же, приведенныя въ таблицѣ № XIII, какъ мы только что видѣли, убѣждаютъ насъ въ увеличеніи A на 0,000041, если температура сухаго термометра выше на 1° температуры воздуха. Наблюденія приведенной таблицы при $t'<0^{\circ}$ вычислены съ величиной A, равной 0,000665 въ случаѣ итальянскаго психрометра и 0,000690 въ случаѣ психрометра въ клѣткѣ; эти величины приняты нами на основаніи наблюденій, описанныхъ въ главѣ II и доказывающихъ измѣненіе A при переходѣ отъ воды ко льду на $\frac{1}{12}$. Согласіе показаній обоихъ психрометровъ показываетъ, что величина 0,000690, принятая нами для психрометра въ клѣткѣ при $t'<0^{\circ}$, довольно близка къ дѣйствительности; поэтому въ нижеслѣдующихъ таблицахъ принято A равнымъ 0,000690 для этого послѣдняго психрометра и $=0,000665$ для итальянскаго.

Въ таблицѣ №XIV вѣроятное отклоненіе отъ средней разности $+0,15$ mm. между психрометромъ и объемнымъ гигрометромъ при отдѣльныхъ наблюденіяхъ равно $\pm0,054$ mm., или $\pm1,2\%$ въ относительной влажности при 0° и $\pm1,8\%$ при -5°.

Для сравненій со сгустительнымъ гигрометромъ (табл. № XV) вѣроятное отклоненіе отъ средней разности $+0,09$ при отдѣльныхъ наблюденіяхъ равно $\pm0,037$mm. въ абсолютной влажности, или $\pm0,8\%$ въ относительной при 0° и $\pm1,2\%$ при -5°.

Эти сравненія прежде всего показываютъ, подобно сравненіямъ въ таблицахъ № IX и № X, что объемный гигрометръ даетъ меньшую влажность, чѣмъ сгустительный.

ТАБЛИЦА № XIV.

Психрометръ.					Объемный гигр.		Раз-ность
Баром.	Сухой термом.	Влажный термомет.	Раз-ность.	Абсол. влаж.	Абсолют. влажн.	Относ. влаж.	
P	t	t'	$t-t'$	p_0	p_0'	%	p_0-p_0'
mm	0	0	0	mm	mm	mm	mm
763	+2,43	—0,43	2,86	3,01	2,96	55	+0,05
759	+0,77	0,08	0,85	4,14	3,96	81	+0,18
—	+0,21	0,54	0,75	4,03	3,88	83	+0,15
762	+1,67	1,44	3,11	2,48	2,31	45	+0,17
—	+0,07	1,04	1,11	3,66	3,50	76	+0,16
763	—0,57	1,60	1,03	3,52	3,46	78	+0,06
764	1,71	2,22	0,51	3,60	3,31	82	+0,29
763	1,81	2,58	0,77	3,36	3,14	79	+0,22
—	1,85	2,30	0,45	3,60	3,55	89	+0,05
760	2,04	3,75	1,71	2,54	2,51	64	+0,03
—	2,62	4,29	1,67	2,42	2,23	59	+0,19
764	3,32	3,80	0,48	3,17	3,03	86	+0,14
—	4,76	5,02	0,26	2,97	2,83	89	+0,14
761	4,76	5,95	1,19	2,27	2,21	69	+0,06
764	5,51	5,73	0,22	2,82	2,64	88	+0,18
757	6,31	8,11	1,80	1,49	1,41	50	+0,08
—	6,67	8,42	1,75	1,47	1,22	44	+0,25
761	6,84	8,58	1,74	1,44	1,11	41	+0,33
768	7,39	8,92	1,53	1,47	1,36	51	+0,11
760	7,53	8,98	1,45	1,52	1,28	48	+0,24
757	7,58	9,34	1,76	1,29	1,04	41	+0,25
767	8,23	9,52	1,29	1,50	1,34	54	+0,16
760	8,36	9,64	1,28	1,49	1,39	58	+0,10
—	8,79	10,16	1,37	1,36	1,28	50	+0,08
767	10,04	11,04	1,00	1,40	1,32	65	+0,08
							+0,150

На основании сравненій № XIV и № XV прежде нами было сдѣлано заключеніе [1]), что величина A при переходѣ отъ воды ко льду не мѣняетъ своего значенія; но теперь, на основаніи приведенныхъ въ главѣ II-й наблюденій, болѣе прямыхъ и убѣдительныхъ, мы были вынуждены измѣнить этотъ взглядъ, признавши измѣненіе A приблизительно на $^1/_{12}$ долю ея величины. Имѣя въ виду нѣкоторыя спеціальные источники погрѣшностей наблюденія психрометромъ при $t' < 0°$, о которыхъ было упомянуто выше,

[1] Приложеніе къ 40-му тому записокъ Имп. Акад. Наукъ № 6, стр. 19.

мы думаемъ, что разности между психрометромъ и гигрометрами, на сколько онѣ могутъ быть обусловлены неточностью принятыхъ нами значеній *A*,—нѣсколько сотыхъ долей миллиметра,—не такъ велики, чтобы на основаніи ихъ счесть себя въ правѣ дѣлать какія нибудь дальнѣйшія заключенія относительно измѣняемости величины *A* отъ температуры и др. причинъ. Къ тому же въ послѣднемъ случаѣ намъ пришлось неизбѣжно считаться съ возможными небольшими погрѣшностями въ таблицѣ упругости пара *Реньйо*.

ТАБЛИЦА № XV.

Психрометръ.					Сгустительный гигр.			Разность.
Баром.	Сухой терм.	Влажн. термом.	Разность.	Абсол. влажн.	Точка росы.	Абсол. влажн.	Относ. влажн.	
P	t	t'	$t-t'$	p_0	t''	p_0'	%	p_0-p_0'
mm	°	°	°	mm	°	mm		
766	+2,11	—1,26	3,37	2,46	—8,35	2,39	45	+0,09
—	+2,05	1,26	3,31	2,49				
—	+2,31	1,00	3,31	2,57	8,05	2,45	46	+0,05
—	+1,73	1,55	3,28	2,42				
761	+1,91	0,67	2,58	3,07	5,45	3,00	57	+0,07
766	+1,71	1,51	3,22	2,46	9,15	2,25	44	+0,21
—	+1,51	1,64	3,15	2,45				
—	+1,54	0,09	1,63	3,74	2,96	3,65	70	+0,07
—	+1,61	0,09	1,70	3,70				
—	+1,31	0,09	1,40	3,75	2,57	3,76	73	+0,06
—	+1,26	0,09	1,35	3,88				
—	+1,61	1,74	3,35	2,33	9,15	2,25	44	+0,05
—	+1,39	1,93	3,32	2,27				
759	—0,32	1,06	0,74	3,86	2,37	3,82	85	+0,04
—	—0,77	1,61	0,84	3,64	3,16	3,59	83	+0,05
762	—2,38	2,72	0,34	3,54	3,76	3,43	89	+0,11
—	—2,58	2,94	0,36	3,47	4,25	3,30	87	+0,17
								+0,088

ТАБЛИЦА № XVI.

Бар.	Психрометръ безъ вентилятора. Сухой терм.	Влажн. терм.	Разн.	Абсол. влажн.	Относ. влаж.		Психрометръ съ вентиляторомъ. Сухой терм.	Влажн. терм.	Разн.	Абсол. влажн.	Относ. влажн.	Разности.				Направленіе и скорость вѣтра.
p	t_1	t_1'	t_1-t_1'	p_0'	%		t	t'	$t-t'$	p_0	%	$t-t_1$	$t'-t_0'$	p_0-p_0'	%	
mm. 768	— 4°,42	— 5°,97	1°,55	2°,1	64	61,0	— 4°,50	— 6°,25	1°,75	1,91	53,5	—0,08	—0,28	—0,22	—7,5	ESE4
—	— 4,55	— 6,39	1,84	1,9	58		— 4,82	— 6,83	2,01	1,64		—0,27	—0,44			
—	— 3,39	— 5,43	2,04	2,0	56	57,5	— 3,42	— 5,51	2,09	1,89	54,4	—0,03	—0,08	—0,15	—3,1	EtN9
—	— 4,17	— 5,96	1,79	2,0	59		— 4,36	— 6,29	1,93	1,80		—0,19	—0,33			
762	+ 1,60	— 1,23	2,83	2,7	52		+ 1,67	— 1,44	3,11	2,48	47,9	+0,07	—0,21	—0,22	—4,1	NtE7
760	— 2,12	— 3,74	1,62	2,6	66		— 2,04	— 3,75	1,71	2,54	64,6	+0,08	—0,01	—0,1	—1,4	WNW5
—	— 8,86	—10,15	1,29	1,4	60		— 8,79	—10,16	1,37	1,36		+0,07	—0,01			
—	— 8,26	— 9,46	1,20	1,6	65	61,7	— 8,36	— 9,64	1,28	1,49	60,9	—0,10	—0,18	—0,04	—0,8	NNW7
—	— 7,73	— 9,13	1,40	1,5	60		— 7,53	— 8,98	1,45	1,52		+0,20	+0,15			
757	— 7,39	— 8,90	1,51	1,5	58		— 7,58	— 9,34	1,76	1,29		—0,19	—0,44			
—	— 6,47	— 8,15	1,68	1,5	56	58,0	— 6,67	— 8,42	1,75	1,47	52,6	—0,20	—0,27	—0,18	—5,4	NE1
—	— 6,08	— 7,63	1,55	1,8	60		— 6,31	— 8,11	1.80	1,49		—0,23	—0,48			
767	— 9,76	—10,64	0,88	1,5	71		—10,04	—11,04	1,00	1,40		—0,28	—0,40			
—	— 8,36	— 9,53	1,17	1,5	65	65,3	— 8,23	— 9,52	1,29	1,50	63,5	+0,13	+0,01	—0,07	—1,8	WNW5
768	— 7,25	— 8,69	1,44	1,6	60		— 7,39	— 8,92	1,53	1,47		—0,14	—0,23			
771	+15,70	+ 8,86	6,84	4,4	32		+15,69	+ 7,97	7,72	3,57		—0,01	—0,89			
—	16,10	9,53	6,57	4,9	36	33,7	15,89	7,87	8,02	3,35	26,4	—0,21	—1,66	—1,08	—7,3	ENE4
—	16,70	9,68	7,02	4,7	33		16,71	8,75	7,96	3,86		+0,01	—0,93			
767	18,91	13,25	5,66	7,9	48		18,82	12,18	6,64	6,80		—0,09	—1,07			
—	19,60	12,67	6,93	6,7	39	41,0	19,50	11,02	8,48	4,97	32,9	—0,10	—1,65	—1,44	—8,1	SSE4
—	19,77	12,38	7,39	6,2	36		19,74	10,89	8,85	4,69		—0,03	—1,49			
760	15,64	10,05	5,59	5,8	44		15,79	9,49	6,30	5,31		+0,15	—0,56			
—	15,95	10,53	5,59	6,2	46		15,97	10,01	5,96	5,81		+0,02	—0,54			
—	16,34	10,91	5,43	6,5	47	46,3	16,16	10,17	5,99	5,89	42,2	—0,18	—0,74	—0,57	—4,1	NW5
—	16,42	11,15	5,27	6,7	48		16,38	10,29	6,09	5,90		—0,04	—0,86			
744	9,38	7,75	1,63	6,9	79		9,23	7,52	1,71	6,81		—0,15	—0,23			
—	9,22	7,61	1,61	6,8	79	78,3	9,29	7,68	1,61	6,95	78,1	+0,07	+0,07	—0,02	—0,2	WNW6
—	9,10	7,41	1,69	6,7	77		9,09	7,22	1,87	6,57		—0,01	—0,19			

§ 5. Чтобы убѣдиться, на какую точность можно разсчитывать при употребленіи психрометра безъ вентилятора, и каково вліяніе на него наружнаго вѣтра при употребленіи психрометрической клѣтки *Вильда*, нами былъ произведенъ рядъ наблюденій надъ показаніями уже упоминавшагося психрометра въ клѣткѣ, причемъ вентиляторъ, при немъ находящійся, поочередно то оставался въ покоѣ, то приводился въ движеніе. Результаты этихъ наблюденій находятся въ таблицѣ № XVI.

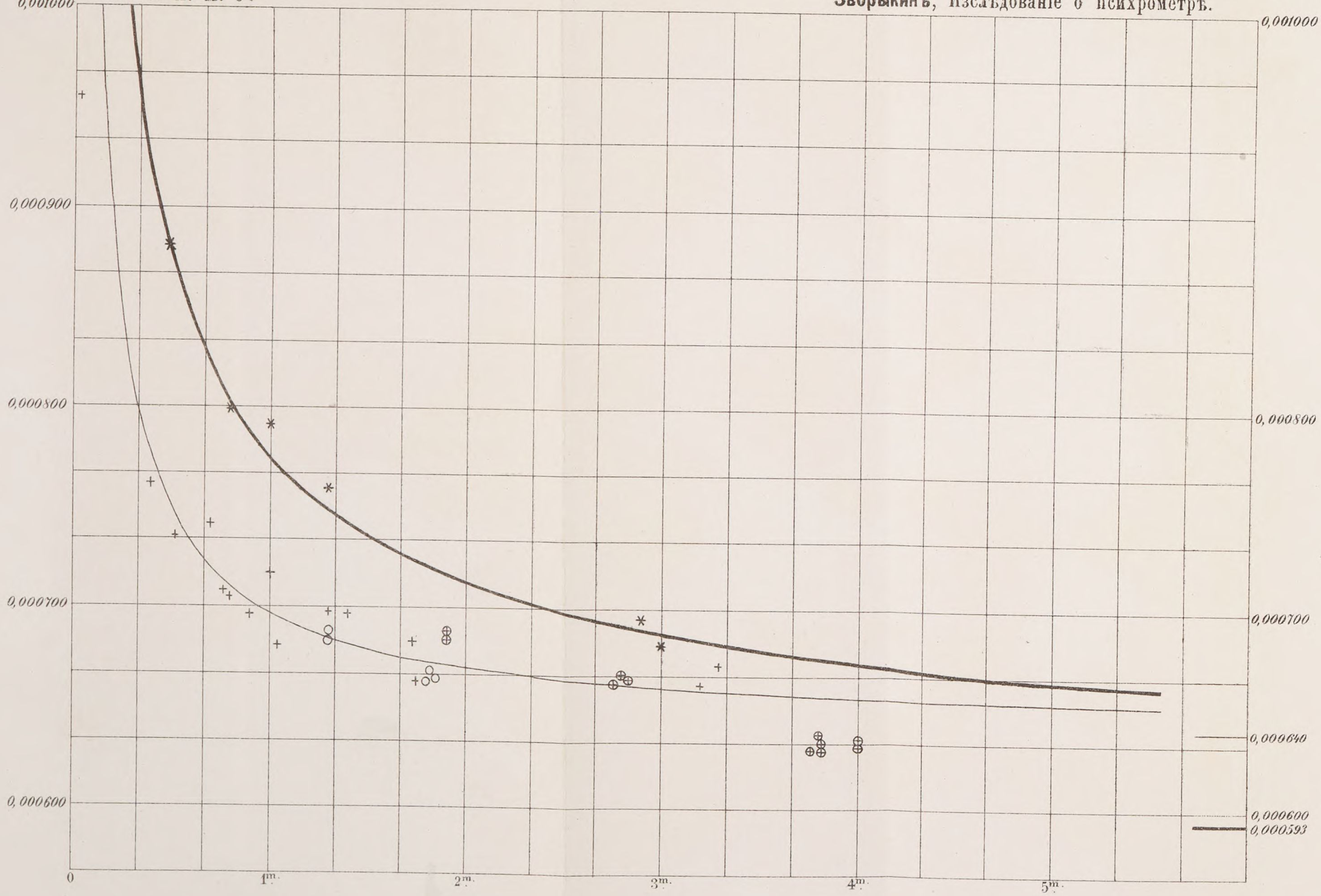
ОБЪЯСНЕНІЕ ЧЕРТЕЖА.

⁎ Наблюденія съ большимъ психрометромъ № 212 и 212′.

+ Наблюденія съ маленькимъ психрометромъ № 7 и 8.

⊕ Наблюденія съ тѣмъ же психрометромъ № 7 и 8 въ аппаратѣ Дорандта въ случаѣ теоретической скорости вѣтра.

○ Тѣ же наблюденія въ случаѣ скорости вѣтра, даваемой газометромъ.


0,001000
0,000900
0,000800
0,000700
0,000600
0,001000
0, 000800
0,000700
0,000640
0,000600
0,000593
0
1m.
2m.
3m.
4m.
5m.

О ПРИЛОЖЕНІЯХЪ
ТЕОРІИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ
КЪ ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ.

П. С. Назимова.

(Сочиненіе, удостоенное преміи Заслуженнаго Профессора Брашмана на Университетскомъ актѣ 12 января 1884 г.).

ВВЕДЕНІЕ.

Примѣненія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ можно раздѣлить на двѣ рѣзко отличныя группы. Съ одной стороны, теоремы и формулы, относящіяся къ эллиптическимъ и Якобіевымъ функціямъ, можно употреблять для вывода различныхъ ариѳметическихъ свойствъ; съ другой стороны, рѣшенія различныхъ ариѳметическихъ задачъ сводятся къ эллиптическимъ функціямъ точно также, какъ рѣшеніе двучленныхъ алгебраическихъ уравненій къ тригонометрическимъ функціямъ.

Доказательства ариѳметическихъ свойствъ съ помощью свойствъ эллиптическихъ функцій или другихъ функцій, изучаемыхъ обыкновенно вмѣстѣ съ эллиптическими функціями, могутъ быть замѣнены обыкновенно чисто ариѳметическими доказательствами, хотя большею частью ариѳметическія доказательства гораздо сложнѣе. Большинство геометровъ смотритъ на такое употребленіе эллиптическихъ функцій, какъ на путь къ открытію ариѳметическихъ истинъ; этотъ путь въ концѣ концовъ долженъ быть непремѣнно замѣненъ ариѳметическимъ выводомъ.

Напротивъ, другая сторона примѣненія эллиптическихъ функцій носитъ характеръ незамѣнимости, требуетъ основательнаго изученія какой нибудь части теоріи эллиптическихъ функцій, съ цѣлью довести ариѳметическій вопросъ до желаемой оконченности.

Въ томъ случаѣ, когда ариѳметическій вопросъ сводится къ эллиптическимъ функціямъ, способъ дальнѣйшаго изслѣдованія зависитъ отъ того, какимъ образомъ вопросъ сводится къ эллиптическимъ функціямъ и къ какимъ именно функціямъ; здѣсь свойство ариѳметическаго вопроса обусловливаетъ способъ изслѣдованія.

Но и въ томъ случаѣ, когда эллиптическими функціями пользуются только для доказательства ариѳметическихъ истинъ, способы примѣненія эллиптическихъ функцій бываютъ разнообразны; нѣкоторые изъ этихъ способовъ очень элементарны, другіе же требуютъ совершенно спеціальныхъ изслѣдованій въ этой области анализа.

За немногими однако исключеніями можно раздѣлить всѣ примѣненія эллиптическихъ функцій на два большіе класса: въ одномъ классѣ разсматриваются ряды и произведенія, встрѣчаемые въ теоріи эллиптическихъ функцій; способы другаго класса основаны на изученіи теоріи умноженія аргументовъ эллиптическихъ функцій на мнимыя количества.

Наиболѣе элементарный способъ выводить ариѳметическія свойства съ помощью эллиптическихъ функцій родился прежде самой теоріи этихъ функцій. Дѣйствительно, этотъ способъ принадлежитъ Эйлеру, которому, какъ извѣстно, не были знакомы тѣ функціи, которыя теперь называются эллиптическими; имъ изучались только эллиптическіе интегралы. Способъ этотъ состоитъ въ сравненіи двухъ или нѣсколькихъ рядовъ, связанныхъ какимъ нибудь равенствомъ. Пусть два или нѣсколько рядовъ конечныхъ или безконечныхъ, расположенныхъ по степенямъ какого нибудь неопредѣленнаго, связаны какимъ нибудь равенствомъ. Очевидно, что коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ неопредѣленнаго въ обѣихъ частяхъ равенства должны быть равны; это равенство коэффиціентовъ и даетъ намъ нѣкоторую ариѳметическую теорему; теоремы, получаемыя такимъ образомъ, могутъ быть очень разнообразны.

Поясню сказанное примѣромъ; именно приложу способъ къ выводу теоремы Вильсона. Если $\Phi(m)$ означаетъ сумму дѣлителей числа m, считая единицу и само число, то очевидно такое равенство:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{3x^2}{1-x^3}+\ldots+\frac{mx^{m-1}}{1-x^m}+\ldots$$

$$=\Phi(1)+\Phi(2)x+\ldots+\Phi(m)x^{m-1}+\ldots \qquad (1)$$

Интегрирую это равенство:

$$lg\,\{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^m)\dots\}^{-1}$$

$$= lg\,(1+N_1x+N_2x^2+\dots+N_mx^m+\dots)$$

$$= \Phi(1)x+\frac{\Phi(2)}{2}x^2+\dots+\frac{\Phi(m)}{m}x^m+\dots \qquad (2)$$

Легко понять, что N_m обозначаетъ число всевозможныхъ разложеній m на сумму цѣлыхъ слагаемыхъ. Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, получаю

$$1+N_1x+N_2x^2\dots+N_mx^m+\dots$$

$$= \Pi\left(1+\frac{\Phi(m)x^m}{m}+\frac{\Phi(m)^2}{1.2m^2}x^{2m}+\dots\right), \qquad (3)$$

гдѣ произведеніе распространяется на всѣ цѣлыя положительныя значенія m отъ 1 до ∞.

Пусть m первоначальное число. Коэффиціенты x^m въ обѣихъ частяхъ равенства должны быть равны; слѣдовательно

$$N_m=\frac{1}{1.2.3\dots m}+\frac{\Phi(2)}{2.1.2.3\dots(m-2)}+\dots+\frac{\Phi(m)}{m}. \qquad (4)$$

Первая часть равенства (4)—цѣлое число; слѣдовательно и вторая часть есть цѣлое число. Но первоначальное число m входитъ въ знаменатели только двухъ крайнихъ дробей, изъ которыхъ послѣдняя равна $1+\frac{1}{m}$; поэтому

$$\frac{1}{1.2.3\dots m}+\frac{1}{m}=\frac{1+1.2.3\dots(m-1)}{1.2.3\dots m}$$

есть дробь сократимая на m. Итакъ

$$1+1.2.3\dots(m-1)\equiv 0\ (mod\ m).$$

Въ этомъ примѣрѣ два ряда связаны равенствомъ (3). Сравненіе коэффиціентовъ у одинаковыхъ степеней x дало теорему Вильсона.

Эллиптическія функціи, эллиптическіе интегралы и другія функціи, изучаемыя въ теоріи эллиптическихъ функцій, выражаются съ

помощью рядовъ; эти ряды для различныхъ функцій различны; но вмѣстѣ съ тѣмъ изъ теоріи эллиптическихъ функцій мы знаемъ теоремы, связывающія различныя функціи. Такимъ образомъ, разъ были выведены ряды, выражающіе эллиптическія и Якобіевы функціи, простое сравненіе коэффиціентовъ у одинаковыхъ степеней должно было давать различныя ариѳметическія теоремы. И дѣйствительно, примѣненія этого способа начали появляться рядомъ съ изслѣдованіями эллиптическихъ функцій.

Первый, который опубликовалъ такія примѣненія, былъ Якоби. Въ 3 томѣ журнала Крелля во 2-ой тетради (стр. 191) напечатана маленькая замѣтка Якоби о числѣ разложеній числа вида $8n+4$ на четыре нечетные квадрата. Эта замѣтка помѣчена 24-мъ апрѣля 1828 года. Въ этой замѣткѣ Якоби говоритъ, что онъ съ помощью эллиптическихъ функцій, совершенно аналитическимъ путемъ доказалъ теорему: число рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2+t^2=8n+4$ нечетными числами равно суммѣ дѣлителей числа $2n+1$.

На страницѣ 309 того же тома того же журнала (3 тетрадь) Якоби даетъ рѣшеніе болѣе общей задачи. Считаю самымъ лучшимъ списать дословно эти строки, замѣчательныя своею ясностью и краткостью, замѣтивъ только, что Якоби употребляетъ слѣдующія обозначенія:

$$K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\ K'=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(1-k^2)x^2)}},\ q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

Вотъ слова Якоби. On pourra satisfaire par l'analyse des fonctions elliptiques à une demande d'Euler à l'égard du théorème de Fermat, que tout nombre entier est la somme de quatre nombres quarrés: savoir de demontrer que la quatrième puissance d'une série

$$A+A'q+A''q^4+A'''q^9+A^{IV}q^{16}+\ldots$$

puisse contenir toutes les puissances de q. En effet je trouve

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2=\{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots\}^4$$

$$=1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\frac{32q^4}{1+q^4}+\ldots$$

$$= 1+\frac{8q}{(1-q)^2}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{8q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{8q^4}{(1+q^4)^2}+\dots$$

$$=1+8\Sigma\varphi(p)\{q^p+3q^{2p}+3q^{4p}+3q^{8p}+3q^{16p}+3q^{32p}+\dots\},$$

p étant un nombre impair quelconque et $\varphi(p)$ la somme des facteurs du nombre p; formule dont le théorème de Fermat est un corollaire. On tire encore de cette formule et d'autres semblables des théorèmes sur le nombre de toutes les décompositions possibles d'un nombre donné en quatre nombres quarrés. Un théorème semblable a été proposé dans le deuxième cahier p. 191. En examinant avec attention l'algorithme d'analyse qui conduit à ces résultats remarquables, on parviendra à établir des nouvelles méthodes dans la théorie des nombres.

Послѣ опубликованія этой замѣтки, Якоби время отъ времени возвращался къ тому же предмету, то упоминая, что та или другая ариѳметическая теорема есть слѣдствіе формулъ его Fundamenta nova (сочиненіе объ эллиптическихъ функціяхъ, изданное въ 1829 году), то стараясь найти ариѳметическое доказательство этимъ теоремамъ, столь легко выводимымъ изъ формулъ теоріи эллиптическихъ функцій. Повидимому, послѣднее его болѣе интересовало; это видно изъ того, что такія ариѳметическія доказательства служатъ предметомъ нѣсколькихъ статей Якоби. Такъ, въ 12 томѣ журнала Крелля, Якоби далъ ариѳметическое доказательство только что приведенной теоремы о четырехъ квадратахъ; такъ, въ 21 томѣ того же журнала, онъ даетъ длинное доказательство теоремъ, относящихся до числа разложеній чиселъ вида $24\alpha+3$ на три квадрата вида $(6m\pm1)^2$. Если для доказательства теоремъ 21 тома были бы употреблены формулы Fundamenta nova, то статья заняла бы немного строчекъ.

Кромѣ вышеуказаннаго способа, Якоби употреблялъ и другой способъ для вывода ариѳметическихъ теоремъ. Этотъ пріемъ, довольно родственный предъидущему, подробно изложенъ Якоби въ 37 томѣ журнала Крелля въ статьяхъ, озаглавленныхъ такъ: Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiednen quadratischen Formen enthalten sind. Способъ состоитъ въ томъ, что одно и то же безконечное произведеніе множителей вида $1\pm q^m$ выражается въ видѣ различныхъ частныхъ двухъ

эллиптическихъ произведенiй (названiе принадлежитъ Якоби). Каждое изъ эллиптическихъ произведенiй выражается суммою, въ которой степени q возрастаютъ, слѣдуя нѣкоторой ариѳметической прогрессiи второй степени. Такъ какъ дроби, составленныя изъ этихъ эллиптическихъ произведенiй, равны одному и тому же произведенiю, то изъ нихъ составляется равенство. Уничтожая знаменатели въ равенствѣ, получимъ равенство между нѣкоторыми двойными суммами; q въ этихъ суммахъ входитъ въ степеняхъ, выражаемыхъ нѣкоторыми квадратичными формами; напримѣръ, одна изъ суммъ состоитъ изъ членовъ вида $q^{x^2+3y^2}$, а другая изъ членовъ вида $q^{x^2+2y^2}$, при чемъ по цѣлымъ величинамъ x и y и берется сумма. Разсмотрѣнiе коэффицiентовъ при одинаковыхъ степеняхъ q и даетъ ариѳметическiя теоремы, которыя сложнѣе и не столь интересны какъ тѣ, которыя выводятся первымъ способомъ Якоби. Впрочемъ ясное понятiе о методѣ читатель получитъ во второй главѣ этого сочиненiя.

Одновременно съ Якоби, изслѣдованiями въ области высшей ариѳметики занимался Дирикле, знаменитый продолжатель Гаусса въ теорiи чиселъ. Что касается до примѣненiя эллиптическихъ функцiй къ теорiи чиселъ, то съ этимъ вопросомъ имя Lejeune Dirichlet связано совершенно иначе, чѣмъ имя Якоби. Якоби примѣнялъ свои эллиптическiя формулы къ отысканiю различныхъ ариѳметическихъ теоремъ и къ доказательству столь извѣстныхъ бездоказательныхъ теоремъ Фермата. Дирикле велъ свои изслѣдованiя, не прибѣгая къ эллиптическимъ функцiямъ; но нѣкоторыя окончательныя формулы Дирикле содержатъ или эллиптическiя функцiи, или функцiи Якоби. Въ 1839 и 40 годахъ, въ двухъ томахъ 19 и 21 журнала Крелля, Дирикле помѣстилъ свои знаменитыя Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la théorie des nombres, которыя почти цѣликомъ вошли въ его извѣстный учебникъ теорiи чиселъ. Искусными аналитическими вычисленiями Дирикле опредѣляетъ, съ помощью конечныхъ суммъ, число различныхъ классовъ квадратичныхъ бинарныхъ формъ извѣстнаго рода съ даннымъ опредѣлителемъ. Задача эта была рѣшена уже Гауссомъ для случая отрицательнаго опредѣлителя (въ сочиненiи de nexu inter multitudinem clas-

sium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem. 1837 годъ. Изданіе 1876 года, стр. 277—291). Дирикле рѣшилъ ее и для случая положительнаго опредѣлителя, а также упростилъ выраженія Гаусса для случая отрицательнаго. Равенство, изъ котораго съ помощью суммированія получаются окончательныя формулы Дирикле, можно выразить съ помощью функцій Якоби; слѣдовательно изслѣдованія Дирикле могли бы быть замѣнены изслѣдованіями изъ области теоріи эллиптическихъ функцій. Въ частныхъ случаяхъ это легко сдѣлать; но въ общемъ такой путь рѣшенія задачи затруднителенъ въ томъ отношеніи, что при выводахъ приходится употреблять модулярныя уравненія, которыхъ общій видъ неизвѣстенъ. Такимъ образомъ въ теоріи чиселъ различные методы взаимно дополняютъ другъ друга.

Вскорѣ послѣ изданія вышеупомянутаго труда, Дирикле пожелалъ распространить свои изслѣдованія на тѣ же вопросы относительно квадратичныхъ бинарныхъ формъ съ мнимыми коэффиціентами и перемѣнными. Эту статью онъ напечаталъ въ 24 томѣ журнала Крелля. Способъ вывода, употребленный въ этой статьѣ, въ мельчайшихъ подробностяхъ подобенъ способу, уже употребленному имъ въ 19 и 21 томахъ; но между тѣмъ какъ тамъ окончательныя формулы содержали или раціональныя функціи, или функціи тригонометрическія,—здѣсь суммированіе производится съ помощью эллиптическихъ функцій. Дирикле однакоже не докончилъ свою статью; онъ даже суммированіе безконечнаго ряда отложилъ до слѣдующей статьи, гдѣ онъ также вѣроятно вывелъ бы слѣдствія изъ формулъ, которыя онъ предполагалъ вывести. Итакъ изслѣдованіе о числѣ классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ съ мнимыми коэффиціентами не мыслимо безъ основательнаго изученія свойствъ эллиптическихъ функцій.

И Гауссъ, и Дирикле были сильно озабочены тѣмъ, чтобы столь удачные выводы Лежандра о квадратичныхъ вычетахъ распространить и на сравненія высшихъ степеней. Гауссъ съ этою цѣлью ввелъ въ теорію чиселъ новыя цѣлыя числа,—мнимыя. Эти мнимыя цѣлыя числа дозволили ему построить теорію биквадратичныхъ вычетовъ. Также какъ въ теоріи квадратичныхъ вычетовъ, главнѣйшимъ основаніемъ теоріи биквадратичныхъ вычетовъ сдѣлался такъ называемый «законъ взаимности».

Берлинскій ученый Эйзенштейнъ, занимаясь этою теоріею, въ 28 томѣ журнала Крелля даетъ доказательство этого закона; въ 30 томѣ онъ даетъ другое доказательство (не годящееся въ томъ случаѣ, когда первоначальное число—вида $4n+3$), основанное на теоріи лемнискатныхъ функцій, т.-е. эллиптическихъ функцій съ модулемъ равнымъ $\sqrt{-1}$.

Въ 39 томѣ журнала Крелля, вышедшемъ въ свѣтъ въ 1850 г., онъ даетъ третье доказательство той же теоремы, основанное опять на теоріи лемнискатныхъ функцій; это доказательство обнимаетъ всѣ случаи. Кромѣ того въ этихъ же статьяхъ 39 тома онъ примѣняетъ свои изслѣдованія о лемнискатныхъ функціяхъ къ теоріи вычетовъ 8-ой степени, а также касается и другихъ ариѳметическихъ вопросовъ.

Замѣчу теперь, что эти ариѳметическіе выводы 39 тома составляютъ только частные эпизоды Эйзенштейновскихъ статей. Главная цѣль этихъ статей была—изслѣдовать свойства уравненія, отъ котораго зависитъ дѣленіе цѣлой лемнискаты, что показываетъ и заглавіе его трехъ статей 39 тома: Über die Irreductibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichungen, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhängt. Вопросъ, разбираемый Эйзенштейномъ, уже былъ начатъ Абелемъ въ томъ же направленіи, какъ это дѣлаетъ его послѣдователь; но Абель началъ только это изслѣдованіе, которое со многими другими, еще болѣе важными, были прерваны его раннею смертью. Вопросъ о дѣленіи лемнискаты въ постановкѣ Абеля былъ только частнымъ, легчайшимъ случаемъ болѣе общаго вопроса о мнимомъ умноженіи эллиптическихъ функцій. Въ изслѣдованіи этого общаго вопроса состязался съ Абелемъ Якоби (какъ это и въ другихъ случаяхъ было ихъ обычаемъ); первоначальная мысль о такомъ умноженіи явилась даже у обоихъ ученыхъ почти одновременно.

Во второмъ томѣ журнала Крелля, Абель предложилъ читателямъ этого журнала доказать теорему: если дифференціальное уравненіе

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}},$$

гдѣ α, β, γ, δ, ε и a числа дѣйствительныя, интегрируется съ помощью алгебраическихъ функцій, то величина a непремѣнно раціональна. Въ 3 томѣ того же журнала на страницѣ 181 онъ прибавляетъ другую теорему: если дифференціальное уравненіе

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\mu y^2)}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1+\mu x^2)}}$$

интегрируется алгебраическими функціями, если число μ дѣйствительно или мнимо, а a мнимое число, то a непремѣнно вида $m \pm \sqrt{-n}$, гдѣ m и n раціональныя числа. Въ этомъ случаѣ μ не произвольно; должно, чтобы μ удовлетворяло нѣкоторому уравненію съ безчисленнымъ числомъ дѣйствительныхъ и мнимыхъ корней.

Абель не доказываетъ этой теоремы, отлагая доказательство до другой статьи; онъ ограничивается разсмотрѣніемъ частнаго случая.

На страницѣ 195 того же тома Якоби замѣчаетъ по поводу теоремы 2-го тома, предложенной Абелемъ, что эта теорема аналогична той теоремѣ тригонометріи, которая требуетъ для n раціональнаго значенія для того, чтобы $\sin nx$ представлялся алгебраически черезъ $\sin x$. Но, по замѣчанію Якоби, существуетъ безчисленное множество модулей, для которыхъ a можетъ имѣть видъ $c+b\sqrt{-1}$; это всѣ тѣ модули, которые отъ преобразованія превращаются въ свое дополненіе. Въ этомъ случаѣ преобразованіе дѣлается умноженіемъ, т.-е. можно сдѣлать такъ, что отъ преобразованія алгебраическаго извѣстной степени модуль не мѣнялся бы.

Вопросомъ объ умноженіи на мнимыя количества въ особенности занялся Кронекеръ. Въ 1857 году, въ Monatsbericht der Wissenschaften zu Berlin (29 octobre), онъ напечаталъ краткую замѣтку о своихъ работахъ по этому вопросу. Переводъ этой замѣтки на французскій языкъ можно найти въ Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville, 2 série, tome 3, année 1858. Изложивъ нѣкоторыя теоремы (безъ доказательствъ) объ уравненіяхъ, опредѣляющихъ модули, для которыхъ существуетъ мнимое умноженіе, онъ указываетъ на связь между этимъ вопро-

сомъ и теоріею квадратичныхъ формъ; въ концѣ замѣтки онъ даетъ три ариѳметическія теоремы, выраженныя тремя равенствами:

$$2F(n)+4F(n-2^2)+4F(n-4^2)+\dots\dots\dots=\varphi(n)-\psi(n),$$
$$4F(n-1^2)+4F(n-3^2)+4F(n-5^2)+\dots=\varphi(n)+\psi(n),$$
$$F(n)+2F(n-1^2)+2F(n-2^2)+2F(n-3^2)+\dots\dots=\varphi(n),$$

гдѣ $n\equiv 3 \pmod 4$; $F(n)$ обозначаетъ число классовъ формъ съ отрицательнымъ опредѣлителемъ $-n$ и такихъ, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ крайнихъ коэффиціентовъ формы $ax^2+2bxy+cy^2$ нечетенъ; $\varphi(n)$ обозначаетъ сумму всѣхъ дѣлителей n, большихъ $\sqrt{n}$; $\psi(n)$—сумму всѣхъ дѣлителей n, меньшихъ $\sqrt{n}$. Въ самомъ концѣ замѣтки онъ примѣняетъ эти три формулы къ одной интересной задачѣ, предложенной Дирикле въ 3-емъ томѣ журнала Крелля и рѣшенной Якоби въ 9 томѣ того же журнала. Задача эта слѣдующая: пусть n первоначальное число, сравнимое съ 3 по модулю 4; требуется опредѣлить число v изъ сравненія:

$$1.2.3.4\dots\frac{n-1}{2}\equiv(-1)^v \pmod n.$$

Черезъ три года послѣ появленія этой замѣтки, Кронекеръ, въ 57 томѣ журнала Крелля, помѣстилъ другую замѣтку, въ которой онъ сообщаетъ всѣ формулы ариѳметическія, выведенныя имъ изъ теоріи умноженія на мнимое количество; эти формулы онъ, какъ и въ первой своей замѣткѣ, не сопровождаетъ доказательствами. Во всѣхъ равенствахъ, даваемыхъ имъ, входитъ та же функція $F(n)$ и функція $G(n)$, опредѣляющая число всѣхъ формъ съ опредѣлителемъ $-n$; во всѣхъ равенствахъ эти функціи входятъ линейно. Въ первыхъ восьми формулахъ, имъ даваемыхъ, аргументы вышеприведенныхъ двухъ функцій составляютъ всегда убывающую ариѳметическую прогрессію второй степени. Каждая изъ этихъ формулъ составляетъ самостоятельную ариѳметическую теорему, ибо ни одна изъ нихъ не можетъ быть выведена изъ остальныхъ. Формулы эти выводятся съ помощью модулярныхъ уравненій, при чемъ не требуется знанія коэффиціентовъ этихъ уравненій.

Кромѣ этихъ восьми формулъ, онъ приводитъ нѣсколько болѣе простыхъ теоремъ, которыя могутъ быть доказаны элементарными соображеніями; но также онѣ могутъ быть выведены и соображеніями, основанными на свойствахъ умноженія на мнимое количество; напримѣръ, $F(4n)=2F(n)$. Изъ всѣхъ этихъ формулъ Кронекеръ выводитъ еще нѣкоторыя другія, между которыми одна содержитъ рѣшеніе задачи о числѣ разложеній даннаго числа на 3 квадрата.

Задача о трехъ квадратахъ имѣетъ почти такую же исторію, какъ задача о четырехъ квадратахъ. Родоначальникъ этой задачи тотъ же Ферматъ, который далъ бездоказательную теорему: всякое число разлагается на сумму трехъ треугольныхъ чиселъ, т.-е. чиселъ, выражаемыхъ формулою $\frac{1}{2}\, s\,(s-1)$. Лежандръ нашелъ путемъ индукціи нѣсколько теоремъ, показывающихъ зависимость числа рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2=k$ отъ числа классовъ формъ съ опредѣлителемъ $-k$. Гауссъ въ пятомъ отдѣлѣ своихъ Disquisitiones arithmeticae разсмотрѣлъ, когда возможно разложеніе числа на три квадрата или на 3 треугольныя числа, доказалъ и обобщилъ теоремы Лежандра. Рѣшеніе его однако очень сложно и правила, выведенныя имъ, также нѣсколько сложны. Съ помощью формулъ Кронекера эта же задача рѣшается очень просто, и результатъ рѣшенія до нельзя простъ.

Кронекеръ не приложилъ доказательства къ своимъ формуламъ; понятно, математики, заинтересовавшись этими формулами, искали доказательства ихъ. Между этими доказательствами замѣчательны доказательства французскаго математика Hermite'а, особенно тѣмъ, что онъ основалъ свои доказательства на совсѣмъ иныхъ основаніяхъ, чѣмъ Кронекеръ.

Одновременно съ Кронекеромъ на поприщѣ бездоказательнаго сообщенія ариѳметическихъ теоремъ подвизался Ліувилль, который 14 первыхъ томовъ журнала, издаваемаго имъ, на $\frac{2}{3}$ наполнилъ ариѳметическими изслѣдованіями, по большей части относящимися къ простѣйшимъ квадратичнымъ формамъ со многими перемѣнными. Эрмитъ всѣ эти теоремы доказывалъ очень просто, съ помощью метода, впервые объясненнаго Якоби въ третьемъ

томѣ журнала Крелля (см. страницу 72 этого сочиненія). Этотъ методъ беретъ всегда разложеніе въ тригонометрическій рядъ двойно-періодичныхъ функцій или функцій Якоби.

Когда появились формулы Кронекера, то Эрмитъ замѣтилъ, что старый методъ недостаточенъ, но что незначительное его измѣненіе рѣшаетъ и Кронекеровы задачи. Въ VII томѣ 2 серіи, Journal de Mathématiques pures et appliquées Ліувилля (1862 года), онъ излагаетъ доказательство трехъ формулъ, которыя Кронекеръ сообщилъ въ первой своей статьѣ, и примѣняетъ эти формулы къ опредѣленію числа цѣлыхъ рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2=8N+3$, гдѣ N данное цѣлое число. Черезъ два года послѣ этого Эрмитъ въ IX томѣ того же журнала доказалъ въ общемъ случаѣ теорему Кронекера о разложеніи на три квадрата. Въ этой второй своей статьѣ Эрмитъ излагаетъ свой способъ болѣе систематично, приводя рядъ формулъ, которыя не имѣютъ мѣста въ трактатахъ эллиптическихъ функцій.

Относительно характера работъ Ліувилля и Эрмита мы можемъ здѣсь позволить себѣ только нѣсколько словъ. Если примѣнять 1-й способъ Якоби къ формуламъ Ліувилля, то способъ Якоби долженъ получить нѣкоторое расширеніе. Способъ Якоби, какъ онъ показанъ самимъ Якоби, состоитъ въ сравненіи коэффиціентовъ эллиптическихъ рядовъ при частномъ аргументѣ эллиптической функціи; неопредѣленное здѣсь q. Также рѣшаются и многія задачи Ліувилля. Но Ліувилль приводитъ задачи другаго характера; эти задачи относятся до свойствъ общихъ всякихъ аналитическихъ и числовыхъ функцій. Для такихъ задачъ ряды берутся тѣ же, но аргументу не придаютъ частнаго значенія и по прежнему сравниваютъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ q. Такимъ образомъ получается теорема Ліувилля, доказанная для нѣкоторыхъ тригонометрическихъ функцій. Многія функціи могутъ разлагаться въ тригонометрическій рядъ; для такихъ функцій предъидущая теорема тоже имѣетъ мѣсто.

Способъ Эрмита состоитъ въ разложеніи по тригонометрическимъ функціямъ произведенія двойно-періодичныхъ функцій на первую степень функціи Якоби. Въ остальномъ онъ сходенъ съ первымъ способомъ Якоби.

Статьи Эрмита вызвали соревнованіе со стороны Кронекера

на новомъ для него пути доказательнаго изложенія своихъ изслѣдованій. Эрмитъ выводитъ различныя формулы Кронекера изъ различныхъ рядовъ и на основаніи различныхъ соображеній; вслѣдствіе этого онъ сразу не могъ доказать всѣ формулы Кронекера. Кронекеръ въ Monatsbericht der Academie der Wissenschaften zu Berlin, 26 Mai 1862, доказываетъ, что всѣ его формулы можно вывести изъ одной формулы. Въ этой же статьѣ Кронекеръ говоритъ, что онъ ищетъ чисто ариѳметическаго доказательства своихъ формулъ; но изъ статьи ясно, что онъ во время сообщенія не достигъ еще этого доказательства.

Около этого времени (Monatsbericht der Academie der Wissenschaften zu Berlin, 22 Januar 1863) Кронекеръ далъ примѣненіе эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ совершенно другаго характера: онъ находитъ съ помощію эллиптическихъ функцій приблизительную величину $T+U\sqrt{P}$, гдѣ T и U основныя рѣшенія уравненія Пеля: $T^2-PU^2=1$; приближеніе очень значительное.

Кронекеръ уже много лѣтъ спустя (19 April 1875. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse. Monatsbericht der Academie der Wissenschaften zu Berlin) дополнилъ свою статью 57 тома журнала Крелля новыми формулами; но эти формулы ничего существеннаго не прибавляютъ къ прежнимъ изслѣдованіямъ Кронекера.

Гораздо болѣе интересны статьи Гирстера въ 17, 21 и 22 томахъ Mathematische Annalen, издаваемыхъ въ Лейпцигѣ профессорами Клейномъ и Майеромъ. Въ этихъ статьяхъ Гирстеръ, пользуясь новыми изысканіями Клейна въ теоріи модулярныхъ уравненій, даетъ новыя формулы, подобныя формуламъ Кронекера, но не выводимыя ни изъ формулъ Кронекера, ни изъ свойствъ обыкновенныхъ модулярныхъ уравненій. Дѣло въ томъ, что Клейнъ ввелъ въ теорію эллиптическихъ функцій новыя модулярныя уравненія, связывающія *модули высшихъ ступеней* (названіе тоже принадлежитъ Клейну).

Этимъ я заканчиваю свой историческій очеркъ, потому что послѣднія статьи Гирстера появились уже въ 1883 году. Замѣчу только, что для интересующихся этимъ предметомъ будетъ полезно дополнить свѣдѣнія, даваемыя мною въ первыхъ главахъ

этого сочиненія, изъ сочиненія профессора Бугаева, которое печатается въ настоящее время въ «Математическомъ Сборникѣ» Московскаго Математическаго Общества (томъ одиннадцатый).

Въ настоящемъ сочиненіи предполагается разсмотрѣть главнѣйшія изъ примѣненій эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ; при этомъ все сочиненіе естественно распадается на два отдѣла: въ первомъ отдѣлѣ разсматриваются методы, въ которыхъ выводъ дѣлается съ помощію тригонометрическихъ рядовъ; во второмъ отдѣлѣ помѣстятся вообще тѣ изслѣдованія, въ которыхъ играетъ роль умноженіе аргумента эллиптическихъ функцій на мнимое количество.

Прежде чѣмъ приступить къ самому предмету, я считаю необходимымъ объяснить нѣкоторыя обозначенія, встрѣчаемыя въ этомъ сочиненіи. Какъ извѣстно, въ теоріи эллиптическихъ функцій господствуетъ необычайное разнообразіе въ обозначеніи однихъ и тѣхъ же функцій.

Выше было объяснено, что подразумѣвается подъ K, K', k и q; подъ k' подразумѣвается по обыкновенію $\sqrt{1-k^2}$. Функціи Якоби въ сочиненіи обозначаются значками ϑ, ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3, при чемъ

$$\vartheta(x,q)=\vartheta(x)=1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots,$$

$$\vartheta_3(x,q)=\vartheta_3(x)=1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots,$$

$$\vartheta_1(x,q)=\vartheta_1(x)=2q^{\frac{1}{4}}\sin x-2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x+2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x-2q^{\frac{49}{4}}\sin 7x+\ldots,$$

$$\vartheta_2(x,q)=\vartheta_2(x)=2q^{\frac{1}{4}}\cos x+2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x+2q^{\frac{25}{4}}\cos 5x+2q^{\frac{49}{4}}\cos 7x+\ldots,$$

$$\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi},q\right)=\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right)=\sin am\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)},$$

$$\cos am\left(\frac{2Kx}{\pi},q\right)=\cos am\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right)=\cos am\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)},$$

$$\Delta\ am\left(\frac{2Kx}{\pi},q\right)=\Delta\ am\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right)=\Delta\ am\frac{2Kx}{\pi}=\frac{\sqrt{k'}\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}.$$

Другія обозначенія выяснятся въ теченіе изложенія.

При изложеніи предполагается, что по теоріи чиселъ извѣстенъ учебникъ Lejeune Dirichlet, 2-ое изданіе; по теоріи эллиптическихъ функцій: Theorie der Elliptischen Functionen von Durège, Théorie des Fonctions Elliptiques par Briot et Bouquet (1875 г.). Многіе вопросы по эллиптическимъ функціямъ великолѣпно разработаны въ книгѣ Enneper'a, Elliptische Functionen (Theorie und Geschichte); особенно обстоятельно изложенъ отдѣлъ о модулярныхъ уравненіяхъ. Нельзя не рекомендовать также желающимъ хорошо владѣть теоріею преобразованія эллиптическихъ функцій сочиненіе Koenigsberger, die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der Elliptischen Functionen; въ этомъ сочиненіи можно найти хотя и незначительныя свѣдѣнія объ умноженіи на мнимое количество. Не смотря на подробность трехъ послѣднихъ сочиненій, теорія модулярныхъ уравненій въ этихъ сочиненіяхъ изложена недостаточно; это происходитъ отъ того, что теорія эта безпрерывно разработывается; въ этомъ отношеніи читатель всего болѣе найдетъ свѣдѣній въ сочиненіи Joubert, Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Послѣднее сочиненіе содержитъ нѣсколько интересныхъ теоремъ; вообще же это сочиненіе отличается тѣмъ, что въ немъ изслѣдуется модулярное уравненіе для всякой нечетной степени преобразованія.

ГЛАВА I.

Первый методъ Якоби. Примѣненіе этого метода къ изученію квадратичныхъ формъ.

§ 1. Уже во введеніи было объяснено, что въ методѣ Якоби употребляются тригонометрическіе ряды, изображающіе эллиптическія или Якобіевы функціи. Возьмемъ какую нибудь эллиптическую функцію и изобразимъ ее въ видѣ тригонометрическаго ряда; придадимъ аргументу эллиптической функціи какое нибудь частное значеніе. Вмѣсто эллиптической функціи получимъ функцію K и k; вмѣсто тригонометрическаго ряда получимъ рядъ, въ которомъ одно неопредѣленное q. Но функція K и k, полученная нами, можетъ выражать частное значеніе другой эллиптической функціи или частное значеніе функціи отъ ϑ, ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3; въ такомъ случаѣ эту функцію отъ K и k можно выразить инымъ образомъ черезъ рядъ, въ которомъ неопредѣленное q. Сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ q дастъ ариѳметическую теорему.

Возьмемъ, напримѣръ, извѣстные въ теоріи эллиптическихъ функцій ряды:

$$\frac{2K}{\pi}\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}=1+\frac{4q}{1+q^2}\,cos2x+\frac{4q^2}{1+q^4}\,cos4x+\frac{4q^3}{1+q^6}\,cos6x+\ldots,\quad(1)$$

$$\frac{2Kk}{\pi}sin\,am\frac{2Kx}{\pi}=\frac{4\sqrt{q}}{1-q}\,sinx+\frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3}\,sin3x+\frac{4\sqrt{q^5}}{1-q^5}\,sin5x+\ldots,\quad(2)$$

$$\frac{2K}{\pi}:sin\,am\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{sinx}+\frac{4q}{1-q}\,sinx+\frac{4q^3}{1-q^3}\,sin3x+\frac{4q^5}{1-q^5}sin5x\ldots(3)$$

Положимъ въ первомъ равенствѣ $x=0$, во второмъ $x=\frac{\pi K'i}{4K}$, въ третьемъ $x=\frac{\pi}{4}$; тогда получимъ

$$\frac{2K}{\pi}=1+4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^r}{1+q^{2r}}=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\rho(n)q^n,\ \rho(n)=\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}},\tag{4}$$

$$\frac{2K\sqrt{k}}{\pi}=2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{2r-1}{4}}}{1+\sqrt{q^{2r-1}}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\rho(2n-1)\sqrt[4]{q^{2n-1}},\tag{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2K}{\pi}\sqrt{1+k'}=1+2\left\{\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}-\frac{q^5}{1-q^5}-\frac{q^7}{1-q^7}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{q^{8p+1}}{1-q^{8p+1}}+\frac{q^{8p+3}}{1-q^{8p+3}}-\frac{q^{8p+5}}{1-q^{8p+5}}-\frac{q^{8p+7}}{1-q^{8p+7}}+\ldots\right\}.\tag{6}$$

Подъ d въ предъидущихъ формулахъ мы подразумѣваемъ нечетный дѣлитель числа n, считая 1; для составленія $\rho(n)$ должно брать всевозможные нечетные дѣлители числа n.

Съ другой стороны, мы имѣемъ слѣдующія формулы:

$$\frac{2K}{\pi}=\vartheta_3^2(0)=\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\sum_{y=-\infty}^{+\infty}q^{x^2+y^2},\tag{7}$$

$$\frac{2K\sqrt{k}}{\pi}=\vartheta_3(0)\vartheta_2(0)=2\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\sum_{y=1}^{+\infty}\sqrt[4]{q^{4x^2+(2y-1)^2}},\tag{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2K}{\pi}\sqrt{1+k'}=\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(0,q^2)=\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\sum_{y=-\infty}^{+\infty}q^{x^2+2y^2}.\tag{9}$$

Сравнивая одинаковые коэффиціенты при q въ формулахъ (4) и (7), (5) и (8), (6) и (9) и обозначая черезъ n какое нибудь

цѣлое число (а также и черезъ p), получаемъ слѣдующія три теоремы.

Теорема 1. *Число рѣшеній уравненія* $x^2+y^2=n$ *равняется учетверенной разности между числомъ дѣлителей* n *вида* $4p+1$ *и числомъ дѣлителей* n *вида* $4p+3$.

Теорема 2. *Число цѣлыхъ рѣшеній уравненія* $x^2+4y^2=2n+1$ *равно двойной разности между числомъ дѣлителей* $2n+1$ *вида* $4p+1$ *и числомъ дѣлителей вида* $4p+3$.

Теорема 3. *Число цѣлыхъ рѣшеній уравненія* $x^2+2y^2=n$ *равно удвоенному числу дѣлителей* n *вида* $8p+1$ *и* $8p+3$, *уменьшенному на удвоенное число дѣлителей* n *вида* $8p+5$ *и* $8p+7$.

§ 2. Нами въ §§ 3 и 5 этого сочиненія приведены 4 примѣра примѣненія метода Якоби, и всѣ эти примѣры относятся до опредѣленія числа цѣлыхъ рѣшеній нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ квадратныхъ уравненій. Интересно сдѣлать нѣкоторыя общія соображенія объ опредѣленіи числа рѣшеній даннаго квадратнаго уравненія.

Если у насъ дано неопредѣленное квадратное уравненіе съ двумя неизвѣстными $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=n$, то это уравненіе легко привести къ виду $ax^2+2bxy+cy^2=n$, гдѣ a, b, c и n цѣлыя числа.

Для опредѣленія числа цѣлыхъ рѣшеній послѣдняго уравненія, въ которомъ n предполагаемъ положительнымъ, разсмотримъ сумму

$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\sum_{y=-\infty}^{+\infty} q^{ax^2+2bxy+cy^2}=\sum\sum q^{\frac{1}{a}(ax-by)^2}\, q^{\frac{1}{a}(ac-b^2)y^2}. \tag{10}$$

Придадимъ y значенія at, $at+1$, $at+2 \ldots at+a-1$, гдѣ t произвольное цѣлое число; въ такомъ случаѣ $ax+by=a(x+bt)+b\lambda$ при $y=at+\lambda$. Если мы будемъ x придавать всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, то $x+bt=\zeta$ будетъ тоже получать всевозможныя цѣлыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Итакъ t и ζ измѣняются отъ $-\infty$ до $+\infty$. Положимъ теперь, что a и $ac-b^2$ (а потому и c) суть величины положительныя цѣлыя; тогда вмѣсто (10) получимъ

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=a-1}\sum_{\zeta=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{a}(a\zeta+b\lambda)^2}\, q^{\frac{ac-b^2}{a}(at+\lambda)^2}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=a-1} q^{c\lambda^2}\vartheta_3(b\lambda i lgq,\ q^a)\vartheta_3[(ac-b^2)\lambda i lgq,\ q^{a(ac-b^2)}]. \qquad (11)$$

Выраженіе (11) часто значительно упрощается. Такъ, если $ax^2+2bxy+cy^2$ форма не приведенная, то легко сообразить, какъ эту форму замѣнить формою приведенною.

Изъ предъидущаго видимъ, что въ случаѣ, если a, c и $ac-b^2$ положительны, безконечную сумму (10) всегда можно представить въ видѣ конечной суммы произведеній Якобіевыхъ функцій. Такія произведенія Якобіевыхъ функцій равны $\frac{2K}{\pi}$, умноженному на нѣкоторыя функціи модуля k. Эта же функція k, очевидно, есть частное значеніе нѣкоторой эллиптической функціи. Эллиптическую функцію должно выбрать такъ, чтобы при разложеніи ея въ тригонометрическій рядъ не получались въ видѣ множителей функціи модуля k, а только раціональныя функціи q.

§ 3. Если a и $ac-b^2$ суть степени двухъ, то легко выразить сумму (11) въ функціи k. Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ произведеніями выраженій вида $\vartheta_3\left(\frac{nilgq}{2^p},\ q\right)$, гдѣ n и p суть цѣлыя числа.

Эти выраженія можно опредѣлить съ помощію слѣдующихъ, извѣстныхъ въ теоріи эллиптическихъ функцій, равенствъ:

$$\left.\begin{aligned}2\vartheta_3^4(x)&=\vartheta_3^3(0)\vartheta_3(2x)+\vartheta_2^3(0)\vartheta_2(2x)+\vartheta^3(0)\vartheta(2x),\\ 2\vartheta_2^4(x)&=\vartheta_3^3(0)\vartheta_3(2x)+\vartheta_2^3(0)\vartheta_2(2x)-\vartheta^3(0)\vartheta(2x),\\ 2\vartheta^4(x)&=\vartheta_3^3(0)\vartheta_3(2x)-\vartheta_2^3(0)\vartheta_2(2x)+\vartheta^3(0)\vartheta(2x),\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_3(milgq)&=q^{-m^2}\vartheta_3(0),\\ \vartheta(milgq)&=(-1)^m q^{-m^2}\vartheta(0),\\ \vartheta_2(milgq)&=q^{-m^2}\vartheta_2(0).\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Съ помощію формулъ (12) и (13), $\vartheta_3\left(\frac{nilgq}{2^p}, q\right)$ выразится через рациональную функцію q^t(гдѣ t есть дробь) и черезъ функцію отъ $\vartheta_3(0, q)$, $\vartheta(0, q)$, $\vartheta_2(0, q)$; въ послѣднюю функцію будутъ входить квадратные корни. Иначе, мы получимъ выраженіе, въ которомъ $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ умножается на раціональную функцію q^t и функцію k, содержащую только квадратные корни.

Вспомнимъ однако, что модули q въ производителяхъ произведеній (11) одинаковы были бы только въ случаѣ $ac-b^2=1$; мы же полагали $ac-b^2=2^m$. Чтобы выразить произведеніе обѣихъ Якобіевыхъ функцій черезъ одинъ и тотъ же модуль k, мы имѣемъ формулы преобразованій Ландена, посредствомъ которыхъ $\vartheta_3(0, q^{2^m})$, $\vartheta(0, q^{2^m})$, $\vartheta_2(0, q^{2^m})$, $\vartheta_3(0, \sqrt[2^m]{q})$ и т. д. выражаются черезъ $\vartheta_3(0, q)$, $\vartheta(0,q)$ и $\vartheta_2(0, q)$.

Примѣняя эти вычисленія къ случаю аргументовъ $\frac{1}{4}(2m+1)ilgq$ и $\frac{1}{8}(2m+1)ilgq$, я нашелъ, что Якобіевы функціи такихъ аргументовъ выражаются линейно черезъ Якобіевы же функціи съ аргументомъ нуль; такъ,

$$\vartheta_3\left(\frac{2m+1}{4}\, ilgq,\ q\right)=\frac{1}{2}\, q^{-\frac{1}{16}(2m+1)^2}\vartheta_2(0, q^{\frac{1}{4}}).$$

Но произведенія, входящія въ формулу (11), могутъ быть представлены такъ: $\vartheta_3\left(\frac{nilgq}{2^p}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{n'ilgq'}{2^p}, q'\right)$; поэтому для p, непревышающаго 3, выраженіе (11) разложится на члены вида $\vartheta_3(0, q)\vartheta_3(0, q^{2^m})$, $\vartheta_2(0, q)\vartheta_2(0,q^{2^m})$ и т. п. (При $p=3$ могутъ явиться и члены вида $\vartheta_2(0, q)\vartheta_2(0, iq^{2^m})$ и т. п.)

Выше описанъ довольно сложный способъ вычисленія; во многихъ случаяхъ вычисленія значительно упростятся.

Окончу этотъ вопросъ о случаѣ, когда $a=2^m$ и $ac-b^2=2^n$, двумя легкими примѣрами.

Примѣръ 1. Найти число рѣшеній уравненія $x^2+16y^2=n$.

$$\sum\sum q^{\frac{1}{4}x^2+4y^2}=\vartheta_3(0,\ q^{\frac{1}{4}})\vartheta_3(0,\ q^4)=\frac{1}{2}\vartheta_3{}^2(0,\ q)(1+\sqrt{k})(1+\sqrt{k'})$$

$$=\frac{K}{\pi}(1+\sqrt{k}+\sqrt{k'}+\sqrt{kk'}).$$

Пользуясь формулами, помѣщенными въ трактатѣ Бріо и Буке на страницѣ 564 и выводимыми съ помощью извѣстныхъ формулъ дѣленія аргумента эллиптическихъ функцій на 2, можемъ предыдущее выраженіе изобразить такъ:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2K}{\pi}\left(1-ik\ sin\ am\frac{K'i}{2}+\Delta\ \ am\frac{K}{2}+e^{-\frac{\pi i}{4}}kcos\ am\frac{K-K'i}{2}\right).$$

Самой ариѳметической теоремы не стану выводить.

Примѣръ 2. Опредѣлить число рѣшеній уравненія

$$4x^2+4xy+3y^2=n.$$

$$\sum\sum q^{x^2+xy+\frac{3}{4}y^2}=\sum\sum q^{(x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{1}{2}y^2}=\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(0,q^2)+\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(0,q^2).$$

Второе изъ слагаемыхъ прямо вычисляемъ съ помощью Ландeновскихъ формулъ:

$$\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(0,q^2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\vartheta_3{}^2(0,q)\sqrt{1+k'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2K}{\pi}:sin\ am\ \frac{K}{2}.$$

Для вычисленія перваго выраженія опредѣлю $\vartheta_2(0,q^2)\vartheta_2(0,q^4)$ съ тѣмъ, чтобы потомъ замѣнить въ результатѣ q черезъ $\sqrt{q}$:

$$\vartheta_2(0,q^2)\vartheta_2(0,q^4)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\vartheta_3{}^2(0,q)(1-\sqrt{k'})\sqrt{1-k'}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2K}{\pi}\left\{\frac{k}{\sqrt{1+k'}}-\frac{k\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{K}{\pi}\left\{ksin\ am\ \frac{K}{2}-kcos\ am\frac{K}{2}\right\}.$$

§ 4. Разсмотримъ теперь уравненіе $nx^2+my^2=p$, въ которомъ n и m нечетны, а p какое нибудь цѣлое число. Въ такомъ случаѣ вопросъ приводится къ произведенію $\vartheta_3(0,q^n)\vartheta_3(0,q^m)$.

Будутъ ли n и m четны, или нечетны, во всякомъ случаѣ теорія эллиптическихъ функцій даетъ очень простыя выраженія $\vartheta_3(0,q^n)$ и $\vartheta_3(0,q^m)$ черезъ $\vartheta_3(0,q)$ и черезъ эллиптическія функціи выраженій $\frac{2hK}{n}$ и $\frac{2hK}{m}$.

Мы разсмотримъ только случай n и m нечетныхъ.

$$\vartheta_3(0,q^n)\vartheta_3(0,q^m)=\frac{1}{\sqrt{nm}}\frac{2K}{\pi}F\left(\frac{\pi}{nm}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{nm}}\frac{2K}{\pi}\prod_{h=1}^{h=\frac{n-1}{2}}\frac{\sin am\frac{2hK}{n}}{\sin am\frac{(2h-1)K}{n}}\prod_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}}\frac{\sin am\frac{2hK}{m}}{\sin am\frac{(2h-1)K}{m}}. \quad (14)$$

Замѣнимъ $\frac{2K}{nm}$ черезъ $\frac{2Kx}{\pi}$ и положимъ, что числа n и m первыя между собою. Вторая часть уравненія (14) обратится, если принимать x за неопредѣленное, въ двойно-періодическую функцію съ періодами $2K$ и $2K'i$; безконечности у этой функціи будутъ одиночныя. Вслѣдствіе этого къ этой функціи можно примѣнить теорему, находящуюся на страницѣ 257 трактата Бріо и Буке; по этой теоремѣ предъидущая функція изображается въ видѣ суммы

$$\frac{2K}{\pi}F(x)=\sum A_h\left\{\frac{dlg\vartheta_1(x-\alpha_h)}{dx}-\Big/_{x=0}\frac{dlg\vartheta_1(x-\alpha_h)}{dx}\right\}, \quad (15)$$

гдѣ α_h есть такая величина x, взятая внутри элементарнаго параллелограмма, при которой разсматриваемая нами функція обращается въ безконечность; сумма распространяется на всѣ α_h. Въ этой суммѣ A вообще функціи модуля k; въ тѣхъ рѣдкихъ случаяхъ, когда всѣ A числовыя величины, задача наша рѣшена.

Не безполезно будетъ привести нѣкоторыя теоремы, которыя укажутъ, когда задачу возможно рѣшить такимъ образомъ. Для этого надо разсмотрѣть, какъ опредѣляется A_h. Подставимъ въ равенство (15) вмѣсто x величину α_h:

$$\frac{2K}{\pi}\, lim_{x=\alpha_h}\{F(x)(x-\alpha_h)\}=A_h lim_{x=\alpha_h}\frac{\vartheta'_1(x-\alpha_h)(x-\alpha_h)}{\vartheta_1(x-\alpha_h)}=A_h.$$

Безконечности $F(x)$ двухъ рѣзко отличныхъ типовъ. Во 1) можетъ одинъ изъ косинусовъ, входящихъ въ эту функцію, напримѣръ $cos\, am \frac{2pKx}{\pi}$, равняться нулю. Если при этомъ въ числителѣ $F(x)$ ни одна изъ функцій эллиптическихъ не равна нулю, то

$$\frac{2K}{\pi} A_h = - \frac{2K}{p\pi} F(\alpha_h) cos\, am \frac{2pK\alpha_h}{\pi} : sin\, am \frac{2pK\alpha_h}{\pi} \Delta\, am \frac{2pK\alpha_h}{\pi}.$$

Во 2) $cos\, am \frac{2pKx}{\pi} = \infty$. Дюрежъ на страницѣ 29 даетъ

$$\frac{sn \frac{2pKx}{\pi} \Delta \frac{2pKx}{\pi}}{cos\, am \frac{2pKx}{\pi}} = - \frac{sin\, am\left(\frac{2pKx}{\pi} + K + K'i\right) \Delta\, am \left(\frac{2pKx}{\pi} + K + K'i\right)}{cos\, am \left(\frac{2pKx}{\pi} + K + K'i\right)}.$$

$$\frac{2pK\alpha_h}{\pi} = 2nK + (2m+1)K'i; \text{ поэтому } cos\, am\left(\frac{2pK\alpha_h}{\pi} + K + K'i\right) = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\frac{2K}{\pi} A_h = + \frac{2K}{p\pi} F(\alpha_h) cos\, am \frac{2pK\alpha_h}{\pi} : sin\, am \frac{2pK\alpha_h}{\pi} \Delta\, am \frac{2pK\alpha_h}{\pi}.$$

Теперь переходимъ къ обѣщаннымъ теоремамъ.

Теорема 1. Если $cos\, am \frac{2pK\alpha_h}{\pi} = 0$ и p нечетно, то

$$\prod_{h=1}^{h=p-1} \frac{sin\, am \frac{2hK\alpha_h}{\pi} \Delta\, am \frac{2hK\alpha_h}{\pi}}{cos\, am \frac{2hK\alpha_h}{\pi}} = + 1.$$

Если же p четно (числитель предъидущаго выраженія не равенъ нулю), то это выраженіе равно или $+1$, или -1.

Доказательство.

$$cos\, am \frac{2pK\alpha_h}{\pi} = cos\, am \frac{2(r+s)K\alpha_h}{\pi}$$

$$=\frac{cs\frac{2rK\alpha_h}{\pi}\,cs\frac{2sK\alpha_h}{\pi}-sn\frac{2rK\alpha_h}{\pi}\,sn\frac{2sK\alpha_h}{\pi}\,\Delta\frac{2rK\alpha_h}{\pi}\,\Delta\frac{2sK\alpha_h}{\pi}}{1-k^2sn^2\frac{2rK\alpha_h}{\pi}\,sn^2\frac{2sK\alpha_h}{\pi}}=0.$$

Предположеніе, что числитель предъидущей дроби равенъ нулю, возможно; предположеніе же, что знаменатель равенъ безконечности, невозможно. Дѣйствительно, послѣднее предполагаетъ, что

$$\frac{2K\alpha_h}{\pi}=\frac{2nK}{r}+\frac{(2m+1)K'i}{r}\quad\text{или}\quad\frac{2nK}{s}+\frac{(2m+1)K'i}{s};$$

на самомъ же дѣлѣ это выраженіе равно

$$\frac{(2n+1)K}{p}+\frac{2mK'i}{p},$$

что несовмѣстимо; слѣдовательно

$$cs\frac{2rK\alpha_h}{\pi}\,cs\frac{2sK\alpha_h}{\pi}=sn\frac{2rK\alpha_h}{\pi}\,sn\frac{2sK\alpha_h}{\pi}\,\Delta\frac{2rK\alpha_h}{\pi}\,\Delta\frac{2sK\alpha_h}{\pi}.$$

Если же p четно, то

$$cs^2\frac{pK\alpha_h}{\pi}=sn^2\frac{pK\alpha_h}{\pi}\,\Delta^2 am\frac{pK\alpha_h}{\pi}.$$

Т е о р е м а 2. Если $cos\ am\frac{2Kp\alpha}{\pi}=0$, то

$$\frac{sn\frac{2Kr\alpha}{\pi}\,sn\frac{2K(p+r)\alpha}{\pi}\,\Delta\frac{2Kr\alpha}{\pi}\,\Delta\frac{2K(p+r)\alpha}{\pi}}{cs\frac{2Kr\alpha}{\pi}\,cs\frac{2K(p+r)\alpha}{\pi}}=-1.$$

Т е о р е м а 3. Если $cs\frac{2Kp\alpha}{\pi}=\infty$, то

$$\frac{sn\frac{2Kr\alpha}{\pi}\,sn\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}\,\Delta\frac{2Kr\alpha}{\pi}\,\Delta\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}}{cs\frac{2Kr\alpha}{\pi}\,cs\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}}=\pm 1.$$

Доказательство. Изъ равенства

$$\frac{cs\frac{2Kr\alpha}{\pi}cs\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}-sn\frac{2Kr\alpha}{\pi}sn\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}\Delta\frac{2Kr\alpha}{\pi}\Delta\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}}{1-k^2sn^2\frac{2Kr\alpha}{\pi}sn^2\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}}=\infty$$

слѣдуетъ, что

$$sin\, am\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}=\pm 1: k sin\, am\frac{2Kr\alpha}{\pi},$$

$$cos\, am\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}=\pm i\,\Delta am\frac{2Kr\alpha}{\pi}: k\, sin\, am\frac{2Kr\alpha}{\pi},$$

$$\Delta\, am\frac{2K(p-r)\alpha}{\pi}=\pm\, i cotg\, am\frac{2Kr\alpha}{\pi}.$$

Дальнѣйшее понятно.

Теорема 4. Если $cs\frac{2Kp\alpha}{\pi}=\infty$, то

$$\frac{sn\frac{2Kr\alpha}{\pi}sn\frac{2K(p+r)\alpha}{\pi}\Delta\frac{2Kr\alpha}{\pi}\Delta\frac{2K(p+r)\alpha}{\pi}}{cs\frac{2Kr\alpha}{\pi}cs\frac{2K(p+r)\alpha}{\pi}}=\pm 1.$$

Теорема 5. Если $cs\frac{2Kp\alpha}{\pi}=\infty$, то

$$\frac{sn\frac{pK\alpha}{\pi}\Delta\frac{pK\alpha}{\pi}}{cs\frac{pK\alpha}{\pi}}=+1,\ \text{или}\ -1,\ \text{или}\ \pm i.$$

Пользуясь этими теоремами, легко доказать, что по предъидущему способу можно опредѣлить число рѣшеній уравненій

$$x^2+3y^2=n,\ x^2+5y^2=n,\ x^2+7y^2=n,\ x^2+xy+y^2=n,$$

$$2x^2+2xy+3y^2=n,\ x^2+xy+2y^2=n$$

и нѣкоторыхъ другихъ.

§ 5. Разсмотримъ нѣкоторые изъ приведенныхъ примѣровъ.

Примѣръ 3.

$$\sum\sum q^{x^2+3y^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2K}{\pi}\frac{\sin am\frac{2K}{3}\,\Delta\, am\,\frac{2K}{3}}{\cos am\frac{2K}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{3}}\frac{dlg\cos am\frac{2Kx}{\pi}}{dx}.$$

Но мы имѣемъ

$$-\frac{dlg\cos am\,\frac{2Kx}{\pi}}{dx}=tgx+4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^r}{1+(-q)^r}\sin 2rx;$$

слѣдовательно

$$\sum\sum q^{x^2+3y^2}=1+2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{r}{3}\right)\frac{q^r}{1+(-q)^r}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}H(2n-1)\left\{q^{2n-1}+3q^{4(2n-1)}+3q^{16(2n-1)}+3q^{64(2n-1)}+\ldots\right\},$$

гдѣ $\left(\frac{r}{3}\right)=0$, $+1$ или -1, смотря по тому, $r=3k$, $3k+1$ или $3k+2$, а $H(2n-1)$ изображаетъ разность между числомъ дѣлителей $2n-1$ вида $6r+1$ и числомъ дѣлителей вида $6r+5$.

Для опредѣленія числа рѣшеній уравненія $x^2+3y^2=2n-1$ должно изъ числа дѣлителей $2n-1$ вида $6r+1$ вычесть число дѣлителей вида $6r+5$ и полученную разность удвоить.

Уравненіе $x^2+3y^2=2^{2\alpha-1}(2n-1)$ при $\alpha\geqq 1$ не имѣетъ рѣшеній.

Уравненіе $x^2+3y^2=2^{2\alpha}(2n-1)$ при $\alpha\geqq 1$ имѣетъ втрое больше рѣшеній, чѣмъ $x^2+3y^2=2n-1$.

Примѣръ 4.

$$\sum\sum q^{x^2+5y^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{2K}{\pi}\ \frac{\sin am\frac{2K}{5}\ \sin am\ \frac{4K}{5}\ \Delta\ am\frac{2K}{5}\ \Delta\ am\ \frac{4K}{5}}{\cos am\ \ \frac{2K}{5}\ \cos am\ \ \frac{4K}{5}}.$$

Здѣсь $F(x)$ обратится въ безконечность только въ томъ случаѣ, когда $\cos am\frac{4Kx}{\pi}=0$ или ∞, ибо при $\cos am\ \frac{2Kx}{\pi}=0$ или ∞ $\sin am\ \frac{4Kx}{\pi}=0$. Безконечностей всего 8:

$$\frac{2Kx}{\pi}=\frac{K}{2},\ \frac{3K}{2},\ \frac{K}{2}+K'i,\frac{3K}{2}+K'i,$$

$$\frac{K'i}{2},\ \frac{3K'i}{2},\ \frac{K'i}{2}+K,\frac{3K'i}{2}+K;$$

при этомъ

$$\frac{\sin am\ \frac{2K\alpha}{\pi}\ \Delta\ am\ \frac{2K\alpha}{\pi}}{\cos am\ \frac{2K\alpha}{\pi}}$$

имѣетъ слѣдующія значенія:

$$+1,-1,+1,-1,+i,-i,+i,-i.$$

Сообразно съ этимъ значенія коэффиціентовъ A въ формулѣ (15) будутъ

$$-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ +\ \frac{1}{2},\ +\frac{i}{2},\ -\frac{i}{2},\ +\frac{i}{2},\ -\frac{i}{2}.$$

Но въ теоріи эллиптическихъ функцій имѣется формула

$$\frac{\vartheta'_1(x)}{\vartheta_1(x)}=\cot g\ x+4\ \sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}\ \sin 2rx;$$

пользуясь этой формулою и руководствуясь формулою (15), можно получить слѣдующій результатъ:

$$\sum\sum q^{x^2+5y^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{\sin 18^0}-1+4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}(-1)^{r-1}\left[\cos\frac{2(2r-1)\pi}{5}-1\right]-\right.$$

$$\left.-4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\left[\cos\frac{4r\pi}{5}-1\right]\right\}.$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{2K}{\pi}=1+4\sum\frac{q^r}{1+q^{2r}}=1+4\sum(-1)^{r-1}\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}$$

и что $\cos\frac{2r\pi}{5}+\cos\frac{4r\pi}{5}=-\frac{1}{2}$, если r не дѣлится на 5, получаемъ

$$\sum\sum q^{x^2+5y^2}=1+\sum\left(\frac{r}{5}\right)\frac{q^r}{1+q^{2r}}+\sum(-1)^{r-1}\left(\frac{2r-1}{5}\right)\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}},$$

гдѣ $\left(\frac{r}{5}\right)$ и $\left(\frac{2r-1}{5}\right)$ равны 0, +1 и —1, смотря по тому, сравнимы ли r и $2r-1$ съ 0, ± 1 или ± 2 по модулю 5.

Если положить $n=5^\alpha k=5^\alpha.2^\gamma.d\delta$, гдѣ α и $\gamma \geqq 0$, d и δ нечетныя числа, то можно написать (k не дѣлится на 5)

$$\sum\sum q^{x^2+5y^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^n\left\{\left[\left(\frac{k}{5}\right)+1\right]\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{5}\right)\right\},$$

гдѣ внутренняя сумма распространяется на всевозможные d для даннаго n.

Число рѣшенiй уравненiя $x^2+5y^2=5^\alpha k=5^\alpha.2^\gamma d\delta$, *гдѣ* d *и* δ *нечетны, а* α *и* $\gamma \geqq 0$, *выражается формулою*

$$\left\{\left(\frac{k}{5}\right)+1\right\}\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{5}\right),$$

гдѣ k *не дѣлится на* 5.

Изъ этой общей теоремы легко вывести много интересныхъ слѣдствій. Такъ, видимъ, что уравненіе $x^2+5y^2=5^\alpha.4^\beta n$ имѣетъ столько же рѣшеній, сколько и уравненіе $x^2+5y^2=n$. Такъ, множитель $\left(\frac{k}{5}\right)+1$ указываетъ, что уравненія $x^2+5y^2=20h+2$, $20h+3$, $20h+7$, $20h+13$, $20h+17$, $20h+18$ не имѣютъ рѣшеній. Замѣтивъ же, что

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{5}\right)=(-1)^{\frac{d\delta-1}{2}}\left(\frac{d\delta}{5}\right)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{5}\right),$$

видимъ, что уравненія $x^2+5y^2=20h+11$, $20h+19$ также не имѣютъ рѣшеній. Вообще изъ всѣхъ чиселъ, не дѣлящихся на 5 и 4, только числа вида $20h+1$, $40h+6$, $20h+9$ и $40h+14$ изображаются черезъ форму x^2+5y^2, что доказано и другимъ путемъ (см. Теорію сравненій Чебышева).

Вычисленія значительно облегчаются, если воспользоваться формулою

$$\cos am\,(u+v)+\sin am\, u \sin am\, v\, \Delta\, am\,(u+v)=\cos am\, u \cos am\, v;$$

тогда

$$\sin am\frac{2K}{5}\sin am\frac{4K}{5}\Delta\, am\frac{6K}{5}=\cos am\frac{2K}{5}\cos am\frac{4K}{5}-\cos am\frac{6K}{5},$$

$$\frac{\sin am\frac{2K}{5}\sin am\frac{4K}{5}\,\Delta\, am\frac{4K}{5}\,\Delta\, am\frac{2K}{5}}{\cos am\frac{2K}{5}\cos am\frac{4K}{5}}=\Delta\, am\frac{2K}{5}\left(1+\frac{1}{\cos am\frac{2K}{5}}\right).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы имѣемъ рѣшеніе задачи о числѣ цѣлыхъ рѣшеній уравненія $2x^2+2xy+3y^2=n$, ибо это уравненіе можно представить такъ: $(2x+y)^2+5y^2=2n$.

§ 6. Тотъ же путь приведетъ насъ къ опредѣленію числа рѣшеній уравненій $x^2+7y^2=n$ и $x^2+xy+2y^2=n$. Дѣйствительно, если будемъ разсматривать

$$F(x)$$

$$=\frac{\sin am\frac{2Kx}{\pi}\sin am\frac{4Kx}{\pi}\sin am\frac{6Kx}{\pi}\Delta am\frac{2Kx}{\pi}\Delta am\frac{4Kx}{\pi}\Delta am\frac{6Kx}{\pi}}{\cos am\frac{2Kx}{\pi}\cos am\frac{4Kx}{\pi}\cos am\frac{6Kx}{\pi}},$$

то безконечности могутъ быть шести родовъ; но всякій разъ эти безконечности 1-го порядка, и коэффиціенты A суть числовыя величины. Разсмотримъ безконечности.

1) $\cos am\frac{2Kx}{\pi}=0$; тогда $\sin am\frac{4Kx}{\pi}=0$ и $\cos am\frac{6Kx}{\pi}=0$;

остальныя эллиптическія функціи въ $F(x)$ не нули и не безконечности. Что касается до A, то оно опредѣлится нижеслѣдующимъ образомъ:

$$A=\frac{2K}{\pi}\frac{sn\frac{2K\alpha}{\pi}\Delta\frac{2K\alpha}{\pi}\Delta\frac{4K\alpha}{\pi}sn\frac{6K\alpha}{\pi}\Delta\frac{6K\alpha}{\pi}}{cs\frac{4K\alpha}{\pi}}\lim_{x=\alpha}\frac{(x-\alpha)\,sn\frac{4Kx}{\pi}}{cs\frac{2Kx}{\pi}\;cs\frac{6Kx}{\pi}}$$

$$=+\frac{2}{3}.$$

2) $\cos am\frac{2Kx}{\pi}=\infty$; тогда $\cos am\frac{6Kx}{\pi}=\infty$ и $\sin am\frac{4Kx}{\pi}=0$;

$$A=+\frac{2}{3}.$$

3) $\cos am\frac{4Kx}{\pi}=0$; пользуясь второю теоремою страницы 92, получимъ $A=+\frac{1}{2}$.

4) $\cos am\frac{4Kx}{\pi}=\infty$; $A=$ или $+\frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2}$.

5) $\cos am\frac{6Kx}{\pi}=0$; но $\cos am\frac{2Kx}{\pi}$ не$=0$, слѣдовательно $\cos am\frac{4Kx}{\pi}$ не 0 и не ∞.

Теорема 1 страницы 91 даетъ намъ $A = -\frac{1}{3}$.

6) $\cos am \frac{6Kx}{\pi} = \infty$, но $\cos am \frac{2Kx}{\pi}$ не $= \infty$. Теорема 3 страницы 92 убѣждаетъ насъ, что A равно $+\frac{1}{3}$ или $-\frac{1}{3}$.

Итакъ всѣ A суть числовыя величины.

Я не стану выводить на самомъ дѣлѣ рядъ, выражающій $\Sigma\Sigma\, q^{x^2+7y^2}$, такъ какъ выводъ только длиненъ, но не труденъ.

Пріемъ, который выше описанъ, имѣетъ ограниченное примѣненіе. Дѣйствительно, если бы мы пожелали опредѣлить число рѣшеній уравненія $x^2+9y^2=n$ или $x^2+11y^2=n$, то нѣкоторыя изъ A_h оказались бы функціями k. Это не значитъ, что эти задачи не могутъ быть рѣшены съ помощью эллиптическихъ функцій.

Что касается до числа рѣшеній уравненія $x^2+9y^2=n$, то оно можетъ быть найдено слѣдующими простыми соображеніями. Квадратъ всякаго числа, дѣлящагося на 3, дѣлится на 9; а квадратъ всякаго другаго числа имѣетъ видъ $3k+1$. Поэтому уравненіе невозможно, если $n = 3k+2$ или если n дѣлится на 3, но не на 9. Если n дѣлится на 9, то вопросъ приводится къ опредѣленію числа рѣшеній уравненія $x^2+y^2=\frac{n}{9}$. Если $n=3k+1$, то или x, или y въ уравненіи $x^2+y^2=3k+1$ будетъ дѣлиться на 3; а потому число цѣлыхъ рѣшеній уравненія $x^2+9y^2=3k+1$ равно половинѣ числа рѣшеній $x^2+y^2=3k+1$.

§ 7. Перейдемъ теперь къ неопредѣленнымъ квадратнымъ уравненіямъ съ четырьмя и шестью перемѣнными. Отдѣлять вопросъ объ уравненіяхъ съ четырьмя неизвѣстными отъ вопроса объ уравненіяхъ съ шестью перемѣнными было бы неблагоразумно, потому что способы опредѣленія числа рѣшеній въ обоихъ случаяхъ одинаковы. Группировку различныхъ уравненій лучше сдѣлать на основаніи другихъ соображеній. Прежде всего мы раздѣлимъ всѣ разсматриваемыя уравненія на слѣдующіе два класса: 1-й классъ будетъ состоять изъ такихъ уравненій, число рѣшеній которыхъ можно опредѣлить съ помощью формулъ Ландена; ко 2-му классу будутъ принадлежать всѣ остальныя уравненія.

Сначала объ уравненіяхъ 1-го класса съ четырьмя неизвѣстными. Между этими уравненіями замѣчательны уравненія вида $x^2+y^2+2^m(z^2+t^2)=n$, замѣчательны тѣмъ, что опредѣленіе числа цѣлыхъ рѣшеній для такихъ уравненій часто тѣсно связано съ задачею о числѣ рѣшеній уравненія $x^2+2^m y^2=n$. Положимъ, что число рѣшеній уравненія $x^2+2^m y^2=n$ опредѣляется съ помощью ряда, выражающаго $\frac{2K}{\pi} f(K,K')$, гдѣ $f(K,K')$ есть нѣкоторая эллиптическая функція, аргументъ которой зависитъ отъ K и K'. Яснѣе выражаясь, положимъ, что $\vartheta_3(0,q)\ \vartheta_3(0,q^{2^m})$ преобразовывается въ $\frac{2K}{\pi} f(K,K')$. Очевидно, что число рѣшеній уравненія $x^2+y^2+2^m(z^2+t^2)=n$ можно опредѣлить, если будемъ знать рядъ съ неопредѣленнымъ q, опредѣляющій $\frac{4K^2}{\pi^2} f^2(K,K')$. Положимъ, что $\frac{2K}{\pi} f(K,K')$ есть частное значеніе $\frac{2K}{\pi}\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ эллиптическая функція, у которой безконечности одиночны; мы предполагаемъ, что $\frac{2K}{\pi} f(K,K')$ выражено рядомъ, расположеннымъ по степенямъ q, и что коэффиціенты при различныхъ степеняхъ q числовые. Понятно, что $\frac{4K^2}{\pi^2} f^2(K,K')$ есть частное значеніе $\frac{4K^2}{\pi^2}\varphi^2(x)$.

Безконечности у $\varphi^2(x)$ будутъ двойныя; эти безконечности могутъ быть или таковы, что $\frac{4K^2}{\pi^2}\varphi^2(x)$ изображается вблизи безконечности формулой $\frac{A}{z^2}$, гдѣ z безконечно малое, или таковы, что $\varphi^2(x)$ изображается черезъ $\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}$. Въ первомъ случаѣ, если кромѣ того A числовая величина, вопросъ и разрѣшается съ помощью выраженія $\frac{4K^2}{\pi^2}\varphi^2(x)$. Но если хотя одна изъ безконечностей втораго рода, или одна изъ A есть функція k, то надо искать другіе способы рѣшенія задачи.

Изъ предъидущаго ясно, что способъ, только что изложенный, далеко не общій; но и въ томъ случаѣ, если этотъ способъ не приложимъ, пріемы опредѣленія числа рѣшеній уравненій

$$x^2+2^m y^2=n \text{ и } x^2+y^2+2^m(z^2+t^2)=n$$

во многомъ сходны.

Вмѣстѣ съ уравненіями $x^2+y^2+2^m(z^2+t^2)=n$ должно разсматривать также нѣкоторыя уравненія, у которыхъ коэффиценты суть степени 2 и два изъ коэффиціентовъ одинаковы.

Чтобы быть яснѣе, выпишу тѣ немногія квадратичныя формы, которыя Ліувилль разсмотрѣлъ въ своемъ журналѣ (въ первыхъ томахъ 2-ой серіи) и которыя принадлежатъ къ разсматриваемому нами роду:

$$x^2+y^2+2(z^2+t^2),\ x^2+y^2+4(z^2+t^2),$$
$$x^2+2y^2+2z^2+4t^2,\ x^2+y^2+8z^2+8t^2,$$
$$x^2+y^2+16(z^2+t^2),\ x^2+4y^2+8(z^2+t^2),$$
$$x^2+4y^2+16(z^2+t^2),\ x^2+8y^2+8z^2+16t^2.$$

Ліувилль также ограничивался только опредѣленіемъ числа изображеній n черезъ эти формы.

При рѣшеніи этихъ задачъ съ помощью эллиптическихъ функцій, эти формы группируются около нѣсколькихъ главныхъ.

Для опредѣленія числа рѣшеній уравненія $x^2+y^2+2(z^2+t^2)=n$ должно знать рядъ, выражающій

$$\frac{4K^2}{\pi^2}(1+k')=\frac{4K^2}{\pi^2}\left(1+\Delta^2 am\frac{K}{2}\right).$$

Число рѣшеній уравненія $x^2+2y^2+2z^2+4t^2=2m$ равно числу рѣшеній уравненія $x^2+y^2+2(z^2+t^2)=m$, ибо x въ первомъ уравненіи непремѣнно четно. Число рѣшеній $x^2+2y^2+2z^2+4t^2=2m+1$ равно половинѣ числа рѣшеній уравненія $x^2+y^2+2(z^2+t^2)=2m+1$, ибо во второмъ уравненіи или x, или y нечетно въ то время, какъ y и x четны.

Для опредѣленія числа рѣшеній уравненія $x^2+y^2+4(z^2+t^2)=n$ должно расположить по степенямъ q выраженіе:

$$\vartheta_3^2(0,\sqrt{q})\vartheta_3^2(0,q^2)=\frac{1}{2}\vartheta_3^4(0,q)(1+k')(1+k)$$

$$=\frac{2K^2}{\pi^2}\left(1+\Delta^2 am\frac{K}{2}-k^2 sin^2 am\frac{K'i}{2}+ik^2 cos^2 am\frac{K+K'i}{2}\right).$$

Уравненія $x^2+y^2+8z^2+8t^2=n$, $x^2+4y^2+8z^2+8t^2=n$ и $x^2+8z^2+8t^2+16y^2=n$ составляютъ одну группу. Дѣйствительно, уравненіе $x^2+4y^2+8z^2+8t^2=n$ невозможно, если n вида $4m+2$ или $4m+3$; если же $n=4m$, то уравненіе приводится къ уравненію $x^2+y^2+2(z^2+t^2)=m$; наконецъ, если $n=4m+1$, то число рѣшеній равно половинѣ числа рѣшеній уравненія $x^2+y^2+8z^2+8t^2=4m+1$.

Также $x^2+8y^2+8z^2+16t^2=n$ возможно только въ томъ случаѣ, когда n вида $4m$ или $8m+1$; въ первомъ случаѣ вопросъ приводится къ уравненію $x^2+2y^2+2z^2+4t^2=m$; во второмъ—число рѣшеній равно половинѣ числа рѣшеній уравненія $x^2+y^2+8z^2+8t^2=8m+1$.

Что касается до уравненія $x^2+y^2+8z^2+8t^2=n$, то для опредѣленія числа рѣшеній этого уравненія тоже удобнѣе разсмотрѣть отдѣльно нѣсколько случаевъ. Случаи $n=4m+3$ и $n=8m+6$ невозможны. Если $n=2^\alpha m$, $\alpha\geqq 2$, то вопросъ приводится къ опредѣленію числа рѣшеній уравненія $x^2+y^2+2z^2+2t^2=2^{\alpha-2}m$.

Пусть $n=8m+2$; въ такомъ случаѣ должно разсмотрѣть выраженіе:

$$\vartheta^2_2(0,q)\,\vartheta^2_3(0,q^2)=\frac{1}{2}\,\vartheta^4_3(0,q)\,(k+kk')$$

$$=\frac{2K^2}{\pi^2}\left\{-k^2 sin^2 am\,\frac{K'i}{2}+ik^2 cos^2 am\,\frac{K+K'i}{2}\right\}.$$

Случай $x^2+y^2+8z^2+8t^2=4n+1$ разсмотрю подробнѣе. Въ этомъ случаѣ или x, или y нечетно; а потому

$$2\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\vartheta^2_3(0,q^2)=\vartheta^4_3(0,q)\,(\sqrt{k}+k'\sqrt{k})=$$

$$=\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{k}+\vartheta'_1(0,q)\,\vartheta\,(0,q),$$

такъ какъ $\vartheta'_1(0,q)=\vartheta\,(0,q)\,\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q)$.

Далѣе

$$\vartheta'_1(0,q)\,\vartheta\,(0,q)=2\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{r=1}^{r=+\infty}(-1)^{s+r}\,q^{s^2}\cdot q^{(r-\frac{1}{2})^2}\,(2r-1)$$

$$=2\left\{\sum\omega(8k+1)\sqrt[4]{q}^{\,8k+1}-\sum\omega(8k+5)\sqrt[4]{q}^{\,8k+5}\right\},$$

гдѣ $\omega(2n+1) = \Sigma(-1)^r(2r-1)$; послѣдняя сумма распространяется на всѣ нечетныя и положительныя рѣшенія уравненія $x^2+4y^2=2n+1$, при чемъ y есть число положительное, или отрицательное, или 0.

Что касается до $\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{k}$, то легко вычислить

$$k\cos am\frac{K'i}{2}\Delta\, am\frac{K'i}{2} = \sqrt{k}+k\sqrt{k},$$

$$ik\cos am\left(\frac{K'i}{2}+K\right)\Delta\, am\left(\frac{K'i}{2}+K\right) = \sqrt{k}-k\sqrt{k},$$

$$\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{k} = \frac{2K^2}{\pi^2}k\left\{cs\frac{K'i}{2}\Delta\frac{K'i}{2}+ics\left(\frac{K'i}{2}+K\right)\Delta\left(\frac{K'i}{2}+K\right)\right\}.$$

Дифференцированіе извѣстнаго ряда для $\sin am\frac{2Kx}{\pi}$ даетъ

$$\frac{4K^2}{\pi^2}k\cos am\frac{2Kx}{\pi}\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi} = 4\sum\frac{(2r-1)q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\cos(2r-1)x;$$

$$\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{k} = 2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(4r+1)q^{r+\frac{1}{4}}}{1-q^{4r+1}}+2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(4r+3)q^{3r+\frac{9}{4}}}{1-q^{4r+3}}$$

Обозначу черезъ $\zeta_1(n)$ сумму всѣхъ дѣлителей числа n. Сопоставляя все вышесказанное, имѣю теорему:

Уравненіе $x^2+y^2+8z^2+8t^2=8k+1$ *имѣетъ* $2\zeta_1(8k+1)+2\omega(8k+1)$, *а уравненіе* $x^2+y^2+8z^2+8t^2=8k+5$ *имѣетъ* $2\zeta_1(8k+5)-2\omega(8k+5)$ *рѣшеній.*

Совершенно излишне говорить объ уравненіяхъ

$$x^2+y^2+16(z^2+t^2)=n,\quad x^2+4y^2+16z^2+16t^2=n,$$

потому что и для этихъ уравненій способъ рѣшенія остается тотъ же, и даже второе можно было бы причислить къ только что разсмотрѣннымъ группамъ во всѣхъ случаяхъ, кромѣ случая $n=4k+1$, когда оно приводится къ первому, т. е. къ $x^2+y^2+16(z^2+t^2)=n$.

§ 8. Перехожу къ болѣе сложнымъ задачамъ 1-го класса съ четырьмя неизвѣстными. Для читателя выпишу всѣ тѣ формы, которыя изслѣдованы Ліувиллемъ въ его журналѣ, сохраняя тотъ порядокъ, въ какомъ онѣ Ліувиллемъ печатались.

$x^2+y^2+z^2+2t^2$, $x^2+2(y^2+z^2+t^2)$, $x^2+y^2+z^2+8t^2$, $x^2+2y^2+4z^2+8t^2$, $x^2+y^2+z^2+4t^2$, $x^2+4y^2+4z^2+4t^2$, $x^2+8(y^2+z^2+t^2)$, $x^2+4y^2+4z^2+8t^2$, $x^2+2y^2+4z^2+4t^2$, $x^2+2y^2+8z^2+8t^2$, $x^2+8y^2+16z^2+16t^2$, $x^2+16(x^2+z^2+t^2)$, $x^2+y^2+2z^2+4t^2$, $x^2+y^2+4z^2+8t^2$, $x^2+4y^2+8z^2+16t^2$, $x^2+2y^2+16z^2+16t^2$, $x^2+2y^2+2z^2+8t^2$, $x^2+2y^2+4z^2+16t^2$, $x^2+2y^2+8z^2+16t^2$, $x^2+y^2+2z^2+8t^2$, $x^2+y^2+4z^2+16t^2$, $x^2+2y^2+2z^2+16t^2$, $x^2+y^2+z^2+16t^2$, $x^2+y^2+8z^2+16t^2$, $x^2+y^2+2z^2+16t^2$, $x^2+8y^2+8z^2+64t^2$, $x^2+8y^2+16z^2+64t^2$, $x^2+8y^2+64z^2+64t^2$.

Вся эта масса примѣровъ при рѣшеніи ихъ съ помощію эллиптическихъ функцій группируется такъ, что только немногіе изъ примѣровъ требуется рѣшить основательно. Я не могу себѣ позволить разсмотрѣть даже и немногіе основные примѣры; но это и не требуется, такъ какъ способъ рѣшенія всѣхъ этихъ задачъ одинаковъ. Поэтому мы ограничимся приведеніемъ двухъ, трехъ примѣровъ. Замѣтимъ еще, что для рѣшенія прежнихъ задачъ мы употребляли исключительно эллиптическія функціи аргументовъ вида $\frac{mK+nK'i}{2}$, теперь же будемъ употреблять и аргументы вида $\frac{mK+nK'i}{4}$.

Для опредѣленія числа рѣшеній уравненій $x^2+y^2+z^2+2t^2=n$, $x^2+2y^2+2z^2+2t^2=n$ и нѣкоторыхъ другихъ важно знать величины $\frac{4K^2}{\pi^2}f(k')\sqrt{1+k'}$, гдѣ $f(k')$ раціональная функція отъ $\sqrt{k'}$. Выведемъ одинъ рядъ, выражающій одну изъ такихъ величинъ.

$$\Delta^2 am\frac{K'i}{4}=\frac{\cos am\frac{K'i}{2}+\Delta\, am\frac{K'i}{2}}{1+\cos am\frac{K'i}{2}}=\frac{(1+\sqrt{k})\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}+\sqrt{1+k}}$$

$$=(1+k)(1+\sqrt{k})-(k+\sqrt{k})\sqrt{1+k};$$

$$\Delta^2 am\frac{3K'i}{4}=-\frac{\cos^2 am\frac{K'i}{4}}{\sin^2 am\frac{K'i}{4}}=\frac{\cos am\frac{K'i}{2}+\Delta\, am\frac{K'i}{2}}{-1+\cos am\frac{K'i}{2}}$$

$$=(1+k)(1+\sqrt{k})+(k+\sqrt{k})\sqrt{1+k};$$

$$\frac{4K^2}{\pi^2}\left\{\Delta^2 am\frac{3K'i}{4}-\Delta^2 am\frac{K'i}{4}\right\}=\frac{8K^2}{\pi^2}(k+\sqrt{k})\sqrt{1+k}.$$

Замѣнимъ въ послѣдней формулѣ q черезъ q^4; тогда съ помощью Ланденовскихъ формулъ легко вычислить, что выраженіе

$$\frac{8K^2}{\pi^2}(k+\sqrt{k})\sqrt{1+k}$$

замѣнится выраженіемъ

$$\frac{K^2\sqrt{2}}{\pi^2}(1-k')\sqrt{1+k'}.$$

Исполнимъ тѣ же дѣйствія съ рядами, выражающими $\Delta^2 am\frac{K'i}{4}$ и $\Delta^2 am\frac{3K'i}{4}$. Мы имѣемъ

$$\frac{4K^2}{\pi^2}\left\{\Delta^2 am\frac{2Kx}{\pi}-\Delta^2 am\frac{2Ky}{\pi}\right\}=8\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rq^r}{1-q^{2r}}\left\{\cos 2rx-\cos 2ry\right\};$$

$$\frac{4K^2}{\pi^2}\left\{\Delta^2 am\frac{3K'i}{4}-\Delta^2 am\frac{K'i}{4}\right\}=4\sum\frac{r(q^{\frac{1}{4}r}-q^{\frac{3}{4}r}-q^{\frac{5}{4}r}+q^{\frac{7r}{4}})}{1-q^{2r}}; \quad (16)$$

$$\frac{K^2\sqrt{2}}{\pi^2}(1-k')\sqrt{1+k'}=4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r(q^r-q^{3r}-q^{5r}+q^{7r})}{1-q^{8r}}. \quad (17)$$

З а д а ч а 1. Опредѣлить число рѣшеній уравненія

$$x^2+y^2+z^2+2t^2=n.$$

Для этого требуется найти рядъ по степенямъ q для выраженія $\vartheta_3{}^2(0,q)\vartheta_3(0,q^2)=\frac{2K^2}{\pi^2}\sqrt{2}.\sqrt{1+k'}$. Легко видѣть, что

$$\frac{4K^2}{\pi^2}k'\sqrt{1+k'}=-\frac{4K^2}{\pi^2}k\cos am\left(\frac{K}{2}+K'i\right)\Delta\, am\left(\frac{K}{2}+K'i\right)$$

$$=\sqrt{2}-4\sum\frac{(2r-1)q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}\cos(2r-1)\frac{\pi}{4}\,. \tag{18}$$

Вслѣдствіе этого получаю формулу:

$$\frac{2K^2\sqrt{2}}{\pi^2}\sqrt{1+k'}=1-2\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{\frac{r^2+r}{2}}\frac{(2r+1)q^{2r+1}}{1-q^{2r+1}}+$$

$$+8\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r(q^r-q^{3r}-q^{5r}+q^{7r})}{1-q^{8r}}. \tag{19}$$

Теорема 1. *Если n обозначаетъ число вида $8k\pm1$, и если мы разлагаемъ его всячески на два множителя такъ, что $n=d\delta$, и обозначаемъ $\omega_1(n)=\sum(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}d$, то число рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2+2t^2=n$ будетъ $6\omega_1(n)$. Если же n число вида $8k\pm3$, то рѣшеній будетъ $10\omega_1(n)$.*

Доказательство. Въ формулѣ (19) послѣдняя сумма даетъ для всякаго нечетнаго числа $8\omega_1(n)$; первая же сумма даетъ $-2\omega(n)=-2\sum(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}d$. Слѣдовательно рѣшеній вообще $8\omega_1(n)-2\omega(n)$.

Пусть теперь d имѣетъ послѣдовательно видъ $8m+1, 8m+3, 8m+5, 8m+7$; тогда

при $n=8k+1$ δ имѣетъ видъ $8m+1, 8m+3, 8m+5, 8m+7$,
при $n=8k+3$ δ имѣетъ видъ $8m+3, 8m+1, 8m+7, 8m+5$,
при $n=8k+5$ δ имѣетъ видъ $8m+5, 8m+7, 8m+1, 8m+3$,
при $n=8k+7$ δ имѣетъ видъ $8m+7, 8m+5, 8m+3, 8m+1$.

Отсюда заключаю, что при $n=8k\pm1$

$$(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}},$$

а при $n=8k\pm3$

$$(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}=-(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}},$$

что доказываетъ теорему.

Такимъ же образомъ докажется другая теорема.

Теорема 2. *Если* $n=2^\alpha m$, *гдѣ* m *число нечетное, то число рѣшеній уравненія* $x^2+y^2+z^2+2t^2=n$ *будетъ*

$$2\left\{2^{\alpha+2}-(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right\}\omega_1(m),$$

гдѣ $\omega_1(m)$ *та же числовая функція, что въ предъидущей теоремѣ.*

Дѣйствительно, первая сумма даетъ то же, что и для нечетнаго n, а во второй суммѣ можно брать дробь только при $r=2^\alpha s$, гдѣ s нечетенъ; а это даетъ $8.2^\alpha\omega_1(m)$.

Задача 2. Найти число рѣшеній уравненія

$$x^2+2y^2+16z^2+16t^2=8k+3.$$

Для рѣшенія этой задачи требуется выразить въ видѣ ряда

$$\frac{1}{4}\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(0,q^2)\{\vartheta_3(0,q)+\vartheta(0,q)\}^2$$

$$=\frac{1}{4}\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(0,q^2)\vartheta_3{}^2(0,q)+\frac{1}{4}\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(0,q^2)\vartheta^2(0,q)+\frac{1}{2}\vartheta_2(0,q^2)\vartheta'_1(0,q).$$

Послѣдній членъ даетъ, какъ коэффиціентъ при q^{8k+3}, сумму $2\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}}r$, гдѣ r всевозможныя положительныя рѣшенія уравненія $x^2+2y^2=8k+3$. Выраженіе же

$$\frac{1}{4}\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(0,q^2)\{\vartheta_3{}^2(0,q)+\vartheta^2(0,q)\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{K^2}{\pi^2}\sqrt{k}\sqrt{1-k'}\{1+k'\}.$$

Замѣнивъ въ этомъ выраженіи q черезъ q^2, обратимъ предъидущее выраженіе въ

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{K^2}{\pi^2}(1+\sqrt{k'}-k'-k'\sqrt{k'})\sqrt{1-k'}.$$

Въ формулѣ (16) замѣню q черезъ q^2:

$$\frac{2K^2\sqrt{2}}{\pi^2}\left\{(1-k')\sqrt{1+k'}+(1+k')\sqrt{1-k'}\right\}=4\sum\frac{r(q^{\frac{1}{2}r}-q^{\frac{3}{2}r}-q^{\frac{5}{2}r}+q^{\frac{7}{2}r})}{1-q^{4r}}.$$

Съ помощію равенства (17) получаю

$$\frac{K^2(1+k')\sqrt{1-k'}}{\pi^2\sqrt{2}}=\sum\frac{(2r-1)\left\{q^{\frac{1}{2}(2r-1)}-q^{\frac{3}{2}(2r-1)}-q^{\frac{5}{2}(2r-1)}+q^{\frac{7}{2}(2r-1)}\right\}}{1-q^{8r-4}}. \quad (20)$$

Чтобы получить отдѣльно $\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{1-k'}$ и $\frac{4K^2}{\pi^2}k'\sqrt{1-k'}$, опредѣлимъ выраженіе

$$\frac{K^2\sqrt{2}}{\pi^2}k\cos am\frac{K}{2}\Delta\, am\frac{K}{2}=\frac{K^2\sqrt{2}}{\pi^2}k'\sqrt{1-k'}$$

$$=\sqrt{2}\sum\frac{(2r-1)q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\cos\frac{(2r-1)\pi}{4}=$$

$$\sum\left\{\frac{(8r+1)q^{\frac{8r+1}{2}}}{1-q^{8r+1}}-\frac{(8r+3)q^{\frac{8r+3}{2}}}{1-q^{8r+3}}-\frac{(8r+5)q^{\frac{8r+5}{2}}}{1-q^{8r+5}}+\frac{(8r+7)q^{\frac{8r+7}{2}}}{1-q^{8r+7}}\right\}. \quad (21)$$

Съ помощью уравненій (20) и (21) найдемъ ряды для $\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{1-k'}$ и $\frac{4K^2}{\pi^2}k'\sqrt{1-k'}$. Если въ этихъ рядахъ замѣнимъ q черезъ $-q$, то получимъ ряды для $\frac{4K^2}{\pi^2}k'\sqrt{k'}\sqrt{1-k'}$ и для $\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{k'}\sqrt{1-k'}$. Такимъ образомъ я вычислилъ

$$\frac{1}{4}\vartheta_2(0,q)\vartheta_2(0,q^2)\{\vartheta_3{}^2(0,q)+\vartheta^2(0,q)\}=-\sum\frac{(8r+1)q^{\frac{3}{4}(8r+1)}}{1-q^{16r+2}}+$$

$$+\sum\frac{(8r+3)q^{\frac{1}{4}(8r+3)}}{1-q^{16r+6}}+\sum\frac{(8r+5)q^{\frac{7}{4}(8r+5)}}{1-q^{16r+10}}-\sum\frac{(8r+7)q^{\frac{5}{4}(8r+7)}}{1-q^{16r+14}}.$$

Сопоставляя все указанное выше, выводимъ теорему:

Уравненіе $x^2+2y^2+16(z^2+t^2)=8k+3$ *имѣетъ*

$$\sum(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}d+2\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}}r$$

рѣшеній, гдѣ d, δ, u, r *суть всевозможныя положительныя числа, удовлетворяющія равенствамъ* $d\delta=8k+3$ *и* $r^2+2u^2=8k+3$.

§ 9. Пріемы, которые мы до сихъ поръ употребляли, могутъ иногда быть замѣнены съ пользою другими пріемами. Какъ примѣръ нѣсколько иныхъ, чѣмъ выше, соображеній, приведу одну задачу Ліувилля.

Задача 3. Опредѣлить число рѣшеній уравненія

$$x^2+8y^2+8z^2+64t^2=8k+1.$$

$$\frac{1}{2}\vartheta_2(0,q)\vartheta_3{}^2(0,q^2)\{\vartheta_3(0,q^4)+\vartheta(0,q^4)\}=\frac{1}{8}\vartheta_3{}^4(0,q)(1+k')(1+\sqrt{k'})\sqrt{k}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt[4]{8}}\vartheta_3(0,q^2)\vartheta_2{}^3(0,q)(1+k')\sqrt[4]{1-k'}\sqrt[8]{k'}=\frac{K^2}{2\pi^2}\sqrt{k}+$$

$$+\frac{1}{8}e^{-\frac{\pi i}{4}}\vartheta_3{}^4(0,-q)\sqrt{\frac{ki}{k'}}+\frac{1}{8}\vartheta_1{}'(0,q)\vartheta_3(0,q)+\frac{1}{8}e^{-\frac{\pi i}{4}}\vartheta_1{}'(0,-q)\vartheta_3(0,-q)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt[4]{8}}\vartheta_3(0,q^2)\vartheta_3{}^3(0,q)(1+k')\sqrt[4]{1-k'}\sqrt[8]{k'}.$$

На страницѣ 103 уже опредѣленъ $\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{k}$; второй же членъ предъидущей суммы получается изъ перваго замѣною q черезъ $-q$. Такимъ образомъ легко получаемъ

$$\frac{1}{8}\vartheta_3{}^4(0,q)(1+k')(1+\sqrt{k'})\sqrt{k}=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{(8r+1)q^{\frac{8r+1}{4}}}{1-q^{16r+2}}+\frac{(8r+3)q^{3\frac{8r+3}{4}}}{1-q^{16r+6}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(8r+5)q^{5.\frac{8r+5}{4}}}{1-q^{16r+10}}+\frac{(8r+7)q^{7.\frac{8r+7}{4}}}{1-q^{16r+14}}\right\}+\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}(-1)^r q^{\frac{1}{4}(2r+1)^2+s^2}(2r+1)+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}(-1)^{r+s}q^{\frac{1}{4}(2r+1)^2+s^2}(2r+1).$$

Остается еще выраженіе

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{8}}\vartheta_2(0,q^2)\vartheta_3^{\,3}(0,q)(1+k')\sqrt[4]{(1-k')}\sqrt[8]{k'}.$$

До сихъ поръ мы всегда старались теты съ разными аргументами выразить черезъ $\vartheta_3(0,q)$ и черезъ функціи k и k'; здѣсь мы поступимъ совсѣмъ обратно: а именно вычислимъ наше выраженіе черезъ теты и ихъ производныя съ аргументомъ $\frac{\pi}{4}$. Изъ формулъ (12) находимъ

$$\vartheta^4\left(\frac{\pi}{4}\right)=\vartheta_3^{\,4}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+k'}{2}\sqrt{k'}\,\vartheta_3^{\,4}(0,q),$$

$$\vartheta_2^{\,4}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\vartheta_1^{\,4}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-k'}{2}\sqrt{k'}\,\vartheta_3^{\,4}(0,q).$$

Введу теперь въ вычисленіе $\vartheta_1'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}}\frac{\cos amx'}{\cos x}=\lim_{x=\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{\cos^2 amx'-\sin^2 amx'\,\Delta^2 amx'}{1-k^2\sin^4 amx'}:(\cos^2 x-\sin^2 x)\right\},$$

$$\text{гдѣ } x'=\frac{2Kx}{\pi}.$$

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}}\frac{\cos amx'}{\cos x}=\left.\frac{2K}{\pi}\right/\left.\frac{\sin amx'\,\Delta amx'}{\sin x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{2Kk'}{\pi}.$$

Замѣню эллиптическія функціи черезъ теты-функціи:

$$\frac{2Kk\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{\vartheta^4\left(\frac{\pi}{4}\right)-\vartheta_1^{\,4}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}\right)\vartheta\left(\frac{\pi}{4}\right)+\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\,\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{x=\frac{\pi}{4}}\frac{\vartheta_2\vartheta-\vartheta_1\vartheta_3}{\cos x-\sin x}$$

$$=\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}\right)+\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_3'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}.$$

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_1'\left(\frac{\pi}{4}\right)+\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_3'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4K^2}{\pi^2}\frac{k'\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{k'}. \qquad (22)$$

Замѣню въ формулѣ (22) q черезъ $-q$:

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}\right)\vartheta'_1\left(\frac{\pi}{4}\right)-\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\vartheta'_3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4K^2}{\pi^2}\frac{\sqrt{k}.\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{2}}. \qquad (23)$$

Изъ равенствъ (22) и (23) выводимъ

$$\vartheta'_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\vartheta_3{}^3(0,q)(1+k')\sqrt[4]{1-k'}\sqrt[8]{k'}. \qquad (24)$$

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{8}}\vartheta_2(0,q^2)\vartheta_3{}^3(0,q)(1+k')\sqrt[4]{1-k'}.\sqrt[8]{k'}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vartheta_1'\left(\frac{\pi}{4}\right)\vartheta_2(0,q^2)$$

$$=\sqrt{2}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^r(2r+1)q^{\frac{1}{4}(2r+1)^2+2s^2}\cos(2r+1)\frac{\pi}{4}$$

$$=\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+\frac{r^2+r}{2}}(2r+1)q^{\frac{1}{4}(2r+1)^2+2s^2}.$$

Сопоставляя двѣ выведенныя нами формулы, получаемъ теорему: *Уравненіе*

$$x^2+8y^2+8z^2+64t^2=8k+1$$

имѣетъ

$$\frac{1}{2}\left\{\sum d+\sum(-1)^{\frac{r-1}{2}}r\right\}+\sum(-1)^{\frac{h-1}{2}+\frac{h^2-1}{8}}h$$

рѣшеній, гдѣ r и h всевозможныя положительныя числа, удовлетворяющія равенствамъ $r^2+4s^2=8k+1$, $h^2+2u^2=8k+1$, при чемъ одни и тѣ же r и h, соотвѣтствующіе различнымъ s и u, должны всѣ входить въ сумму; d—всевозможные дѣлители $8k+1$.

§ 10. Въ IX и X томахъ 2-ой серіи своего журнала Ліувилль опредѣляетъ число цѣлыхъ рѣшеній для простѣйшихъ квадратныхъ уравненій съ 6 неизвѣстными, коэффиціенты которыхъ суть степени 2; при примѣненіи эллиптическихъ функцій задачи эти

разрѣшаются съ помощью формулъ Ландена. Не дѣля задачи на группы, привожу ихъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ напечатаны Ліувиллемъ.

$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2r^2$, $x^2+2(y^2+z^2+t^2+u^2+r^2)$, $x^2+y^2+z^2+t^2+2(u^2+r^2)$, $x^2+y^2+2(z^2+t^2+u^2+r^2)$, $x^2+2(y^2+z^2+t^2+u^2)+4r^2$, $x^2+4(y^2+z^2+t^2+u^2+r^2)$, $x^2+y^2+4(z^2+t^2+u^2+r^2)$, $x^2+2y^2+2z^2+4(t^2+u^2+r^2)$, $x^2+y^2+z^2+4(t^2+u^2+r^2)$, $x^2+y^2+2z^2+2t^2+4u^2+4r^2$, $x^2+y^2+z^2+t^2+4u^2+4r^2$, $x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4r^2$, $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4r^2$, $x^2+4(y^2+z^2+t^2+u^2)+16r^2$.

Но прежде этихъ задачъ, конечно, былъ изслѣдованъ вопросъ о числѣ разложеній даннаго числа на 6 квадратовъ. Очевидно, что многія изъ предъидущихъ задачъ Ліувилля имѣютъ тѣсную связь съ задачею о 6 квадратахъ; такъ, одна изъ задачъ требуетъ сосчитать только тѣ разложенія на 6 квадратовъ, при которыхъ 5 изъ квадратовъ четны, другая,—чтобы 2 квадрата были четны и т. д.

Пріемы при разрѣшеніи всѣхъ этихъ задачъ отличаются отъ пріемовъ, употребленныхъ выше, только тѣмъ, что надо искать эллиптическія функціи, у которыхъ безконечности тройныя, если только задача не разрѣшается съ помощію только Якобіевыхъ функцій. По прежнему аргументы эллиптическихъ функцій будутъ вида $\frac{mK+nK'i}{4}$. Ограничусь и на этотъ разъ 3 примѣрами.

§ 11. Задача 1. Найти число рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+r^2=n$, или не указывая, какія изъ перемѣнныхъ должны быть непремѣнно четны, или указывая. Для рѣшенія этой задачи должно разсмотрѣть суммы вида:

$$\vartheta_3{}^m(0,q)\vartheta_3{}^{6-m}(0,q^4)=\frac{1}{2^{6-m}}\vartheta_3{}^6(0,q)(1+\sqrt{k'})^{6-m}.$$

Тригонометрическій рядъ для $\Delta^2\, am\,\frac{2Kx}{\pi}$ продифференцируемъ разъ, а для $\Delta\, am\,\frac{2Kx}{\pi}$ два раза; тогда получимъ

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k^2 \sin am\frac{2Kx}{\pi} \cos am\frac{2Kx}{\pi} \Delta\, am\frac{2Kx}{\pi} = 8\sum\frac{r^2q^r}{1-q^{2r}} \sin 2rx,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k^2 \left(\cos^2 am\frac{2Kx}{\pi} - \sin^2 am\frac{2Kx}{\pi}\right)\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}$$

$$= 16\sum\frac{r^2q^r}{1+q^{2r}} \cos 2rx.$$

Въ первой изъ этихъ формулъ положимъ сначала $x=\frac{\pi}{4}$, а потомъ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi K'i}{2K}$; во второй положимъ $x=0$, а потомъ въ полученномъ результатѣ замѣнимъ q черезъ $-q$. Такимъ образомъ получаемъ четыре формулы:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (k'-k'^2)=8\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{(2r-1)^2q^{2r-1}}{1-q^{4r-2}}, \tag{25}$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (k'+k'^2)=2+8\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{(2r-1)^2q^{4r-2}}{1-q^{4r-2}}, \tag{26}$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1-k'^2)=16\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^2q^r}{1+q^{2r}}, \tag{27}$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (k'^3-k')=16\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r^2q^r}{1+q^{2r}}. \tag{28}$$

Если мы въ формулахъ (25)—(28) замѣнимъ q черезъ q^2, то получимъ только двѣ различныя формулы:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1+k')^2\sqrt{k'}=4-16\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{(2r-1)^2q^{4r-2}}{1+q^{4r-2}}, \tag{29}$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k'\sqrt{k'}=1-4\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r}\frac{(2r-1)^2q^{4r-2}}{1+q^{4r-2}}+16\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r^2q^{2r}}{1+q^{4r}}. \tag{30}$$

Наконецъ возьмемъ слѣдующее выраженіе:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 kk' = \vartheta'_1(0,q)^2$$

$$= 4\sum_{r,\ s=0}^{+\infty}\sum(-1)^{r+s}(2r+1)(2s+1)q^{\frac{1}{4}(2r+1)^2+\frac{1}{4}(2s+1)^2}. \qquad (31)$$

Семь равенствъ (25)—(31) разрѣшаютъ нашу задачу, если въ (31) замѣнимъ q черезъ q^2.

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1-k'^2)\sqrt{k'}$$

$$= 16\sum_{r,\ s=0}^{+\infty}\sum(-1)^{r+s}(2r+1)(2s+1)q^{\frac{1}{2}(2r+1)^2+\frac{1}{2}(2s+1)^2}. \qquad (31)'$$

Дѣйствительно, эти семь равенствъ даютъ намъ возможность опредѣлить семь рядовъ, выражающихъ

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3, \quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\sqrt{k'}, \quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k', \quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k'\sqrt{k'},$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k'^2, \quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k'^2\sqrt{k'}, \quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k'^3;$$

а слѣдовательно мы всегда найдемъ рядъ для произведенія

$$\vartheta_3^{\ m}(0,q)\vartheta_3^{\ 6-m}(0,q^4).$$

Мы видимъ, что число рѣшеній выражается числовыми функціями двухъ родовъ: въ однѣхъ функціяхъ берется алгебраическая сумма отъ квадратовъ дѣлителей даннаго числа; въ функціи же другаго рода берется алгебраическая сумма произведеній всевозможныхъ рѣшеній уравненія

$$(2r+1)^2+(2s+1)^2=2n \text{ (или } x^2+y^2=4n+2).$$

Всѣ функціи, какого бы рода онѣ ни были, въ сущности получаются посредствомъ одного и того же алгориѳма: разложенія числа на первоначальные множители и потомъ комбинированіи этихъ первоначальныхъ множителей для составленія различныхъ

дѣлителей даннаго числа; только для функцій перваго рода эти первоначальные дѣлители дѣйствительны, а для функціи втораго рода они—Гауссовы первоначальныя числа (теорія Гауссовыхъ чиселъ изложена ниже).

Дѣлать выводы о числѣ рѣшеній всѣхъ шести уравненій:

$$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+r^2=n,\qquad x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4r^2=n,$$

$$x^2+y^2+z^2+t^2+4u^2+4r^2=n,\qquad x^2+y^2+z^2+4t^2+4u^2+4r^2=n,$$

$$x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4r^2=n,\qquad x^2+4y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4r^2=n$$

излишне; ограничимся окончить задачу для первыхъ только двухъ уравненій:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3=1+4\sum\frac{(-1)^r(2r-1)^2q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}+16\sum\frac{r^2q^r}{1+q^{2r}}. \tag{32}$$

Пусть

$$m=d\delta$$

и

$$\zeta_2(m)=\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2,$$

при чемъ мы предполагаемъ m нечетнымъ и распространяемъ сумму на всѣ дѣлители числа m.

Пусть $n=2^\alpha m$. Коэффиціентъ при q^n во второй суммѣ (32) будетъ $16.2^{2\alpha}\zeta_2(m)$; коэффиціентъ же въ первой суммѣ при $m=4h+1$ будетъ $-4\zeta_2(m)$, а при $m=4h+3$ будетъ $+4\zeta_2(m)$. Такимъ образомъ имѣемъ теорему:

Уравненіе $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+r^2=2^\alpha(2n+1)$, *гдѣ* α *или* 0, *или положительное цѣлое, имѣетъ* $4\{2^{2\alpha+2}-(-1)^n\}\zeta_2(2n+1)$ *рѣшеній.*

Число цѣлыхъ рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2=n$ можетъ быть выведено изъ равенства:

$$\frac{4K^3}{\pi^3}(1+\sqrt{k'})=1+2\sum\frac{(-1)^r(2r-1)^2q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}+8\sum\frac{r^2q^r}{1+q^{2r}}$$

$$-2\sum\frac{(-1)^r(2r-1)^2q^{4r-2}}{1+q^{4r-2}}-8\sum\frac{(-1)^rr^2q^{2r}}{1+q^{4r}}$$

$$+4\sum\sum(-1)^{r+s}(2r+1)(2s+1)q^{\frac{1}{2}(2r+1)^2+\frac{1}{2}(2s+1)^2}. \tag{33}$$

Будемъ, ради краткости, употреблять слѣдующія обозначенія:

$$\zeta_2(2n+1)=\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2, \varphi_2(2n+1)=\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2,$$

$$\Omega(8n+2)=\sum\sum(-1)^{r+s}(2r+1)(2s+1),$$

распространяя суммы на всѣ положительныя цѣлыя рѣшенія уравненій: $d\delta=2n+1$, $(2r+1)^2+(2s+1)^2=8n+2$. Замѣтимъ, что $\varphi_2(2n+1)=(-1)^n\zeta_2(2n+1)$. Первая сумма равенства (33) даетъ при n нечетномъ коэффиціентъ при q^n, $-2\varphi_2(n)$, и вообще, если $n=2^\alpha(2m+1)$, то коэффиціентъ при q^n въ первой суммѣ будетъ $-2\varphi_2(2m+1)$. Пусть $n=2^\alpha(2m+1)$. Вторая сумма при q^n даетъ коэффиціентъ $2^{2\alpha+3}\zeta_2(2m+1)$. Третья при $\alpha=1$ даетъ $+2\varphi_2(2m+1)$, при $\alpha>1$, $-2\varphi_2(2m+1)$. Четвертая при $\alpha=1$ даетъ $+8\zeta_2(2m+1)$, при $\alpha>1$, $-8.2^{2\alpha-2}\zeta_2(2m+1)$.

Теорема. *Число цѣлыхъ рѣшеній уравненія* $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2=n$ *при* $n=4h+1$ *равно* $6\zeta_2(4h+1)+4\Omega(8h+2)$, *при* $n=4h+3$ *равно* $10\zeta_2(4h+3)$, *при* $n=4h+2$ *рѣшеній* $40\zeta_2(2h+1)$, *при* $n=2^\alpha(2h+1)$, *гдѣ* $\alpha>1$, *рѣшеній* $\{3.2^{2\alpha+1}-4(-1)^h\}\zeta_2(2h+1)$.

Задача 2. Число цѣлыхъ рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2+t^2+2u^2+2v^2=n$ можно опредѣлить, разсмотрѣвъ выраженіе

$$\vartheta_3{}^4(0,q)\vartheta_3{}^2(0,q^2)=\frac{4K^3}{\pi^3}(1+k')=1+4\sum\frac{(-1)^r(2r-1)^2q^{4r-2}}{1-q^{4r-2}}+8\sum\frac{r^2q^r}{1+q^{2r}};$$

выраженіе это выводится изъ формулъ (26) и (27).

§ 12. Задача 3. Опредѣлить число цѣлыхъ рѣшеній $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2=n$. Разсмотримъ

$$\vartheta_3{}^5(0,q)\vartheta_3(0,q^2)=\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\frac{\sqrt{1+k'}}{\sqrt{2}}.$$

Продифференцируемъ два раза формулу $\frac{2Kk}{\pi}\sin am\frac{2Kx}{\pi}$ и одинъ разъ $\frac{4K^2}{\pi^2}\Delta^2 am\frac{2Kx}{\pi}$:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k\sin am\frac{2Kx}{\pi}\left\{\Delta^2 am\frac{2Kx}{\pi}+k^2\cos^2 am\frac{2Kx}{\pi}\right\}$$

$$=4\sum\frac{(2r-1)^2 q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\sin(2r-1)x,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k^2\sin am\frac{2Kx}{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}\Delta am\frac{2Kx}{\pi}=8\sum\frac{r^2q^r}{1-q^{2r}}\sin 2rx.$$

Въ первомъ равенствѣ положимъ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{K'i}{2K}$, а во второмъ $\frac{\pi K'i}{8K}$ и $\frac{3\pi K'i}{8K}$; два послѣдніе результата сложимъ:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3(2k'+k'^2)\frac{\sqrt{1+k'}}{\sqrt{2}}=3-2\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{(8r+1)^2q^{8r+1}}{1-q^{8r+1}}+\frac{(8r+3)^2q^{8r+3}}{1-q^{8r+3}}\right.$$

$$\left.-\frac{(8r+5)^2q^{8r+5}}{1-q^{8r+5}}-\frac{(8r+7)^2q^{8r+7}}{1-q^{8r+7}}\right\};$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\sqrt{k}\sqrt{1+k}(1+\sqrt{k})(1+k+\sqrt{k})=2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^2(q^{\frac{1}{4}r}+q^{\frac{3}{4}r}-q^{\frac{5}{4}r}-q^{\frac{7}{4}r})}{1-q^{2r}}.$$

Въ послѣдней формулѣ замѣнимъ q черезъ q^4:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\frac{\sqrt{1+k'}}{\sqrt{2}}(3-2k'-k'^2)=32\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^2(q^r+q^{3r}-q^{5r}-q^{7r})}{1-q^{8r}};$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\frac{\sqrt{1+k'}}{\sqrt{2}}=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r+1)^2q^{2r+1}}{1-q^{2r+1}}\sin\frac{(2r+1)\pi}{4}$$

$$+\frac{32}{3}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^2(q^r+q^{3r}-q^{5r}-q^{7r})}{1-q^{8r}}.$$

Пусть $n=2^{\alpha}(2m+1)$, а d и δ представляютъ всевозможныя положительныя рѣшенія уравненія $d\delta=2m+1$. Замѣтивъ, что $\left(\frac{-2}{h}\right)=(-1)^{\frac{h-1}{2}+\frac{h^2-1}{8}}$ и что $\left(\frac{-2}{d}\right)=\left(\frac{-2}{2m+1}\right)\left(\frac{-2}{\delta}\right)$, видимъ, что первая сумма даетъ при q^n коэффиціентъ

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{-2}{2m+1}\right)\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2,$$

а вторая сумма—

$$\frac{32}{3}\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2\times 2^{2\alpha}.$$

Будемъ, ради краткости, писать:

$$\sigma(2m+1)=\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

Теорема. *Число цѣлыхъ рѣшеній уравненія* $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2=2^{\alpha}(2m+1)(\alpha\geqq 0)$ *равно*

$$\frac{2}{3}\left\{4^{\alpha+2}-\left(\frac{-2}{2m+1}\right)\right\}\sigma(2m+1).$$

§ 13. Въ 4, 5, 6, 8, 9, 10 и 11 томахъ 2-ой серіи своего журнала Ліувилль разсматриваетъ, опять съ той же точки зрѣнія, простѣйшія формы съ 4 и 6 перемѣнными, у которыхъ коэффиціенты составлены изъ 2, 3, 5 только. Привожу здѣсь списокъ этихъ формъ, при чемъ для краткости буду употреблять обозначенія:

$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2=(a,b,c,d),$$
$$ax^2+by^2+cz^2+dt^2+eu^2+fv^2=(a,b,c,d,e,f).$$

Томъ 4: (1, 1, 5, 5).
Томъ 5: (1, 1, 3, 3).
Томъ 6: (1, 3, 4, 12).

Томъ 8: (1, 1, 1, 3), $x^2+y^2+2z^2+2zt+2t^2$, $x^2+y^2+z^2+zt+t^2$, (1, 1, 2, 6), (1, 2, 2, 3), (1, 2, 4, 6), $x^2+xy+y^2+z^2+zt+t^2$, (1, 1, 1, 12), (1, 2, 2, 12), (1, 1, 4, 12), (1, 4, 4, 12), (3, 4, 4, 4),

(1, 1, 3, 4), (1, 3, 4, 4), (2, 2, 3, 4), (1, 4, 12, 16), (1, 3, 6, 6), (2,3,3,6),(1,3,3,3), $2x^2+2xy+2y^2+3(z^2+t^2)$,$x^2+xy+y^2+3(z^2+t^2)$, (3, 3, 3, 4), (3, 3, 4, 12), (3, 4, 12, 12), (1, 3, 3, 12), (1, 3, 12, 12), (1, 12, 12, 12), (3, 4, 12, 48), $x^2+xy+y^2+2(z^2+zt+t^2)$.

Томъ 9: (1, 1, 1, 5), $x^2+y^2+2z^2+2zt+3t^2$, (1, 5, 5, 5), $2x^2+2xy+3y^2+5z^2+5t^2$, (1, 1, 1, 1, 1, 3), (1, 3, 3, 3, 3, 3), $x^2+y^2+z^2+t^2+2(u^2+uv+v^2)$,$2(x^2+xy+y^2)+3(y^2+t^2+u^2+v^2)$,$x^2+y^2+2(z^2+zt+t^2)+3u^2+3v^2$,$x^2+y^2+2yz+2z^2+3t^2$,$x^2+xy+y^2+6(z^2+zt+t^2)$,$2(x^2+xy+y^2)+3(z^2+zt+t^2)$,$x^2+xy+y^2+3(z^2+zt+t^2)$, (1, 2, 3, 6).

Томъ 10: (1, 1, 5, 5), $2x^2+2xy+3y^2+2z^2+2zt+3t^2$, (1, 1, 9, 9), $2x^2+2xy+5y^2+2z^2+2zt+3t^2$, (1, 1, 6, 6), (2, 2, 3, 3).

Томъ 11: $x^2+2y^2+2yz+2z^2+15t^2$,$2x^2+2xy+3(y^2+z^2+t^2)$,$3x^2+5y^2+10(z^2+zt+t^2)$, $2x^2+2xy+3y^2+15z^2+15t^2$, $x^2+2y^2+2yz+2z^2+6t^2$, (1, 2, 3, 3), $2x^2+3y^2+4z^2+4zt+4t^2$, (1, 2, 6, 6).

Надо однако замѣтить, что не для всѣхъ этихъ формъ Ліувилль умѣетъ найти число изображеній числа n черезъ данную форму; такъ, напримѣръ, Ліувилль не умѣетъ найти точное число рѣшеній уравненія $x^2+2y^2+3z^2+6t^2=n$ въ случаѣ нечетнаго n. Рѣшая эту задачу эллиптическими функціями, я тоже встрѣтилъ затрудненія, о которыхъ въ настоящее время не могу сказать, устранимы ли они или нѣтъ. Рѣшеніе задачъ, перечисленныхъ нами выше, приводится къ выраженію нѣкоторыхъ произведеній функцій-тетъ черезъ ряды, расположенные по степенямъ q. Функціи-теты имѣютъ при этомъ различные модули: q, q^2, q^3, q^4, q^5....

Въ задачахъ, въ которыхъ коэффиціенты формъ были степени 2, мы искали эти ряды, большею частью, стараясь выразить произведенія функцій-тетъ черезъ функціи k и k' и ища эллиптическую функцію, частное значеніе которой есть разсматриваемое выраженіе; отъ такого способа мы отступали только въ томъ случаѣ, когда задача могла быть рѣшена съ помощью особыхъ функцій, допускаемыхъ Ліувиллемъ и зависящихъ отъ нахожденія всѣхъ рѣшеній уравненій вида $x^2+2^my^2=n$ (m можетъ равняться нулю). При рѣшеніи тѣхъ задачъ мы

пользовались формулами Ландена. При рѣшеніи разсматриваемыхъ теперь нами задачъ прежде всего мы должны обратиться къ формуламъ преобразованія; эти формулы дадутъ намъ возможность выразить извѣстное выраженіе черезъ функціи одного и того же модуля. Далѣе, опять можно искать такую эллиптическую функцію, частное значеніе которой есть разсматриваемое выраженіе. Эта эллиптическая функція должна быть особаго характера: если дѣло идетъ объ уравненіи съ четырьмя неизвѣстными, то функція должна имѣть только двойныя безконечности и только вида $\frac{A}{z^2}$, гдѣ A постоянное числовое, а z безконечно малое; если въ разсматриваемомъ уравненіи шесть неизвѣстныхъ, то безконечности должны быть тройныя, вида $\frac{A}{z^3}$.

Найти приличную эллиптическую функцію составляетъ главнѣйшее затрудненіе при рѣшеніи задачи. Въ нѣкоторыхъ рѣдкихъ случаяхъ это затрудненіе разрѣшается очень просто. Дѣло въ томъ, что въ формулахъ преобразованія функція модуля k обыкновенно выражается въ эллиптической функціи нѣкотораго частнаго аргумента; иногда достаточно этотъ частный аргументъ замѣнить неопредѣленнымъ аргументомъ, напримѣръ, въ случаѣ формы $x^2+y^2+3z^2+3t^2$. Иногда, удачно выбравъ функцію k, не входящую непосредственно въ ходъ рѣшенія задачи, достаточно бываетъ въ этой, посторонней на первый взглядъ, функціи частный аргументъ замѣнить неопредѣленнымъ (случай $x^2+y^2+z^2+5t^2$).

Во всякомъ случаѣ на предъидущія соображенія не слѣдуетъ смотрѣть, какъ на описаніе способа, всегда приложимаго.

И здѣсь достаточно разсмотрѣть только нѣкоторыя основныя задачи, чтобы умѣть рѣшить всю массу выписанныхъ примѣровъ; однако же и основныхъ примѣровъ на столько много, что мы не можемъ ихъ всѣ разсмотрѣть, а ограничимся 6 задачами.

§ 14. Задача 1. Чтобы опредѣлить число цѣлыхъ рѣшеній уравненія $x^2+y^2+3(z^2+t^2)=n$, разсмотримъ выраженіе

$$\vartheta^2_3(0,q)\vartheta^2_3(0,q^3)=\frac{1}{3}\vartheta_3^4(0,q)\, \sin^2 am\frac{2K}{3}\Delta^2 am\frac{2K}{3}: \cos^2 am\frac{2K}{3}.$$

Эллиптическая функція

$$\frac{4K^2}{\pi^2}\sin^2 am\frac{2Kx}{\pi}\Delta^2 am\frac{2Kx}{\pi}:\cos^2 am\frac{2Kx}{\pi}$$

разрѣшитъ нашу задачу. Дѣйствительно,

$$\frac{4K^2}{\pi^2}\frac{\sin^2 am\frac{2Kx}{\pi}\Delta^2 am\frac{2Kx}{\pi}}{\cos^2 am\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{4K^2}{\pi^2}\frac{\Delta^2 am\frac{2Kx}{\pi}}{\cos^2 am\frac{2Kx}{\pi}}-\frac{4K^2}{\pi^2}\Delta^2 am\frac{2Kx}{\pi}$$

$$=\frac{4K^2}{\pi^2}k^2\sin^2 am\left(\frac{2Kx}{\pi}+K+K'i\right)-\frac{4K^2}{\pi^2}\Delta^2 am\frac{2Kx}{\pi};$$

$$\sum\sum\sum\sum q^{x^2+y^2+3z^2+3t^2}=1+\frac{8}{3}\sum\frac{nq^n}{1-(-q)^n}\left(1-\cos\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Теорема. *Число рѣшеній уравненія* $x^2+y^2+3z^2+3t^2=2.^\alpha 3^\beta(6n\pm1)$, *въ которомъ* α *и* $\beta\geqq0$, *равно* $4\Phi(6n\pm1)$ *въ случаѣ* $\alpha=0$ *и*

$$4(2^{\alpha+1}-3)\Phi(6n\pm1)$$

въ случаѣ $\alpha>0$; $\Phi(n)$ *обозначаетъ сумму всѣхъ дѣлителей числа* n.

Задача 2. Сколько рѣшеній имѣетъ уравненіе

$$x^2+xy+y^2+z^2+zt^2+t^2=n?$$

$$\sum\sum\sum\sum q^{4x^2+4xy+4y^2+4z^2+4zt+4t^2}$$

$$=\sum\sum\sum\sum q^{(2x+y)^2+3y^2+(2z+t)^2+3t^2}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(0,q^3)+\vartheta(0,q)\vartheta(0,q^3)\right\}^2=\frac{1}{4}\vartheta_3^2(0,q)\vartheta_3^2(0,q^3)$$

$$+\frac{1}{4}\vartheta_3^2(0,-q)\vartheta_3^2(0,-q^3)+\frac{1}{2}\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(0,q^3)\vartheta(0,q)\vartheta(0,q^3).$$

Первыя два произведенія опредѣляются въ задачѣ 1-й. Если-же въ выраженіи

$$\vartheta^2(0,q)\vartheta^2(0,q^3)=\vartheta_3^2(0,q)\vartheta_3^2(0,q^3)k'l',$$

гдѣ l' то же при q^3, что k' при q, замѣнимъ q черезъ q^2, то получимъ

$$\frac{1}{4}\vartheta_3{}^2(0,q)\vartheta_3{}^2(0,q^3)(1+k')(1+l')\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\cdot\frac{2\sqrt{l'}}{1+l'}=\vartheta_3{}^2(0,q)\vartheta_3{}^2(0,q^3)\sqrt{k'l'}$$

$$=\vartheta_3(0,q)\vartheta(0,q)\vartheta_3(0,q^3)\vartheta(0,q^3).$$

Я считаю излишнимъ продолжать эту задачу.

§ 15. Задача 3. Опредѣлить число цѣлыхъ рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2+5t^2=n$.

Эта задача находится въ тѣсной связи съ другою: опредѣлить число цѣлыхъ рѣшеній уравненія $x^2+5y^2+5z^2+5t^2=n$. Формулы преобразованія даютъ намъ, если обозначимъ

$$\vartheta_3{}^2(0,q)=\frac{2K}{\pi}, \vartheta_3{}^2(0,q^5)=\frac{2L}{\pi},$$

$$\frac{5L}{K}=\frac{1}{M}=\frac{sin^2am\frac{2K}{5}sin^2am\frac{4K}{5}\Delta^2am\frac{2K}{5}\Delta^2am\frac{4K}{5}}{cos^2am\frac{2K}{5}cos^2am\frac{4K}{5}}.$$

Чтобы воспользоваться формулами сложенія и вычитанія эллиптическихъ функцій, опредѣлимъ $\frac{1}{M}-1$:

$$\frac{1}{M}-1=-\frac{cos\,am\frac{2K}{5}cos\,am\frac{6K}{5}\left(1-k^2sin^2am\frac{2K}{5}sin^2am\frac{4K}{5}\right)^2}{cos^2am\frac{2K}{5}cos^2am\frac{4K}{5}}$$

$$=\frac{\left(1-k^2\,sin^2am\frac{2K}{5}sin^2am\frac{4K}{5}\right)^2}{cos\,am\frac{2K}{5}cos\,am\frac{4K}{5}}.$$

$$\left(\frac{1}{M}-1\right)\sqrt{\frac{1}{M}}$$

$$=\frac{\sin am\frac{2K}{5}\sin am\frac{4K}{5}\Delta am\frac{2K}{5}\Delta am\frac{4K}{5}\left(1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}\sin^2 am\frac{4K}{5}\right)^2}{\cos^2 am\frac{2K}{5}\cos^2 am\frac{4K}{5}}$$

$$=\left(\sin^2 am\frac{4K}{5}-\sin^2 am\frac{2K}{5}\right)\frac{\Delta^2 am\frac{4K}{5}-k^2\cos^2 am\frac{4K}{5}\sin^2 am\frac{2K}{5}}{\cos^2 am\frac{2K}{5}\cos^2 am\frac{4K}{5}}$$

$$=\left(\sin^2 am\frac{4K}{5}-\sin^2 am\frac{2K}{5}\right)\left(k^2+\frac{k'^2}{\cos^2 am\frac{2K}{5}\cos^2 am\frac{4K}{5}}\right);$$

$$\left(\frac{1}{M}-1\right)\sqrt{\frac{1}{M}}=k^2\sin^2 am\frac{4K}{5}-k^2\sin^2 am\frac{2K}{5}$$

$$-k^2\cos^2 am\left(\frac{4K}{5}+K+K'i\right)+k^2\cos^2 am\left(\frac{2K}{5}+K+K'i\right).$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\left(\frac{10L}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\right)\sqrt{\frac{20LK}{\pi^2}}=\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\left(\sin^2 am\frac{4K}{5}-\sin^2 am\frac{2K}{5}\right)$$

$$+\frac{4K^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\sin^2 am\frac{9K}{5}}-\frac{1}{\sin^2 am\frac{7K}{5}}\right)=8\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rq^r}{1-q^{2r}}\left(\cos\frac{2r\pi}{5}-\cos\frac{4r\pi}{5}\right)$$

$$-\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{10}}+\frac{1}{\sin^2\frac{9\pi}{10}}+8\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rq^{2r}}{1-q^{2r}}\left(\cos\frac{7r\pi}{5}-\cos\frac{9r\pi}{5}\right);$$

$$\left(\frac{10L}{\pi}-\frac{2K}{\pi}\right)\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}=4+4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rq^r}{1-q^{2r}}\left(\frac{r}{5}\right)$$

$$+4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r rq^{2r}}{1-q^{2r}}\left(\frac{r}{5}\right). \qquad (34)$$

Символъ $\left(\frac{r}{5}\right)=0$ при $r\equiv 0 (mod\ 5)$, $+1$ при $r\equiv\pm 1 (mod\ 5)$ и -1 при $r\equiv\pm 2 (mod\ 5)$.

Намъ требуется опредѣлить отдѣльно $\frac{2L}{\pi}\sqrt{\frac{4LK}{\pi^2}}$ и $\frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}$; а потому должно вывести еще одно равенство. Пусть L' то же для q^5, что K' для q; тогда имѣемъ

$$\frac{K}{L}=\frac{1}{M'}$$

$$=\frac{sin^2am\left(\frac{2L'}{5},l'\right)sin^2am\left(\frac{4L'}{5},l'\right)\Delta^2am\left(\frac{2L'}{5},l'\right)\Delta^2am\left(\frac{4L'}{5},l'\right)}{cos^2am\left(\frac{2L'}{5},l'\right)cos^2am\left(\frac{4L'}{5},l'\right)}$$

$$=\frac{sin^2am\frac{2L'i}{5}\,sin^2am\frac{4L'i}{5}\,\Delta^2am\frac{2L'i}{5}\,\Delta^2am\frac{4L'i}{5}}{cos^2am\frac{2L'i}{5}\,cos^2am\frac{4L'i}{5}}.$$

Легко теперь сообразить, что $\left(\frac{1}{M'}-1\right)\frac{1}{\sqrt{M'}}$ можетъ получиться изъ $\left(\frac{1}{M}-1\right)\frac{1}{\sqrt{M}}$, если k замѣнимъ l, аргументъ K черезъ $L'i$, а $K'i$ черезъ L и если измѣнимъ знаки у всѣхъ членовъ второй части равенства. [1]) Такимъ образомъ получимъ

$$\left(\frac{1}{M'}-1\right)\frac{1}{\sqrt{M'}}=l^2sin^2am\frac{2L'i}{5}-l^2sin^2am\frac{4L'i}{5}$$

$$+l^2cos^2am\left(\frac{4L'i}{5}+L'i+L\right)-l^2cos^2am\left(\frac{2L'i}{5}+L'i+L\right)$$

$$=l^2sin^2am\frac{2L'i}{5}-l^2sin^2am\frac{4L'i}{5}+l^2cos^2am\left(L+\frac{L'i}{5}\right)$$

$$-l^2cos^2am\left(L+\frac{3L'i}{5}\right);$$

[1]) Перемѣна знака происходитъ вслѣдствіе извлеченія корня изъ M'.

$$\left(\frac{2K}{\pi}-\frac{2L}{\pi}\right)\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}=8\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rq^{5r}}{1-q^{10r}}\left\{\cos\frac{4r\pi L'i}{5L}-\cos\frac{2r\pi L'i}{5L}\right.$$

$$\left.+\cos\left(r\pi+\frac{r\pi L'i}{5L}\right)-\cos\left(r\pi+\frac{3r\pi L'i}{5L}\right)\right\};$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}-\frac{2L}{\pi}\right)\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}=4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r(q^r-q^{3r}-q^{7r}+q^{9r})}{1-q^{10r}}$$

$$-4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r(q^{2r}-q^{4r}-q^{6r}+q^{8r})}{1-q^{10r}} \qquad (35)$$

Помножимъ равенство (35) на 5 и сложимъ результатъ съ (34):

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}=\sum_{x,y,z,t=-\infty}^{x,y,z,t=+\infty}\sum\sum\sum q^{x^2+y^2+z^2+5t^2}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rq^r}{1-q^{2r}}\left(\frac{r}{5}\right)$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r rq^{2r}}{1-q^{2r}}\left(\frac{r}{5}\right)+5\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r(q^r-q^{3r}-q^{7r}+q^{9r})}{1-q^{10r}}$$

$$-5\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r(q^{2r}-q^{4r}-q^{6r}+q^{8r})}{1-q^{10r}}. \qquad (36)$$

Пусть n число нечетное и вида $5^\beta m$, гдѣ m не дѣлится на 5. Пусть $m=d\delta$. Первая сумма (36), очевидно, дастъ коэффиціентъ при q^n, независимый отъ 5, именно $\sum\left(\frac{d}{5}\right)d=\left(\frac{m}{5}\right)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d$. Третья же сумма дастъ коэффиціентъ, зависящій отъ 5, ибо r непремѣнно надо взять дѣлящійся на 5^β; этотъ коэффиціентъ будетъ $5^{\beta+1}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d$. Итакъ, если n нечетно и равно $5^\beta m$, то разсматриваемое уравненіе имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній

$$\left\{5^{\beta+1}+\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

Пусть теперь $n=2^{\alpha}.5^{\beta}m$, гдѣ m нечетно и не кратно 5, $\beta\geqq 0$, $\alpha\geqq 1$. Первая сумма дастъ намъ

$$2^{\alpha}\sum\left(\frac{2^{\alpha}d}{5}\right)d=(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)2^{\alpha}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

Вторая сумма дастъ цѣлый рядъ членовъ, а именно

$$\left(\frac{m}{5}\right)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.\left\{2^{\alpha-1}(-1)^{\alpha-1}+2^{\alpha-2}(-1)^{\alpha-2}+\ldots-2-1\right\}$$

$$=\frac{-1}{3}\left\{(-1)^{\alpha}2^{\alpha}+5\right\}\left(\frac{m}{5}\right)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

Слѣдовательно обѣ суммы дадутъ

$$\frac{1}{3}(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}.5\right\}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

Третья сумма дастъ $2^{\alpha}.5^{\beta+1}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d$, четвертая же сумма

$$\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.\left\{-2^{\alpha-1}+2^{\alpha-2}-\ldots+(-1)^{\alpha-1}2+(-1)^{\alpha+1}\right\}.5^{\beta+1}.$$

Слѣдовательно третья и четвертая суммы даютъ

$$\frac{1}{3}\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}5\right\}5^{\beta+1}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

Такимъ образомъ, если $n=2^{\alpha}.5^{\beta}.m$, то коэффиціентъ при q^n въ (36) будетъ

$$\frac{1}{3}\left\{5^{\beta+1}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}5\right\}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d.$$

Теорема. *Если $m=10k\pm 1$ или $10k\pm 3$ и если α и β могутъ быть и нулями, то уравненіе $x^2+y^2+z^2+5t^2=2^{\alpha}.5^{\beta}.m$ имѣетъ*

$$\frac{1}{3}(-1)^{2\alpha}\left\{5^{\beta+1}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}5\right\}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d$$

цѣлыхъ рѣшеній, полагая, что δ *и* d *всевозможныя положительныя, цѣлыя рѣшенія уравненія* $d\delta=m$.

Задача 4. Опредѣлить число рѣшеній уравненія

$$x^2+5(y^2+z^2+t^2)=n.$$

Для этого сложимъ уравненія (34) и (35):

$$\frac{2L}{\pi}\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}=\sum\sum\sum\sum q^{x^2+5(y^2+z^2+t^2)}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rq^r}{1-q^{2r}}\left(\frac{r}{5}\right)$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r rq^{2r}}{1-q^{2r}}\left(\frac{r}{5}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r(q^r-q^{3r}-q^{7r}+q^{9r})}{1-q^{10r}}$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}r(q^{2r}-q^{4r}-q^{6r}+q^{8r})}{1-q^{10r}}. \qquad (37)$$

Теорема. *Число цѣлыхъ рѣшеній уравненія* $x^2+5(y^2+z^2+t^2)=2^\alpha.5^\beta.m$, *гдѣ* m *число не дѣлящееся на 2 и на 5, выражается формулою:*

$$\frac{1}{3}(-1)^{2\alpha}\left\{5^{\beta}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\left\{2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha}.5\right\}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d,$$

гдѣ $d\delta=m$.

Въ частности, если $n=5g\pm3$, *то рѣшеній нѣтъ;* ибо $5^\beta=1$, $(-1)^\alpha\left(\frac{m}{5}\right)=\left(\frac{n}{5}\right)=-1$, такъ что въ формулѣ будетъ множитель нуль.

§ 16. Задача 5. Опредѣлить число рѣшеній уравненія

$$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2=n.$$

Слѣдуетъ ожидать, что эта задача тѣсно связана съ задачею объ уравненіи $x^2+3y^2+3z^2+3t^2+3u^2+3v^2=n$; поэтому беремъ

$$\frac{1}{M^2}-1=\frac{\sin^4 am\frac{2K}{3}\Delta^4 am\frac{2K}{3}}{\cos^4 am\frac{2K}{3}}-1$$

$$=\frac{\sin^2 am\frac{2K}{3}\sin^2 am\frac{4K}{3}\Delta^2 am\frac{2K}{3}\Delta^2 am\frac{4K}{3}-\cos^2 am\frac{2K}{3}\cos^2 am\frac{4K}{3}}{\cos^4 am\frac{2K}{3}}$$

$$=\frac{-\cos am\frac{2K}{3}\cos am\, 2K\left(1-k^2\sin^2 am\frac{2K}{3}\sin^2 am\frac{4K}{3}\right)^2}{\cos^4 am\frac{2K}{3}}$$

$$=\frac{\left(1-k^2\sin^4 am\frac{2K}{3}\right)^2}{\cos^3 am\frac{2K}{3}}.$$

Въ этихъ формулахъ и другихъ формулахъ, употребляемыхъ въ этой задачѣ, буквы K, L, M и M_1 обозначаютъ слѣдующее:

$$\frac{2K}{\pi}=\vartheta_3(0,q),\quad \frac{2L}{\pi}=\vartheta_3(0,q^3),\quad \frac{1}{M}=\frac{3L}{K},\ \frac{1}{M_1}=\frac{K}{L}.$$

$$\frac{1}{M^2\sqrt{M}}-\frac{1}{\sqrt{M}}=\frac{\sin am\frac{2K}{3}\Delta am\frac{2K}{3}\left(1-k^2\sin^4 am\frac{2K}{3}\right)^2}{\cos^4 am\frac{2K}{3}}$$

$$=\frac{\sin am\frac{4K}{3}\Delta am\frac{4K}{3}\left(1-k^2\sin^4 am\frac{2K}{3}\right)^2}{\cos^4 am\frac{2K}{3}}$$

$$=\frac{2\sin am\frac{2K}{3}\Delta am\frac{2K}{3}\left(\Delta^2 am\frac{2K}{3}-k^2\sin^2 am\frac{2K}{3}\cos^2 am\frac{2K}{3}\right)}{\cos^3 am\frac{2K}{3}}$$

$$=2k^2 \sin am \frac{2K}{3} \cos am \frac{2K}{3} \Delta\, am \frac{2K}{3}$$

$$+2k^2 \sin am\left(\frac{5K}{3}+K'i\right) \cos am\left(\frac{5K}{3}+K'i\right) \Delta\, am\left(\frac{5K}{3}+K'i\right).$$

Воспользуемся уже употребленною выше формулою:

$$2k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 \sin am \frac{2Kx}{\pi} \cos am \frac{2Kx}{\pi} \Delta\, am \frac{2Kx}{\pi} = 16 \sum \frac{r^2 q^r}{1-q^{2r}} \sin 2rx;$$

$$\left\{\frac{36L^2}{\pi^2}-\frac{4K^2}{\pi^2}\right\}\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}=8+8\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{r}{3}\right)\frac{r^2q^r}{1-q^{2r}}+8\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r\left(\frac{r}{3}\right)\frac{r^2q^{2r}}{1-q^{2r}}, \qquad (38)$$

где $\left(\frac{r}{3}\right)$ равно нулю при r кратномъ 3 и—символу Лежандра при r не кратномъ 3.

Сдѣлаемъ нѣкоторыя замѣчанія относительно коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ q. Пусть показатель степени будетъ $n=2^\alpha.3^\beta.m$, гдѣ m не дѣлится ни на 3, ни на 2. Если $\alpha\geqq 0$ и $\beta\geqq 0$, то коэффиціентъ при q^n въ первой суммѣ есть $8.2^{2\alpha}\sum(-1)^\alpha\left(\frac{d}{3}\right)d^2$, гдѣ $m=d\delta$. Вторая же сумма даетъ коэффиціентъ только при $\alpha>0$, и этотъ коэффиціентъ будетъ

$$8\sum(-1)^\alpha\left(\frac{d}{3}\right)d^2\{-2^{2\alpha-2}+2^{2\alpha-4}-\ldots-(-1)^\alpha 4-(-1)^\alpha\}.$$

Слѣдовательно при $\alpha=0$ имѣю коэффиціентомъ при q^n

$$8\sum\left(\frac{d}{3}\right)d^2,$$

а при $\alpha>0$

$$\frac{8}{5}\{4^{\alpha+1}-(-1)^\alpha.9\}\sum(-1)^\alpha\left(\frac{d}{3}\right)d^2.$$

Обѣ формулы можно совмѣстить въ одну:

$$(-1)^\alpha.(-1)^{2^\alpha}.\frac{8}{5}\left(\frac{m}{3}\right)\{4^{\alpha+1}-(-1)^\alpha.9\}\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2. \qquad (39)$$

Требуется найти другое уравненіе въ помощь (38); для этого обратимся къ множителю, служащему для перехода отъ $\frac{2L}{\pi}$ къ $\frac{2K}{\pi}$:

$$\left(\frac{1}{M_1{}^2}-1\right)\frac{i}{\sqrt{M_1}}=\left\{\frac{\sin^4 am\frac{2L'i}{3}\Delta^4 am\frac{2L'i}{3}}{\cos^4 am\frac{2L'i}{3}}-1\right\}\frac{\sin am\frac{2L'i}{3}\Delta\, am\frac{2L'i}{3}}{\cos am\frac{2L'i}{3}}.$$

Послѣ совершенно такихъ же вычисленій, какъ выше, получаемъ

$$\left\{\frac{4K^2}{\pi^2}-\frac{4L^2}{\pi^2}\right\}\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}=8\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^2(q^r-q^{5r})}{1-q^{6r}}-8\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r^2(q^{2r}-q^{4r})}{1-q^{6r}}. \quad (40)$$

Пусть m не дѣлится ни на 2, ни на 3. Если $n=3^\beta m$, то коэффиціентъ при q^n въ (40) будетъ

$$8.3^{2\beta}\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

Если $n=2^\alpha.3^\beta.m$ и $\alpha>0$, то коэффиціентъ при q^n будетъ

$$8.9^\beta\{4^\alpha-4^{\alpha-1}+4^{\alpha-2}-\ldots-(-1)^\alpha 4-(-1)^\alpha\}\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2$$

$$=\frac{8}{5}.9^\beta(4^{\alpha+1}-(-1)^\alpha 9)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

Оба случая n четнаго и нечетнаго можно соединить вмѣстѣ:

$$\frac{8}{5}(-1)^{2^\alpha}.9^\beta\{4^{\alpha+1}-(-1)^\alpha 9\}\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2. \quad (41)$$

Для опредѣленія $\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}$ должно уравненіе (40) умножить на 9 и сложить съ (38); результатъ потомъ дѣлится на 8; поэтому коэффиціентъ при q^n въ рядѣ, выражающемъ $\frac{4K^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}$, будетъ

$$\frac{1}{5}(-1)^{2^\alpha}\left\{9^{\beta+1}+(-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right\}\left\{4^{\alpha+1}-(-1)^\alpha.9\right\}\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

Теорема. *Уравненіе* $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2=2^\alpha.3^\beta m$ *имѣетъ*

$$\frac{1}{5}(-1)^{2^\alpha}\left\{9^{\beta+1}+(-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right\}\left\{4^{\alpha+1}-(-1)^\alpha.9\right\}\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2$$

рѣшеній.

Задача 6. Чтобы опредѣлить число рѣшеній уравненія x^2+ $+3(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)=n$, должно опредѣлить $\frac{4L^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{4KL}{\pi^2}}$, для чего надо сложить равенства (38) и (40) и потомъ раздѣлить на 8. Вслѣдствіе этого для опредѣленія числа рѣшеній должно сложить (39) и (41) и раздѣлить на 8.

Теорема. *Уравненіе* $x^2+3(y^2+z^2+t^2+u^2+v^2)=2^\alpha\,.\,3^\beta\,.\,m$ $=2^\alpha.3^\beta(6h\pm1)$ *имѣетъ*

$$\frac{1}{5}(-1)^{2^\alpha}\left\{9^\beta+(-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right\}\left\{4^{\alpha+1}-(-1)^\alpha 9\right\}\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2$$

рѣшеній, гдѣ d *и* δ *опредѣляются уравненіемъ* $d\delta=m$.

§ 17. Продолжать изслѣдованія надъ квадратичными формами съ большимъ четнымъ числомъ перемѣнныхъ излишне, и безъ того ходъ такихъ изслѣдованій выясненъ слишкомъ большимъ числомъ примѣровъ. Не умолчу только объ одномъ вопросѣ, всегда очень занимавшемъ математиковъ; это—вопросъ о числѣ разложеній даннаго числа на 8, 10, 12 и т. д. квадратовъ.

Вопросъ о числѣ разложеній на 8 квадратовъ рѣшается очень просто: стоитъ только дифференцировать равенство, находящееся въ первой строкѣ страницы 113. Пусть $u=\frac{2Kx}{\pi}$.

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4\left\{k^2\cos^2 am u\,\Delta^2 am u-k^2\sin^2 am u\,\Delta^2 am u-k^4\sin^2 am u\cos^2 am u\right\}$$

$$=16\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^3q^r}{1-q^{2r}}\cos 2rx. \qquad (42)$$

Положимъ въ этой формулѣ сначала $x=0$, а потомъ $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi K' i}{2K}$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 k^2=16\sum\frac{r^3q^r}{1-q^{2r}};\quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 k'^2=1+16\sum\frac{(-1)^r r^3 q^{2r}}{1-q^{2r}}\text{ }^{1)}.$$

Сложимъ:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4=1+16\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^3q^r}{1-q^{2r}}+16\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r^3 q^{2r}}{1-q^{2r}}.$$

Т е о р е м а. *Если n число нечетное, то число представленій его черезъ сумму 8 квадратовъ равно ушестнадцатиренной суммѣ кубовъ всѣхъ дѣлителей этого числа. Если же $n=2^\alpha m$, гдѣ m нечетно и $\alpha\geqq 1$, и если $\sigma_3(m)=\sum d^3$, гдѣ d всевозможные дѣлители числа m, то число цѣлыхъ рѣшеній уравненія $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=8} x_\alpha^{\,2}=2^\alpha m$ будетъ*

$$\frac{16}{7}\{8^{\alpha+1}-15\}\sigma_3(m).$$

§ 18. Но вопросъ о представленіи числа черезъ большее число квадратовъ, на сколько мнѣ извѣстно, не можетъ считаться вполнѣ рѣшеннымъ. Въ 39 томѣ журнала Крелля (180 стр.) Эйзенштейнъ говоритъ, что число разложеній на 2, 4, 6, 8 квадратовъ зависитъ

1) $$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 k'^2=16\lim_{\varepsilon=0}\left\{\sum\frac{(-1)^r r^3 q^r}{1-q^{2r}}\cos\frac{r\pi K' i}{K}(1-\varepsilon)\right\}$$

$$=8\lim_{\varepsilon=0}\sum(-1)^r r^3 q^{r\varepsilon}+16\sum\frac{(-1)^r r^3 q^{2r}}{1-q^{2r}}.$$

Но

$$\sum(-1)^r r^3 q^{r\varepsilon}=\frac{d^3}{d\varepsilon^3}\left(\frac{1}{1+q^\varepsilon}\right):(lgq)^3=-\frac{q^\varepsilon}{(1+q^\varepsilon)^2}$$

$$+\frac{2q^{2\varepsilon}}{(1+q^\varepsilon)^3}+\frac{4q^{2\varepsilon}}{(1+q^\varepsilon)^3}-\frac{6q^{3\varepsilon}}{(1+q^\varepsilon)^4};$$

слѣдовательно

$$\lim_{\varepsilon=0}\sum(-1)^r r^3 q^{r\varepsilon}=\frac{1}{8}.$$

отъ суммы степеней дѣлителей числа, но что разложеніе на 10 квадратовъ только отчасти зависитъ отъ такой суммы. Ліувилль въ IX томѣ своего журнала (2 серіи, письмо къ Besge'у, стр. 296) объявляетъ, что онъ знаетъ только число разложеній на 12 квадратовъ четнаго числа, но нечетнаго—не знаетъ. Оставляя въ сторонѣ вопросъ о 10 квадратахъ, займемся вопросомъ о 12 квадратахъ.

Дифференцируемъ (42) равенство:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 [k^2 cos^2 amu\ \Delta^4 am\,u - k^2 sin^2 amu\ \Delta^4 amu + k^4 cos^4 amu\ \Delta^2 amu$$

$$+ k^4 sin^4 amu\ \Delta^2 am\,u - k^6 sin^2 amu cos^4 amu + k^6 sin^4 amu cos^2 amu$$

$$-9k^4 sin^2 amu cos^2 amu\ \Delta^2\ amu] = 16\sum\frac{r^5 q^r}{1-q^{2r}} cos 2rx.$$

Положимъ въ этой формулѣ послѣдовательно $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi K' i}{2K}$.

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 (k^2+k^4) = 16\sum\frac{r^5 q^r}{1-q^{2r}};$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 (2-3k^2+k^4) = 2-16\sum\frac{(-1)^r r^5 q^{2r}}{1-q^{2r}}.$$

Наконецъ къ этимъ двумъ равенствамъ прибавимъ третье:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 (k^2-k^4) =$$

$$\sum_{r,\,s,\,t,\,u=-\infty}^{+\infty}\sum\sum\sum(-1)^{r+s+t+u}(2r+1)(2s+1)(2t+1)(2u+1)q^{\frac{1}{4}\left\{\substack{(2r+1)^2+(2s+1)^2\\+(2t+1)^2+(2u+1)^2}\right\}}.$$

Изъ этихъ трехъ равенствъ легко вывести

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 = 1+8\sum\frac{r^5 q^r}{1-q^{2r}} - 8\sum\frac{(-1)^r r^5 q^{2r}}{1-q^{2r}} +$$

$$\sum\sum\sum\sum(-1)^{r+s+t+u}(2r+1)(2s+1)(2t+1)(2u+1)q^{\frac{1}{4}\left\{\substack{(2r+1)^2+(2s+1)^2\\+(2t+1)^2+(2u+1)^2}\right\}}.$$

При рѣшеніи нашей задачи вообще встрѣтятся двѣ функціи:

$$\sigma_5(m)=\sum d^5, P(m)=\sum(-1)^{r+s+t+u}(2r+1)(2s+1)(2t+1)(2u+1),$$

гдѣ m нечетное число, d всякій дѣлитель m, а $2r+1$, $2s+1$, $2t+1$ и $2u+1$ всевозможныя положительныя, нечетныя числа, сумма квадратовъ которыхъ равна $4m$.

Если m нечетное число и $n=2^\alpha m$, то q^n войдетъ въ первую сумму съ коэффиціентомъ $2^{5\alpha+3}\sigma_5(m)$; а вторая сумма дастъ коэффиціентъ

$$-\{2^{5\alpha-2}+2^{5\alpha-7}+....+2^8\}\sigma_5(m)+2^3\sigma_5(m)$$

$$=-\frac{2^{5\alpha+3}-2^8}{31}\sigma_5(m)+2^3\sigma_5(m)=\frac{24.21-2^{5\alpha+3}}{31}\sigma_5(m).$$

Теорема. *Если n число четное, равное $2^\alpha m$, гдѣ m нечетно, и если $\sigma_5(m)$=суммѣ пятыхъ степеней всѣхъ дѣлителей m, то число представленій n суммою 12 квадратовъ выразится формулою:*

$$\frac{24}{31}\{21+5.2^{5\alpha+1}\}\sigma_5(m).$$

Если же n число нечетное, то число представленій будетъ

$$8\sigma_5(n)+16P(n).$$

На страницѣ 298 тома 9 Journal de Mathématiques pures et appliquées (2 серія) Ліувилль говоритъ: «мнѣ кажется, трудно найти что нибудь вполнѣ удовлетворительное относительно числа разложеній нечетнаго числа на 12 квадратовъ». Такъ какъ однако онъ въ своихъ рѣшеніяхъ допускаетъ функціи, зависящія отъ нахожденія рѣшеній уравненій $x^2+y^2=n$ и $x^2+2y^2=n$, то отвѣтъ, данный выше и вводящій функцію $P(n)$, долженъ считаться вполнѣ удовлетворительнымъ. Дѣйствительно, для нахожденія рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2+t^2=n$ должно только умѣть рѣшить уравненія $x^2+y^2=n_1$ и $z^2+t^2=n-n_1$, гдѣ $n\geqq n_1\geqq 0$. Напомню еще о существованіи очень практичнаго способа рѣшенія уравненія $x^2+y^2=p$ при p первоначальномъ. Способъ этотъ данъ Гауссомъ въ § 265 его Disquisitiones arithmeticae; онъ состоитъ въ соста-

вленіи періода приведенныхъ формъ, эквивалентныхъ формѣ $-x^2+py^2$. Такимъ образомъ всегда легко найдутся рѣшенія уравненія $x^2+y^2+z^2+t^2=8n+4$.

§ 19. Въ предъидущемъ вездѣ говорилось о числѣ всѣхъ рѣшеній даннаго неопредѣленнаго уравненія; рѣшенія эти цѣлыя, но обыкновенно могутъ быть и положительны, и отрицательны. Можетъ случиться, что требуется узнать не число всѣхъ рѣшеній, а число нѣкоторыхъ только рѣшеній, удовлетворяющихъ извѣстному условію. Такъ, Ліувилль для нѣкоторыхъ уравненій опредѣляетъ число такихъ рѣшеній, въ которыхъ всѣ неизвѣстныя задачи не имѣютъ общаго множителя; въ одной изъ своихъ статей онъ опредѣляетъ число всѣхъ нечетныхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2+5t^2=n$; наконецъ онъ для нѣкоторыхъ случаевъ опредѣляетъ число всѣхъ нечетныхъ, положительныхъ и такихъ рѣшеній, въ которыхъ всѣ нечетныя неизвѣстныя разомъ не имѣютъ общихъ множителей.

Если извѣстно число всѣхъ рѣшеній уравненія, то первая задача рѣшается очень просто. Пусть $N(n)$ число всѣхъ рѣшеній, $M(n)$ число собственныхъ рѣшеній (такъ называетъ Ліувилль такія рѣшенія, въ которыхъ у неизвѣстныхъ нѣтъ общаго множителя); пусть $n=a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots.$, гдѣ $a, b, c, d\ldots.$ числа первоначальныя. Ясно, что число такихъ рѣшеній, въ которыхъ не входитъ общій множитель a, есть $M_1(n)=N(n)-N\left(\frac{n}{a^2}\right)$. Если не входятъ общіе множители a и b, то число такихъ рѣшеній $M_2(n)$ $=N(n)-N\left(\frac{n}{a^2}\right)-N\left(\frac{n}{b^2}\right)+N\left(\frac{n}{a^2b^2}\right)$. Вообще, продолжая такъ разсуждать, получимъ

$$M(n)=N(n)-\sum_{s=a,\,b,\,c\ldots}N\left(\frac{n}{s^2}\right)+\sum\sum_{s,\,t=a,\,b,\,c\ldots}N\left(\frac{n}{s^2t^2}\right)-\sum\sum\sum_{s,\,t,\,u=a,\,b,\,c\ldots}N\left(\frac{n}{s^2t^2u^2}\right)+\ldots.$$

Второй вопросъ рѣшится, если разсматривать произведеніе $\frac{1}{16}\vartheta_2{}^3(0,q)\,\vartheta_2(0,q^5)$. Но я считаю излишнимъ входить въ подробности.

ГЛАВА II.

2-й способъ Якоби. Изслѣдованіе Якоби о рядахъ, въ которыхъ показатели выражаются двумя квадратичными формами.

§ 20. Извѣстно, что эллиптическія функціи выражаются безконечными произведеніями; тѣ же эллиптическія функціи равны частнымъ двухъ тригонометрическихъ рядовъ, въ которыхъ модуль q расположенъ по степенямъ, слѣдующимъ нѣкоторой прогрессіи второй степени. Если придадимъ аргументу эллиптической функціи частное значеніе, то окажется, что нѣкоторая дробь, у которой числитель и знаменатель суть безконечныя произведенія выраженій вида $1+q^m$ или $1-q^m$ (m нѣкоторое положительное число), равна дроби, у которой числитель и знаменатель безконечные ряды, расположенные по степенямъ q, слѣдующимъ прогрессіи второй степени. Но дѣло въ томъ, что иногда одно и то же выраженіе можно различнымъ образомъ представить въ видѣ эллиптическаго произведенія (такъ Якоби называетъ дроби, у которыхъ числители и знаменатели могутъ изображать Якобіевы функціи); а потому мы получаемъ пропорціи между четырьмя суммами. Уничтожая знаменатели, мы получаемъ равенства между двойными суммами. Разсмотрѣніе этихъ равенствъ даетъ числовыя теоремы.

§ 21. Въ 37 томѣ журнала Крелля, Якоби выводитъ съ помощью этого способа значительное число равенствъ между двойными суммами; свои изслѣдованія Якоби ведетъ систематично, желая исчерпать весь вопросъ. Размѣръ и цѣль нашей статьи не дозволяетъ повторить сполна это изслѣдованіе; мы ограничимся выводомъ только нѣсколькихъ теоремъ, главнѣе для того, чтобы показать самые пріемы Якоби. Эти пріемы на столько изящны и интересны, что мы даже выведемъ, слѣдуя Якоби, основныя формулы его статьи, формулы, которыя легко было бы вывести изъ извѣ-

стныхъ въ теоріи эллиптическихъ функцій рядовъ и произведеній, подставляя вмѣсто аргументовъ нѣкоторыя частныя значенія.

Якоби выходитъ изъ равенства:

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2r})\cdot\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2r-1}z)\cdot\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2r-1}z^{-1})=1-q(z+z^{-1})$$
$$+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+q^{16}(z^4+z^{-4})-\ldots \qquad (1)$$

Это—различныя выраженія $\vartheta(x)$, въ которыхъ e^{xi} замѣненъ черезъ z. Равенство (1) вѣрно для всякаго значенія z и для такихъ значеній q, у которыхъ модуль менѣе 1.

Замѣнимъ q черезъ q^m (m нѣкоторое положительное число), а z или черезъ $+q^{\pm n}$, или черезъ $-q^{\pm n}$; тогда получимъ два равенства:

$$\Pi\{(1-q^{2mi+m-n})(1-q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{mi^2+ni}, \qquad (2)$$

$$\Pi\{(1+q^{2mi+m-n})(1+q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\}$$
$$=\Sigma q^{mi^2+ni}. \qquad (3)$$

Въ этихъ формулахъ i подъ знакомъ Π получаетъ значенія $0, 1, 2, 3, \ldots \infty$, а подъ знакомъ Σ значенія $0, \pm 1, \pm 2$ $\pm 3, \ldots \pm \infty$.

Придавая m и n частныя значенія

1) $m=1$, $n=0$, 2) $m=2$, $n=1$, 3) $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{2}$,

получаемъ пять частныхъ формулъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}=\Sigma(-1)^i q^{i^2},\\
&\Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}=\Sigma q^{i^2},\\
&\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}=\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i},\\
&\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}=\Sigma q^{2i^2+i},\\
&\Pi(1-q^{i+1})=\Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}i^2+\frac{1}{2}i}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Эти формулы отличаются отъ (2) и (3) тѣмъ, что въ нихъ или два произведенія равны между собою, или два произведенія соединяются въ одно, или всѣ три соединяются въ одно.

§ 22. Дальнѣйшее состоитъ въ томъ, что нѣкоторое безконечное произведеніе выражается въ видѣ частнаго двухъ изъ (2), (3) или (4) произведеній, а слѣдовательно въ видѣ частнаго двухъ суммъ. Но такъ какъ изобразить въ видѣ частнаго можно различными способами, то получаются равенства между двойными суммами.

Якоби беретъ прежде всего произведеніе

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots$$

Такъ какъ $(1+q)(1-q)=1-q^2$, то

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots=\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots..}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots..}$$

$$=\frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots..}. \qquad (5)$$

Первая изъ дробей (5) равенства есть эллиптическое произведеніе; въ этомъ убѣждаетъ насъ послѣднее изъ (4). Итакъ

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.=\frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}. \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) были извѣстны Эйлеру, который употреблялъ ихъ для вывода нѣкоторыхъ ариѳметическихъ теоремъ. Но то же самое произведеніе можно изобразить еще черезъ 6 дробей, у которыхъ числители и знаменатели произведенія вида (4). Въ знаменатель при этомъ не входятъ члены вида $1+q^m$; въ числитель же могутъ входить и члены вида $1+q^m$, и вида $1-q^m$. Такъ, напримѣръ, если возьмемъ знаменателемъ произведеніе

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^8)(1-q^9)(1-q^{11})(1-q^{12})\ldots.,$$

то числитель получится, если умножимъ это выраженіе на $\Pi(1+q^m)$. Такъ какъ $(1-q)(1+q)(1+q^2)=1-q^4$, $(1-q^4)(1+q^4)=1-q^8$, $(1-q^3)(1+q^3)(1+q^6)=1-q^{12}$ и т. д., то имѣемъ

$$\Pi(1+q^{i+1})=\frac{\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})}=\frac{\Sigma(-1)^i q^{6i^2+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}}. \qquad (7)$$

Сравненіе равенствъ (6) и (7) даетъ

$$\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{3i^2+i+2h^2+h}=\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{6i^2+2i+\frac{1}{2}(3h^2+h)}. \qquad (8)$$

Въ древности часто изучались особыя числа, называемыя многоугольными числами. По опредѣленію Діофанта m—угольное число есть сумма нѣсколькихъ членовъ ариѳметической прогрессіи, первый членъ которой 1, а разность положительное число $m-2$. Изъ опредѣленія слѣдуетъ, что m—угольныя числа имѣютъ видъ $\frac{1}{2}n[(m-2)(n-1)+2]$; а слѣдовательно треугольныя числа имѣютъ видъ $\frac{1}{2}(i^2+i)$, пятиугольныя $\frac{1}{2}(3i^2-i)$, семиугольныя $\frac{1}{2}(5i^2-3i)$ и т. д. Расширимъ это опредѣленіе тѣмъ, что допустимъ для i отрицательныя числа. Числа n и i называются сторонами многоугольныхъ чиселъ.

Принимая только что сказанное въ разсчетъ, видимъ, что (8) даетъ теорему:

Если какое нибудь число разлагается сначала на шестиугольное и двойное пятиугольное, а потомъ на пятиугольное и четверное пятиугольное же, то избытки чиселъ тѣхъ рѣшеній, въ которыхъ стороны обоихъ чиселъ, на которыя разлагаютъ данное, одинаковой четности, надъ тѣми, у которыхъ стороны неодинаковой четности, въ обоихъ случаяхъ равны.

§ 23. То же произведеніе $\Pi(1+q^{i+1})$ даетъ еще нѣсколько теоремъ. Подобныя же теоремы можно вывести съ помощью квадрата и куба этого произведенія.

Разсмотримъ $\Pi(1+q^{i+1})^3$, такъ какъ теорема, такимъ образомъ полученная, будетъ нѣсколько инаго характера, чѣмъ только что разсмотрѣнная. Изъ формулы (5) слѣдуетъ

$$\Pi(1+q^{i+1})^2=1:\Pi(1-q^{2i+1})^2,$$

также

$$\Pi(1+q^{i+1})=\frac{\Pi(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})}{\Pi(1-q^{2i+2})}.$$

$$\Pi(1+q^{i+1})^3=\frac{\Pi(1+q^{2i+1})\,(1-q^{4i+4})}{\Pi(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})}=\frac{\Sigma q^{2i^2+i}}{\Sigma(-1)^i q^{i^2}}. \tag{9}$$

Но если мы возьмемъ формулу

$$\vartheta_1(x)=2q^{\frac{1}{4}}\sin x\,\Pi(1-q^{2r})\Pi(1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r})$$

и опредѣлимъ

$$\lim_{x=0}\frac{\vartheta_1(x)}{\sin x}=2q^{\frac{1}{4}}\Pi(1-q^{2r})^3=\vartheta_1'(0)=2\Sigma(-1)^{r-1}q^{\frac{1}{4}(2r-1)^2}(2r-1),$$

то, перемѣнивъ q^2 на q, получаемъ

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^{i+1})^3=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(4i+1)q^{2i^2+i},$$

$$\Pi(1+q^{i+1})^3=\frac{\Pi(1-q^{2i+2})^3}{\Pi(1-q^{i+1})^3}=\frac{\Sigma(4i+1)q^{4i^2+2i}}{\Sigma(4i+1)q^{2i^2+i}}. \tag{10}$$

Изъ формулъ (9) и (10) выводимъ

$$\Sigma\Sigma(4i+1)q^{2i^2+i+2h^2+h}=\Sigma\Sigma(-1)^h(4i+1)q^{4i^2+2i+h^2}. \tag{11}$$

Замѣтимъ теперь, что при h четномъ число $16i^2+8i+1+4h^2$ имѣетъ видъ $8N+1$, а при h нечетномъ это число вида $8N+5$.

Теорема. *Если число вида* $8N+1$ *разлагать на квадратъ четнаго числа и квадратъ числа вида* $4i+1$ *(допуская отрицательныя рѣшенія), а потомъ число* $16N+2$ *разлагать на сумму квадратовъ чиселъ вида* $4i+1$ *и въ послѣднемъ случаѣ не считать различными разложенія* b^2+a^2 *и* a^2+b^2, *а также* a *и* a *въ формулѣ* a^2+a^2. *то алгебраическая сумма нечетныхъ рѣшеній въ обоихъ случаяхъ равна. Если же разлагаютъ числа* $8N+5$ *и* $16N+10$, *то предъидущія алгебраическія суммы имѣютъ равныя абсолютныя величины, но противоположные знаки.*

§ 24. Другія очень интересныя формулы слѣдуютъ изъ формулъ, опредѣляющихъ $\sqrt[4]{k}$ и $\sqrt[4]{k'}$. Изъ общеизвѣстныхъ формулъ выводимъ

$$\sqrt{k}=2\sqrt[4]{q}\prod\frac{(1+q^{2i+2})^2}{(1+q^{2i+1})^2},\ \sqrt[4]{k}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.\prod\frac{1+q^{2i+2}}{1+q^{2i+1}}. \qquad (12)$$

Замѣтивъ же теперь, что $1-q^{4i+4}=(1+q^{2i+2})(1-q^{2i+2})$, можемъ написать

$$\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\prod\frac{(1+q^{2i+1})\,(1-q^{4i+4})}{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.\frac{\Sigma q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{i^2}}. \qquad (13)$$

Также на основаніи (5) получаемъ

$$\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\prod\frac{(1-q^{2i+1})\,(1-q^{4i+4})}{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.\frac{\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}}{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}. \qquad (14)$$

Изъ равенствъ (13) и (14), замѣнивъ q черезъ q^8, выводимъ

$$\Sigma\Sigma(-1)^i q^{16i^2+(4h+1)^2}=\Sigma\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2+8h^2}. \qquad (15)$$

Теорема. *Для даннаго числа P избытокъ такихъ рѣшеній уравненія $P=(4m+1)^2+16n^2$, въ которыхъ n четно, надъ тѣми, въ которыхъ n нечетно, равенъ избытку такихъ рѣшеній уравненія $P=(4m'+1)^2+8n'^2$, въ которыхъ m' четно, надъ тѣми, въ которыхъ m' нечетно.*

Если теперь P первоначально, то разложенія на два квадрата и на квадратъ и удвоенный квадратъ возможны только однимъ способомъ (86 стран.); слѣдовательно i одновременно четно или нечетно въ обѣихъ суммахъ (15).

Теорема. *Если первоначальное число $8N+1$ одновременно представляется обѣими формами a^2+2b^2 и c^2+d^2, гдѣ c нечетно, то въ томъ случаѣ, когда a вида $8m\pm1$, d будетъ вида $8i$; если же a вида $8m\pm3$, то d вида $8i+4$.*

Эта теорема была еще доказана Гауссомъ; она и побудила Якоби сдѣлать свое изслѣдованіе, помѣщенное въ 37 томѣ журнала Крелля.

§ 25. Можно вывести еще нѣсколько теоремъ съ помощью различныхъ изображеній $\sqrt[4]{k}$ и $\sqrt[4]{k'}$, для которыхъ Якоби выводитъ по 4 дроби. Можно вывести нѣсколько теоремъ и инымъ, болѣе сложнымъ путемъ.

Въ формулѣ (2) положимъ сначала $m=\frac{5}{2}$ и $n=\frac{3}{2}$, а потомъ $m=\frac{5}{2}$ и $n=\frac{1}{2}$:

$$\Pi(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})=\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i^2+3i)},$$

$$\Pi(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+5})=\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i^2+i)}.$$

Перемножая оба эти равенства, получаемъ

$$\Pi(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})=\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{1}{2}(5i^2+3i+5h^2+h)}.$$

Послѣднее же изъ равенствъ (4) даетъ

$$\Pi(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})=\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{1}{2}(3i^2+i+15h^2+5h)}.$$

Такимъ образомъ получаемъ формулу:

$$\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}(\sqrt[40]{q})^{(10i+3)^2+(10h+1)^2}=\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}(\sqrt[24]{q})^{(6i+1)^2+5(6h+1)^2}. \quad (16)$$

Теорема. *Избытокъ такихъ рѣшеній уравненія* $(10i+3)^2+(10h+1)^2=10N$ *(гдѣ N данное число), у которыхъ $i+h$ четно, надъ такими, у которыхъ $i+h$ нечетно, равно избытку такихъ рѣшеній уравненія* $(6i_1+1)^2+5(6h_1+1)^2=6N$, *у которыхъ i_1+h_1 четно, надъ такими, у которыхъ i_1+h_1 нечетно.*

§ 26. Во всѣхъ предъидущихъ теоремахъ дѣло идетъ о двухъ уравненіяхъ, первыя части которыхъ двѣ квадратичныя формы или съ одинаковыми опредѣлителями, или съ разными. Понятно, то же самое вѣрно относительно всякой теоремы, выведенной тѣмъ способомъ, который изложенъ выше, потому что равенства, выведенныя такимъ путемъ, всегда касаются двойныхъ суммъ вида

$$\sum\sum \pm q^{mh^2+m'i^2+nh+n'i};$$

при этомъ $2m$ и $2m'$ цѣлыя положительныя числа. Характеръ формы, которой равны степени предъидущей суммы, зависитъ главнымъ образомъ отъ числа, полученнаго исключеніемъ изъ $4mm'$ всѣхъ квадратныхъ множителей. Характеръ же равенства зависитъ отъ двухъ такихъ чиселъ μ и ν; поэтому Якоби дѣлитъ всѣ эти ра-

венства по классамъ, обозначая каждый классъ знакомъ (μ, ν). Указанными выше способами выводятся равенства, принадлежащія 10 слѣдующимъ классамъ:

$$(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (1,2),\ (1,3),$$
$$(1,6),\ (2,3),\ (2,6),\ (3,6),\ (1,5).$$

Всѣхъ равенствъ выведено Якоби 30. Всѣ эти равенства слѣдуютъ изъ одной (1) фундаментальной формулы.

§ 27. Кромѣ равенствъ, выводимыхъ вышеописаннымъ способомъ, есть другія болѣе сложныя, состоящія изъ 3 и болѣе двойныхъ суммъ. Такія равенства можно вывести слѣдующимъ образомъ.

Равенству (1) можно придать 3 формы:

$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\}=\Sigma q^{i^2}z^i, \tag{17}$$

$$(z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})\}$$
$$=\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}z^{2i+1}, \tag{18}$$

$$(z-z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})\}$$
$$=\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}z^{2i+1}, \tag{19}$$

гдѣ опять, подъ знакомъ Π, i принимаетъ всѣ цѣлыя значенія отъ 0 до $+\infty$; а подъ знакомъ Σ отъ $-\infty$ до $+\infty$. Формула (18) получается изъ (17) замѣною q и z черезъ $\sqrt{q}$ и $z^2\sqrt{q}$, если послѣ замѣны умножить на z. Формула (19) получается изъ (18) замѣною z черезъ $z\sqrt{-1}$ и дѣленіемъ на $\sqrt{-1}$.

Если будемъ въ этихъ формулахъ замѣнять z черезъ корни 3-ей, 5-ой, 8-ой, 12-ой, 16-ой или 24-ой степеней отъ 1, то получимъ выраженія нѣкоторыхъ произведеній черезъ суммы. Если теперь для обозначенія безконечныхъ произведеній, встрѣчавшихся прежде, мы будемъ употреблять новыя выраженія, полученныя изъ (17), (18), (19), то иногда получатся такія равенства, въ которыхъ содержатся нѣсколько равенствъ, выводимыхъ съ помощью способовъ, описанныхъ выше, или получатся новыя равенства. Появленіе такихъ равенствъ, которыя можно выводить изъ простѣйшихъ, Якоби объясняетъ тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ эллиптическихъ транс-

цендентныхъ, что онѣ отъ подстановки вмѣсто z корня изъ единицы распадаются на нѣсколько рядовъ, получаемыхъ изъ тѣхъ же трансцендентныхъ замѣною q и z черезъ нѣкоторыя степени q.

Примѣнимъ предъидущее къ одному примѣру. Подставимъ въ уравненіе (19) сначала σ, нѣкоторый мнимый корень пятой степени изъ 1, а потомъ σ^2. Придадимъ для этого уравненію (19) нѣсколько иную форму:

$$(z-z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})\}$$

$$=\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+2)(5i+3)} z^{10i+5} + \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)} (z^{10i+1} - z^{-10i-1})$$

$$+\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)} (z^{-10i-3} - z^{10i+3}).$$

Такъ какъ i измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, то всегда можно i замѣнить черезъ $-i-1$ и членъ $(-1)^i z^{10i+5}$ черезъ $-(-1)^i z^{-10i-5}$; поэтому первая сумма изображается такъ:

$$\frac{1}{2}\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+2)(5i+3)} (z^{10i+5} - z^{-10i-5}).$$

Подставляя теперь σ и σ^2 вмѣсто z, получаемъ

$$\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}\sigma^2)(1-q^{i+1}\sigma^{-2})\}$$

$$=\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)} + (\sigma+\sigma^{-1})\,\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)};$$

$$\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}\sigma)(1-q^{i+1}\sigma^{-1})\}$$

$$=\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)} + (\sigma^2+\sigma^{-2})\Sigma\,(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}.$$

Перемножимъ два эти равенства:

$$\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})\} = \{\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}\}^2$$

$$-\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}.\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}$$

$$-\{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}\}^2 = \Sigma\Sigma(-1)^{i+h} q^{\frac{1}{2}(3i^2+i+15h^2+5h)}.$$

Послѣдняя сумма взята изъ послѣдняго (4) Слѣдовательно

$$\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{1}{2}(3i^2+15h^2+i+5h)}=\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{5}{2}i(5i+1)+\frac{5}{2}h(5h+1)}$$

$$-\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{5}{2}i(5i+1)+\frac{1}{2}(5h+1)(5h+2)}$$

$$-\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)+\frac{1}{2}(5h+1)(5h+2)}. \qquad (20)$$

Равенство (20) мы можемъ разложить на нѣсколько болѣе простыхъ равенствъ. Отберемъ для этого отдѣльно степени $\sqrt{q}$, которыя при дѣленіи на 5 даютъ въ остаткѣ 0, 2, 4. На правой сторонѣ стоятъ по порядку суммы, которыя содержатъ исключительно степени, сравнимыя съ 0, 2, 4 по модулю 5. Если въ выраженіи $\frac{1}{2}(3i^2+i)$ подставимъ вмѣсто i послѣдовательно $5i$, $-(5i+2)$, $-(5i+1)$, $5i+1$ и $5i+2$, то получимъ

$$\frac{5}{2}i(15i+1), \frac{5}{2}(3i+1)(5i+2), \frac{25}{2}i(3i+1)+1,$$

$$\frac{5}{2}i(15i+7)+2, \frac{5}{2}(3i+2)(5i+1)+2.$$

Такимъ образомъ изъ (20) послѣ нѣкоторыхъ простыхъ дѣйствій получимъ 3 равенства:

$$\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{1}{2}(5i^2+5h^2+i+h)}$$
$$=\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}\{q^{\frac{1}{2}(15i^2+3h^2+i+h)}+q^{\frac{1}{2}((3i+1)(5i+2)+3h^2+h)}\}, \qquad (21)$$

$$\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{1}{2}(5i^2+5h^2+i+3h)}=\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{5}{2}(3i^2+i)+\frac{1}{2}(3h^2+h)}, \qquad (22)$$

$$\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{\frac{1}{2}(5i^2+5h^2+3i+3h)}$$
$$=\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}\{q^{\frac{1}{2}(15i^2+3h^2+7i+h)}-q^{\frac{1}{2}((3i+2)(5i+1)+3h^2+h)}\}. \qquad (23)$$

Вторая изъ этихъ формулъ можетъ быть получена пріемами, разобранными нами въ началѣ главы.

Замѣтимъ теперь, что

$$\frac{5}{2}(15i^2+i), \frac{5}{2}(3i+1)(5i+2), \frac{5}{2}(15i^2+7i)+2, \frac{5}{2}(3i+2)(5i+1)+2$$

суть такія пятиугольныя числа, въ которыхъ i замѣнено черезъ $5i, -(5i+2), 5i+1, 5i+2$; а $\frac{5}{2}(5i^2+i)$ такое треугольное число, сторона котораго $5i$.

Теорема 1. *Если какое нибудь число $5N$ сначала разлагается на два такія треугольныя числа, у которыхъ стороны дѣлятся на 5, а потомъ на пятерное пятиугольное и такое пятиугольное, которое дѣлится на 5, то избытки такихъ рѣшеній, у которыхъ сумма сторонъ четна, надъ такими, у которыхъ сумма сторонъ нечетна, равны въ обоихъ случаяхъ.*

Теорема 2. *Если число N разлагается на пятиугольное число и пятерное пятиугольное, а число $5N$ на пятерное семиугольное и такое треугольное, у котораго сторона дѣлится на 5, то въ обоихъ случаяхъ равны избытки тѣхъ рѣшеній, у которыхъ сумма сторонъ четна, надъ такими, у которыхъ сумма сторонъ нечетна.*

Теорема 3. *Если число N разлагается на два семиугольныя числа, а $5N+2$ на такое пятиугольное, которое сравнимо съ 2 по модулю 5, и на пятерное пятиугольное, то въ обоихъ случаяхъ равны абсолютно, но со знаками обратными, избытки тѣхъ рѣшеній, въ которыхъ сумма сторонъ четна, надъ тѣми, въ которыхъ нечетна.*

§ 28. Въ заключеніе замѣтимъ, что небольшое число равенствъ между двойными суммами можетъ получиться изъ модулярныхъ уравненій 3-ей и 7-ой степеней. Извѣстно, что модулярныя уравненія этихъ степеней суть

$$\sqrt{kl}+\sqrt{k'l'}=1,\ \sqrt[4]{kl}+\sqrt[4]{k'l'}=1,$$

гдѣ k первоначальный, а l преобразованный модули. Если въ первомъ случаѣ для $\sqrt{k}$ и $\sqrt{k'}$, а во второмъ для $\sqrt[4]{k}$ и $\sqrt[4]{k'}$ выбрать тѣ выраженія, которыя имѣютъ одинаковые знаменатели, а также для $\sqrt{l}$ и $\sqrt{l'}$ или $\sqrt[4]{l}$ и $\sqrt[4]{l'}$, а потомъ уничтожить въ равенствахъ знаменатели, то получатся равенства обыкновенно между тремя двойными суммами, а иногда только между двумя.

Такъ, если примемъ

$$\sqrt{k}=\frac{2\sqrt[4]{q}\Sigma q^{4i^2+2i}}{\Sigma q^{i^2}},\sqrt{k'}=\frac{\Sigma(-1)^i q^{i^2}}{\Sigma q^{i^2}},\sqrt{l}=\frac{2\sqrt[4]{q^3}\Sigma q^{12i^2+6i}}{\Sigma q^{3i^2}},\sqrt{l'}=\frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2}}{\Sigma q^{3i^2}},$$

то получимъ

$$\Sigma\Sigma\{1-(-1)^{i+h}\}q^{i^2+3h^2}=4\Sigma\Sigma q^{4i^2+2i+12h^2+6h+1}. \quad (24)$$

Теорема. *Число разложенiй 4N на нечетный квадратъ и утроенный нечетный квадратъ равно двойному числу разложенiй N на квадратъ и утроенный квадратъ, если подъ N подразумѣвается нечетное число.*

Для вывода же равенствъ, содержащихъ три суммы, возьмемъ (13) и (14) равенства и прибавимъ къ нимъ выраженiя для $\sqrt[4]{k}$ и $\sqrt[4]{l'}$, имѣющiя тѣ же знаменатели, что $\sqrt[4]{k}$ и $\sqrt[4]{l}$.

$$\sqrt[4]{k'}=\prod\left(\frac{1-q^{2i+1}}{1+q^{2i+1}}\right)=\prod\frac{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})}{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})}=\frac{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}{\Sigma q^{i^2}}$$

$$=\prod\frac{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})}{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})}=\frac{\Sigma(-1)^i q^{i^2}}{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}.$$

Пользуясь теперь модулярнымъ уравненiемъ 7-ой степени, получимъ нѣсколько равенствъ, изъ которыхъ одно выписываемъ:

$$2\Sigma\Sigma(-1)^i q^{2i^2+14h^2+i+7h+1}=\Sigma\Sigma(-1)^i q^{2i^2+7h^2}-\Sigma\Sigma(-1)^{i+h}q^{i^2+14h^2}. \quad (25)$$

ГЛАВА III.

Способъ Эрмита. Формулы Кронекера и Гирстера 3-ей ступени. Задачи о числѣ разложеній на 3 квадрата и о числѣ изображеній формами съ 3 перемѣнными.

§ 29. Въ введеніи было объяснено, что способъ Эрмита состоитъ въ примѣненіи тригонометрическихъ рядовъ, изображающихъ произведенія эллиптическихъ и Якобіевыхъ функцій. Примѣнимъ этотъ способъ къ выводу формулъ Кронекера; будемъ при этомъ придерживаться одной изъ замѣтокъ Кронекера, потому что путь, указанный Кронекеромъ, требуетъ вывода гораздо меньшаго числа формулъ, чѣмъ это дѣлалъ въ своемъ изложеніи Эрмитъ.

Перемножимъ почленно два извѣстныя равенства:

$$\frac{2Kk}{\pi} \sin am \frac{2Kx}{\pi} = 4 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sqrt{q^{2r-1}}}{1-q^{2r-1}} \sin (2r-1) x, \tag{1}$$

$$\vartheta_2(x) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2r-1)^2} \cos (2r-1)x. \tag{2}$$

При перемноженіи получатся члены вида

$$\frac{4\, q^{\frac{1}{2}(2s-1)+\frac{1}{4}(2r-1)^2}}{1-q^{2s-1}} \{\sin 2(r+s-1)\, x + \sin 2(s-r)x\}.$$

Отберемъ всѣ члены, у которыхъ множителемъ $\sin 2nx$; коэффиціентъ у этого $\sin 2nx$ будетъ, если пропустимъ множитель 4,

$$\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2s-1)+\frac{1}{4}(2s-2n-1)^2}}{1-q^{2s-1}}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2s-1)+\frac{1}{4}(2s+2n-1)^2}}{1-q^{2s-1}}$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{q^{\frac{1}{2}(2s-1)+\frac{1}{4}(2n-2s+1)^2}}{1-q^{2s-1}}$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}q^{n^2+\frac{(2s-1)^2}{4}}\left\{q^{-n(2s-1)}-q^{n(2s-1)}\right\}:\left\{q^{-\frac{1}{2}(2s-1)}-q^{\frac{1}{2}(2s-1)}\right\}$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}q^{n^2+\left(\frac{2s-1}{2}\right)^2}\left\{q^{\frac{(2n-1)(2s-1)}{2}}+\ldots+q^{\frac{2s-1}{2}}+q^{-\frac{2s-1}{2}}+\right.$$

$$\left.\ldots+q^{-\frac{(2n-1)(2s-1)}{2}}\right\}=\sum_{s=1}^{\infty}q^{n^2}\left\{q^{-\frac{1}{4}}\left(q^{s^2}+q^{(s-1)^2}\right)\right.$$

$$\left.+q^{-\frac{9}{4}}\left(q^{(s+1)^2}+q^{(s-2)^2}\right)+\ldots+q^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\left(q^{(s+n-1)^2}+q^{(s-n)^2}\right)\right\}$$

$$=\left\{1+2\sum_{s=1}^{\infty}q^{s^2}\right\}q^{n^2}\left\{q^{-\frac{1}{4}}+q^{-\frac{9}{4}}+\ldots+q^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\,q^{n^2}\left(q^{-\frac{1}{4}}+q^{-\frac{9}{4}}+q^{-\frac{25}{4}}+\ldots+q^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\right).$$

Отсюда ясно, что умноженіе (1) и (2) даетъ

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\,\vartheta_2(x).k\,sin\,am\,\frac{2Kx}{\pi}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}sin\,2nx\left(\sqrt[4]{q^{-1}}+\sqrt[4]{q^{-9}}+\ldots+\sqrt[4]{q^{-(2n-1)^2}}\right). \qquad (3)$$

Помножимъ теперь обѣ части равенства (1) на $cos\,x$:

$$\frac{2Kk}{\pi} cos x\, sin\, am\, \frac{2Kx}{\pi} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1-q^{2n-1}} + \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1-q^{2n+1}}\right) sin\, 2nx. \qquad (4)$$

Если перемножимъ (3) и (4), то въ произведенiи двухъ рядовъ будетъ встрѣчаться членъ, не зависящiй отъ тригонометрическихъ функцiй; найдемъ этотъ членъ:

$$\frac{k^2K\sqrt{K}}{\pi^2\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} sin^2 am\, \frac{2Kx}{\pi}\, \vartheta_2(x) cos x\, dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\left(\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1-q^{2n-1}} + \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1-q^{2n+1}}\right)\left(\sqrt[4]{q^{-1}} + \ldots + \sqrt[4]{q^{-(2n-1)^2}}\right)$$

$$= q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\left(\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}} + \frac{q^n}{1-q^{2n+1}}\right)\left(1+q^{-2}+q^{-6}+\ldots+q^{-n(n-1)}\right)$$

$$= {}^{\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\ \sum_{b=0}^{b=\infty}\ \sum_{a=1}^{a=n}\left\{ q^{n^2+n-1+(2n-1)b-a^2+a} + q^{n^2+n+(2n+1)b-a^2+a}\right\}. \qquad (5)$$

Легко видѣть, что въ послѣднихъ скобкахъ показателями стоятъ два раза всевозможные (за исключенiемъ нѣкоторыхъ частнаго вида формъ, о которыхъ скажемъ потомъ особо) минусъ-опредѣлители такихъ приведенныхъ формъ $a'x^2+2b'xy+c'y^2=(a', b', c')$ съ отрицательными опредѣлителями, у которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ коэффицiентъ нечетенъ.

Дѣйствительно, если $b<n-a$, то выраженiе $n^2+n-1+(2n-1)b-a^2+a$ можетъ быть представлено въ слѣдующей формѣ:

$$(n+a+b)(n-a+b+1)-(b+1)^2,$$

и на это послѣднее выраженiе можно смотрѣть, какъ на минусъ-опредѣлитель формы

$$(n-a+b+1)\,x^2+2\,(b+1)\,xy+(n+a+b)\,y^2.$$

Придавая различныя значенія b, n, a, мы получимъ всевозможныя приведенныя формы, у которыхъ одинъ крайній коэффиціентъ четенъ, а другой нечетенъ, средній же коэффиціентъ положителенъ. Для составленія всѣхъ этихъ формъ выбираемъ для b произвольное положительное цѣлое число или нуль, для $n-a$ число большее b, но во всемъ другомъ произвольное, для $n+a$ также произвольное, но большее, чѣмъ $n-a+1$, и другой четности, чѣмъ это послѣднее; въ такомъ случаѣ n и a будутъ нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа, при чемъ $a<n$.

Если же $b \geqq n-a$, то пишемъ

$$n^2+n-1+(2n-1)b-a^2+a=(2n-1)(b+n-a+1)-(n-a)^2.$$

Если принимать $b+n-a+1$ четнымъ и придавать n, a и b различныя значенія, то опять повторимъ тѣ же формы, о которыхъ выше говорили; если же $b+n-a+1$ нечетно, то легко видѣть, что каждая форма повторится два раза (средній коэффиціентъ опять положителенъ). Дѣйствительно, $2n-1$ можетъ быть или $> b+n-a+1$, или $< b+n-a+1$.

Такимъ образомъ, суммируя выраженіе $q^{n^2+n-1+(2n-1)b-a^2+a}$ мы получимъ вмѣсто показателей два раза минусъ-опредѣлители всевозможныхъ приведенныхъ формъ, у которыхъ средній коэффиціентъ положителенъ и, по крайней мѣрѣ, одинъ крайній нечетенъ.

Впрочемъ мы не разсмотрѣли предѣльные случаи: 1) если два крайніе коэффиціенты равны, во 2) если первый ровно вдвое болѣе втораго (т.-е. $a'=2b'$, если форма есть $a'x^2+2b'xy+c'y^2$), въ 3) если средній коэффиціентъ нуль.

1) Формы $a'x^2+2b'xy+a'y^2$ встрѣтятся по разу, когда $2n-1 =b+n-a+1$. Это остается вѣрнымъ и для формъ вида $(a', 0, a') =a'x^2+a'y^2$; въ послѣднемъ случаѣ $a=n$.

2) Въ случаѣ $b < n-a$ формы $(2b', b', a')$ встрѣтятся, когда $b+1=n-a$. Въ случаѣ же $b \geqq n-a$ форма $2b'x^2+2b'xy+a'y^2$ не можетъ встрѣтиться, ибо тогда должно существовать равенство $b+1=n-a$, что противно положенію.

3) Формы $a'x^2+b'y^2$ встрѣтятся при $a=n$ по разу, если a' и b' различной четности, и по два раза, если a' и b' одинаковой четности (за исключеніемъ формы $a'\,x^2+a'\,y^2$).

Перейдемъ теперь къ показателю $n^2+n+(2n+1)b-a^2+a$.

Если $n-a+1 \geqq b$, то представляемъ этотъ показатель въ видѣ

$$(n+a+b)\ (n-a+b+1) - b^2.$$

Измѣняя a, b и n, получимъ минусъ - опредѣлители всевозможныхъ приведенныхъ формъ съ однимъ крайнимъ коэффиціентомъ четнымъ, а другимъ нечетнымъ и среднимъ положительнымъ, и только разъ. Также разъ встрѣтятся всѣ формы вида $2b'x^2+2b'xy+a'y^2$. Формы $a'x^2+b'y^2$ встрѣтятся по разу, если a' и b' разной четности, иначе ихъ не будетъ въ разсматриваемой суммѣ; формы же (a', b', a') и $(a', 0, a')$ не встрѣтятся.

Если же $n-a+1 < b$, то пишемъ

$$n^2+n+(2n+1)b-a^2+a=(2n+1)\ (b+n-a+1)-(n-a+1)^2.$$

Измѣняя a, b и n, получимъ минусъ-опредѣлители всевозможныхъ приведенныхъ формъ съ однимъ крайнимъ коэффиціентомъ четнымъ и другимъ нечетнымъ только разъ, а формы съ двумя нечетными крайними два раза. Формы $(2b', b', a')$ не встрѣтятся. Форма (a', b', a') встрѣтится разъ. Такъ какъ a не можетъ равняться $n+1$, то формы $(a', 0, a')$ и вообще $(a', 0, b')$ не встрѣтятся.

До сихъ поръ мы говорили только о формахъ съ среднимъ положительнымъ коэффиціентомъ. Если изъ четырехъ разъ, когда форма $a'x^2+2b'xy+c'y^2$ встрѣчается, считать два раза средній коэффиціентъ положительнымъ и два раза отрицательнымъ, то увидимъ, что всѣ формы, кромѣ $(2b', b', a')$, (a', b', a') и $(a', 0, a')$, встрѣтятся по два раза. Но извѣстно, что формы $(2b', b', a')$ и $(2b', -b', a')$ эквивалентны, а также (a', b', a') и $(a', -b', a')$; слѣдовательно всѣ неэквивалентныя, приведенныя формы съ однимъ, по крайней мѣрѣ, нечетнымъ коэффиціентомъ встрѣтятся два раза. Исключеніе составляютъ формы $(a', 0, a')$, которыя встрѣтятся по одному разу.

Итакъ, если черезъ $F(n)$ будемъ обозначать число всѣхъ неэквивалентныхъ формъ, приведенныхъ, съ однимъ или двумя крайними коэффиціентами нечетными и съ опредѣлителемъ $-n$, то

$$\frac{k^2K\sqrt{K}}{q^{\frac{1}{4}}\pi^2\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi sin^2am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_2(x)cosx\,dx=2\sum_{n=1}^{\infty}F(n)q^n-\sum_{n=1}^{\infty}q^{(2n-1)^2}. \qquad (6)$$

Возьмемъ теперь, какъ учитъ Эрмитъ, два другіе ряда:

$$\frac{k^2K^2}{\pi^2} sin^2 am \frac{2Kx}{\pi} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} cos 2nx, \qquad (6')$$

$$\frac{\vartheta_2(x) cos x}{q^{\frac{1}{4}}} = 1 + (1+q^2) cos 2x + \ldots + (q^{r^2-r} + q^{r^2+r}) \; cos 2rx + \ldots$$

Перемножимъ оба равенства и возьмемъ интегралъ:

$$\frac{k^2K^2}{\pi^3 q^{\frac{1}{4}}} \int_0^\pi sin^2 am \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_2(x) cos x \, dx = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}}$$

$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} (q^{n^2+n} + q^{n^2-n}). \qquad (7)$$

Изъ равенствъ (6) и (7) слѣдуетъ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} F(n) q^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n - q^{-n}} (q^{n^2+n} - 2 + q^{n^2-n}). \quad (8)$$

Изъ формулы (8) можно вывести нѣсколько формулъ Кронекера. Помножимъ для этого обѣ части равенства на $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ и обозначимъ *черезъ* $\varphi(n)$ *разность между числомъ дѣлителей* n *вида* $4h+1$ *и числомъ дѣлителей вида* $4h+3$. Тогда получимъ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ F(n) + 2F(n-1^2) + 2F(n-2^2) + \ldots \} q^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(2n-1) q^{2n-1}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(2n-1) q^{4n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n - q^{-n}} (q^{n^2+n} - 2 + q^{n^2-n}). \qquad (9)$$

Въ первой суммѣ въ коэффиціентѣ при q^n должно до тѣхъ поръ уменьшать подъ знакомъ F аргументъ, пока не станутъ получаться отрицательные аргументы.

Приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ q въ равенствѣ (9), мы немедленно получимъ три формулы Кронекера: 1) для степеней нечетныхъ, 2) для степеней четнонечетныхъ, 3) для степеней четночетныхъ.

Будемъ впредь въ этой главѣ всякое нечетное число называть черезъ m. Тогда всякое четно нечетное число изобразится черезъ $2m$, а четно четное черезъ $4n$.

Расположимъ теперь правую часть равенства (9) по степенямъ q и найдемъ, какія функціи будутъ коэффиціентами различныхъ степеней q. Во первыхъ, имѣемъ сумму вида $\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}}$. Пусть $\Phi(m)$ изображаетъ сумму всѣхъ дѣлителей числа m. Тогда, очевидно,

$$\sum\frac{rq^r}{1-q^{2r}}=\Sigma\Phi(m)\{q^m+2q^{2m}+4q^{4m}+8q^{8m}+\ldots\ldots\}.$$

Если $\Phi(n)$ *обозначаетъ сумму всѣхъ дѣлителей* n, *а* $X(n)$ *сумму всѣхъ нечетныхъ дѣлителей* n, и если $n=2^\alpha.m$, то

$$X(n)=\Phi(m),\ \Phi(n)=(2^\alpha+2^{\alpha-1}+2^{\alpha-2}+\ldots\ldots+2+1)\Phi(m),$$
$$\Phi(m)=2^{-\alpha-1}\{\Phi(n)+X(n)\}.$$

Поэтому можемъ также написать

$$\sum\frac{rq^r}{1-q^{2r}}=\Sigma\Phi(m)q^m+2\Sigma\Phi(m)q^{2m}+2\Sigma\{\Phi(n)+X(n)\}q^{4n}.$$

Перейдемъ теперь къ другой суммѣ равенства (9):

$$\sum\frac{rq^{r^2}(1+q^{2r})}{1-q^{2r}}=\Sigma r\{q^{r^2}+2q^{r(r+2)}+2q^{r(r+4)}+2q^{r(r+6)}+\ldots\}.$$

Въ послѣднихъ скобкахъ n-ая степень q встрѣтится всякій разъ, какъ r будетъ дѣлитель n, меньшій $\sqrt{n}$ и четный въ одно время съ $n:r$ или нечетный въ одно время съ $n:r$; коэффиціентъ при q^n будетъ при этомъ $2r$. Также q^n войдетъ въ скобки, если $n=r^2$. Пусть $\Psi(n)$ *есть разность между суммою дѣлителей* n, *большихъ* $\sqrt{n}$, *и суммою дѣлителей, меньшихъ* $\sqrt{n}$; разсмотримъ выраженія $\Phi(m)-\Psi(m)$ и $2\Phi(n)-2\Psi(n)$. Въ первомъ выраженіи мы

имѣемъ двойную сумму дѣлителей m, меньшихъ $\sqrt{m}$; къ этой суммѣ прибавляется $\sqrt{m}$, если онъ раціоналенъ. Въ выраженіи $2\Phi(n)-2\Psi(n)$ мы имѣемъ двойную сумму всѣхъ четныхъ дѣлителей $4n$, меньшихъ $\sqrt{4n}$ и такихъ, что дополнительный дѣлитель четенъ; къ этой суммѣ прибавляется $2\sqrt{n}$, если n квадратъ. Слѣдовательно эти два выраженія представляютъ коэффиціенты въ послѣдней суммѣ при n-ой степени q. Сопоставляя все предъидущее, можемъ написать

$$\Sigma\{2F(n)+4F(n-1^2)+4F(n-2^2)+\ldots\}q^n=\Sigma\{\Phi(m)+\Psi(m)\}q^m$$
$$+4\Sigma\Phi(m)q^{2m}+2\Sigma\{\Phi(n)+2X(n)+\Psi(n)\}q^{4n}+\Sigma\varphi(2n-1)q^{2n-1}$$
$$+2\Sigma\varphi(2n-1)q^{4n-2}, \tag{10}$$

гдѣ суммы распространяются на всевозможныя положительныя, цѣлыя числа n и положительныя, нечетныя числа m.

Сравнивая коэффиціенты у одинаковыхъ степеней q получаемъ

$$2F(m)+4F(m-1^2)+4F(m-2^2)+\ldots=\Phi(m)+\Psi(m)+\varphi(m), \tag{11}$$

$$F(2m)+2F(2m-1^2)+2F(2m-2^2)+\ldots=2\Phi(m)+\varphi(m), \tag{12}$$

$$F(4n)+2F(4n-1^2)+2F(4n-2^2)+\ldots=\Phi(n)+2X(n)+\Psi(n). \tag{13}$$

§ 30. Для вывода другихъ формулъ Кронекера мы можемъ воспользоваться тѣмъ же равенствомъ (6), преобразовавъ нѣсколько его первую часть. Замѣтимъ, что

$$k\sin^2 am\frac{2Kx}{\pi}\,\vartheta_2(x)=\frac{\vartheta_1^{\,2}(x)}{\vartheta^2(x)}.\vartheta_2(x)=\frac{k}{\sqrt{k'}}\sin am\frac{2Kx}{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}\,\vartheta_1(x).$$

Поэтому равенство (6) можно представить такъ:

$$\frac{Kk^2\sqrt{K}}{\pi^2\sqrt[4]{q}.\sqrt{2\pi k'}}\int_0^{\pi}\sin am\frac{2Kx}{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_1(x)\cos x\,dx$$
$$=2\Sigma F(n)q^n-\Sigma q^{(2n-1)^2}. \tag{14}$$

Перемножимъ теперь два слѣдующія равенства (а потомъ интегрируемъ):

$$\frac{K^2k^2}{\pi^2} sin\ am\frac{2Kx}{\pi} cos\ am\frac{2Kx}{\pi} = 2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rq^r}{1+q^{2r}} sin 2rx,$$

$$q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1(x) cos x = \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1} sin 2rx(q^{r^2-r} - q^{r^2+r});$$

$$\frac{K^2k^2}{\pi^3\sqrt[4]{q}}\int_0^{\pi} sin\ am\frac{2Kx}{\pi} cos\ am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_1(x) cos x\, dx$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r rq^r}{1+q^{2r}}(q^{r^2+r} - q^{r^2-r}). \qquad (15)$$

Изъ (14) и (15) слѣдуетъ

$$2\Sigma F(n)q^n - \Sigma q^{(2n-1)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2Kk'}}\sum r(-q)^{r^2}\cdot\frac{q^r - q^{-r}}{q^r + q^{-r}}. \qquad (16)$$

$$2\Sigma\{F(n) - 2F(n-1^2) + 2F(n-2^2) - 2F(n-3^2) + \ldots\}q^n$$

$$= \Sigma\varphi(2n-1)q^{2n-1} - 2\Sigma\varphi(2n-1)q^{4n-2}$$

$$+ \Sigma r(-q)^{r^2}\{-1 + 2q^{2r} - 2q^{4r} + 2q^{6r} - 2q^{8r} + \ldots\}. \qquad (17)$$

1) Чтобы нечетная, m-ая степень q входила въ выраженіе

$$r(-q)^{r^2}\{-1 + 2q^{2r} - 2q^{4r} + 2q^{6r} - \ldots\},$$

должно, чтобы r былъ дѣлителемъ m, не большимъ $\sqrt{m}$; при этомъ, если m сравнимо съ своимъ дополнительнымъ дѣлителемъ по модулю 4, то q^m получится съ $+$; если же r не сравнимо по модулю 4 съ дополнительнымъ дѣлителемъ, то q^m явится съ $-$. Первое будетъ всякій разъ, какъ m будетъ вида $4p+1$; послѣднее, если m вида $4p+3$. Послѣ этого легко сообразить, что коэффиціентъ при m-ой степени q въ послѣдней суммѣ равенства (17) будетъ

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\{\Phi(m) - \Psi(m)\}.$$

2) $2m$-ая степень q не входитъ въ послѣднюю сумму.

Такимъ образомъ получимъ еще двѣ формулы Кронекера:

$$2F(m)-4F(m-1^2)+4F(m-2^2)-4F(m-3^2)+4F(m-4^2)-\ldots\ldots$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\{\Phi(m)-\Psi(m)\}+\varphi(m), \tag{18}$$

$$F(2m)-2F(2m-1^2)+2F(2m-2^2)-2F(2m-3^2)+\ldots.=-\varphi(m). \tag{19}$$

Что касается до равенства, опредѣляющаго

$$F(4n)+2\Sigma(-1)^p F(4n-p^2),$$

то его мы замѣнимъ болѣе элементарнымъ.

§ 31. Отберемъ въ формулахъ (9) и (17) всѣ степени q, показатели которыхъ дѣлятся на 4; результаты можно написать такъ:

$$2\vartheta_3(0,q^4)\Sigma F(4n)q^{4n}+4\Sigma q^{(2n-1)^2}.\Sigma F(4n+3)q^{4n+3}$$

$$=8\sum\frac{nq^{4n}}{1-q^{8n}}-2\sum\frac{nq^{4n^2}(1+q^{4n})}{1-q^{4n}},$$

$$2\vartheta_3(0,q^4)\Sigma F(4n)q^{4n}-4\Sigma q^{(2n-1)^2}.\Sigma F(4n+3)q^{4n+3}$$

$$=2\sum nq^{4n^2}\cdot\frac{q^{2n}-q^{-2n}}{q^{2n}+q^{-2n}}.$$

Сложивъ оба равенства, получимъ

$$4\vartheta_3(0,q^4)\Sigma F(4n)q^{4n}=8\sum\frac{nq^{4n}}{1-q^{8n}}-4\sum nq^{4n^2}\cdot\frac{1+q^{8n}}{1-q^{8n}}.$$

Если замѣнимъ въ этомъ равенствѣ q^4 черезъ q, то двѣ послѣднія суммы обратятся въ подобныя же суммы равенства (8); поэтому можемъ написать

$$\Sigma F(4n)q^n=2\Sigma F(n)q^n-\Sigma q^{(2n-1)^2}. \tag{20}$$

Изъ равенства (20) заключаемъ, что

для всякаго n, кромѣ нечетнаго квадрата, $F(4n)=2F(n)$, (21)

а для всякаго m, равнаго квадрату, $F(4m)=2F(m)-1$. (22)

Эти равенства дадутъ возможность опредѣлить

$$F(4n)+2\Sigma(-1)^p F(4n-p^2).$$

§ 32. Сдѣлаемъ еще одно преобразованіе съ равенствомъ (6):

$$sin^2 am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_2(x)=\frac{1}{k^2}\vartheta_2(x)-\frac{1}{k^2}\Delta^2 am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_2(x)$$

$$=\frac{1}{k^2}\vartheta_2(x)-\frac{1}{k\sqrt{k}}cos\ am\frac{2Kx}{\pi}\Delta\ am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x).$$

Слѣдовательно равенство (6) можно замѣнить слѣдующимъ:

$$2\Sigma F(n)q^n-\Sigma q^{(2n-1)^2}$$

$$=\frac{K}{\pi}\sqrt{\frac{K}{2\pi}}-\frac{K\sqrt{Kk}}{\sqrt[4]{q}.\pi^2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\pi cos\ am\frac{2Kx}{\pi}\Delta\ am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x)cosx\,dx. \quad (23)$$

До сихъ поръ мы занимались только одною функціею $F(n)$; теперь введемъ въ наше изложеніе новую функцію $G(n)$, показывающую число всѣхъ приведенныхъ неэквивалентныхъ формъ съ опредѣлителемъ $-n$. Тогда неэквивалентныхъ формъ съ опредѣлителемъ $-n$ и съ двумя четными крайними коэффиціентами будетъ $G(n)-F(n)$.

Разсмотримъ интегралъ равенства (23) такимъ же образомъ, какъ до сихъ поръ разсматривался интегралъ равенства (6). Мы имѣемъ

$$\frac{2Kk}{\pi}cos\ am\frac{2Kx}{\pi}=4\sum\frac{\sqrt{q^{2r-1}}}{1+q^{2r-1}}cos(2r-1)x, \quad (24)$$

$$\vartheta_3(x)=1+2\Sigma q^{s^2}cos2sx. \quad (25)$$

Перемножая почленно (24) и (25), получаемъ члены вида

$$4q^{s^2}.\frac{\sqrt{q^{2r-1}}}{1+q^{2r-1}}\{cos(2s+2r-1)x+cos(2s-2r+1)x\}.$$

Отберемъ всѣ члены, умноженные на $cos(2n+1)x$:

$$4cos(2n+1)x\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sqrt{q^{2r-1}}}{1+q^{2r-1}}\left\{q^{(r-n-1)^2}+q^{(r+n)^2}\right\}$$

$$=4\cos(2n+1)x\sum_{r=1}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2+(r-\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{\sqrt{q^{-(2n+1)(2r-1)}}+\sqrt{q^{(2n+1)(2r-1)}}}{\sqrt{q^{-2r+1}}+\sqrt{q^{2r-1}}}$$

$$=4\cos(2n+1)x.(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sum\left\{q^{(r-\frac{1}{2})^2}-q^{-1}(q^{(r-\frac{3}{2})^2}+q^{(r+\frac{1}{2})^2})+\ldots\right\}$$

$$=2(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)x\{1-2q^{-1}+2q^{-4}-2q^{-9}+\ldots$$

$$+2(-1)^n q^{-n^2}\}\vartheta_2(0).$$

Слѣдовательно отъ перемноженія (24) и (25) мы получаемъ

$$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}\vartheta_3(x)\cos am\frac{2Kx}{\pi}=2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a=-n}^{+n}(-1)^{n+a}q^{n^2+n-a^2}\cos(2n+1)x. \quad (26)$$

Изъ ряда для $\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}$ выводимъ

$$\frac{2K}{\pi}\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}\cos x=\cos x+2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}(-1)^b q^{r(2b+1)}\{\cos(2r+1)x$$

$$+\cos(2r-1)x\}. \quad (27)$$

Изъ равенствъ (26) и (27) получаемъ

$$\frac{K\sqrt{Kk}}{\pi^2\sqrt{2\pi\sqrt{q}}}\int_0^{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x)\cos x\,dx=\frac{1}{4}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-n}^{+n}(-1)^{n+a+b}q^{n^2+n(2b+2)-a^2}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-n}^{+n}(-1)^{n+a+b}q^{n^2+n+(n+1)(2b+1)-a^2}. \quad (28)$$

Будемъ полагать пока a положительнымъ и представимъ показатель при q въ первой суммѣ въ двухъ видахъ:

$$(n+b+a+1)(n+b-a+1)-(b+1)^2=2n(n-a+b+1)-(n-a)^2.$$

Если $b+1 \leqq n-a$, то

$$(n+b-a+1)x^2+2(b+1)xy+(n+b+a+1)y^2$$

будетъ нѣкоторая приведенная форма съ среднимъ положительнымъ коэффиціентомъ и съ двумя крайними или обоими четными, или обоими нечетными. Такъ какъ отъ измѣненія знака у a крайніе коэффиціенты мѣняются только мѣстами, то за исключеніемъ нѣкоторыхъ частнаго вида формъ, объ которыхъ будемъ говорить послѣ, каждая форма встрѣтится при измѣненіи n, b и a по два раза.

Если $b+1>n-a$, то

$$2nx^2+2(n-a)xy+(n-a+b+1)y^2, (n-a+b+1)x^2+2(n-a)xy+2ny^2$$

представляютъ всевозможныя приведенныя формы съ однимъ крайнимъ коэффиціентомъ четнымъ и среднимъ положительнымъ; если форма имѣетъ одинъ нечетный крайній коэффиціентъ, то она встрѣтится два раза, иначе четыре раза.

$(-1)^{n+a+b}$ показываетъ, что формамъ съ двумя четными крайними коэффиціентами соотвѣтствуетъ -1, а другимъ $+1$.

Отсюда заключаемъ, что коэффиціентъ при q^n въ первой суммѣ будетъ

$$\frac{1}{2}\left\{F(n)-3M(n)\right\} + \textit{поправка},$$

гдѣ $M(n)$ — *число приведенныхъ неэквивалентныхъ формъ съ двумя крайними коэффиціентами четными*, а *поправка* зависитъ отъ формъ особаго вида.

Показатель у q во второй суммѣ представимъ въ слѣдующихъ двухъ видахъ:

$$(n+b+a+1)(n+b-a+1)-b^2=(2n+2)(n+b-a+1)-(n-a+1)^2.$$

Въ такомъ случаѣ легко сообразить, что вторая сумма дастъ то же, что первая, только съ иной поправкою.

Итакъ обѣ суммы дадутъ коэффиціентомъ при q^n

$$4F(n)-3G(n) + \textit{поправка}.$$

Разсмотримъ формы частнаго вида.

1) Формы вида $(2c, c, d) = 2cx^2 + 2cxy + dy^2$ встрѣтятся вдвое рѣже, чѣмъ формы не частнаго вида, если принимать среднiе коэффицiенты положительными. Но формы $(2c, c, d)$ и $(2c, -c, d)$ эквивалентны; значитъ отъ этихъ формъ не будетъ поправки.

2) Формы $(c, 0, d)$ съ двумя коэффицiентами нечетными встрѣтятся два раза во второй суммѣ при $b=0$, съ однимъ нечетнымъ коэффицiентомъ въ первой суммѣ при $a=\pm n$, съ двумя четными при $b=0$ во второй суммѣ и при $a=\pm n$ въ первой суммѣ. Итакъ и эти формы не требуютъ поправки.

3) Формы вида $(c, 0, c)$ съ нечетнымъ c возможны только во второй суммѣ при $b=0$ и $a=0$, а съ четнымъ c во второй суммѣ при $b=0$, $a=0$ и въ первой суммѣ при $a=\pm n, b+1=2n$. Итакъ сумма $\Sigma\{4F(n)-3G(n)\}q^n$ должна получить поправку, равную

$$-\frac{1}{2}\sum q^{(2n-1)^2}+\frac{3}{2}\sum q^{4n^2}.$$

4) Форма $(2c, c, 2c)$ встрѣчается два раза: въ первой суммѣ при $a=0$, $n=b+1$ и во второй суммѣ при $a=0$, $b=n+1$; слѣдовательно должно ввести поправку $+2\Sigma q^{3n^2}$.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{q}}\cdot\frac{K}{\pi^2}\sqrt{\frac{Kk}{2\pi}}\int\limits_0^\pi cos\ am\frac{2Kx}{\pi}\Delta\ am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x)cosx\,dx=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}q^{(2n-1)^2}+$$

$$+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}q^{4n^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{3n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{4F(n)-3G(n)\Big\}q^n. \tag{29}$$

Если мы сравнимъ равенства (23) и (29), то мы разрѣшимъ задачу о числѣ разложенiй даннаго цѣлаго числа на 3 квадрата. Такъ какъ эта теорема можетъ намъ облегчить нѣкоторые выводы, то прерву изъ за нея на минуту вычисленiя. Легко вывести изъ (23) и (29)

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=\sum\sum\sum_{x,y,z=-\infty}^{x,y,z=+\infty}q^{x^2+y^2+z^2}=1+6\sum q^{4n^2}+8\sum q^{3n^2}$$

$$-6\Sigma q^{(2n-1)^2}+12\Sigma\{2F(n)-G(n)\}q^n. \tag{30}$$

При этомъ не мѣшаетъ помнить, что

$$2F(n)-G(n=F(n)-M(n).$$

Теорема. *Число всѣхъ рѣшеній уравненія $x^2+y^2+z^2=n$, гдѣ n не квадратъ и не утроенный квадратъ, равно 12 разъ взятой разности между числомъ приведенныхъ неэквивалентныхъ формъ, у которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ нечетный крайній коэффиціентъ, и числомъ такихъ же формъ, у которыхъ оба крайніе коэффиціента четны; опредѣлитель у всѣхъ формъ—n. Если n четный квадратъ, то къ предъидущей двѣнадцатикратной разности слѣдуетъ придать 6; если n нечетный квадратъ, то вычесть 6; если n утроенный квадратъ, то придать 8.*

§ 33. Формулою (30) можно воспользоваться для вывода формулы, подобной (11), (12), (13), (18) и (19), но относящейся къ функціи $G(n)$. Для этого умножимъ обѣ части равенства на $\vartheta_3(0,q)$:

$$12\vartheta_3(0,q)\Sigma\{2F(n)-G(n)\}=\frac{4K^2}{\pi^2}-\vartheta_3(0,q)+6\vartheta_3(0,q)\Sigma q^{(2n-1)^2}$$

$$-6\vartheta_3(0,q)\Sigma q^{4n^2}-8\vartheta_3(0,q)\Sigma q^{3n^2}. \qquad (31)$$

Положимъ m нечетнымъ и приравняемъ коэффиціенты при q^m въ равенствѣ (31). Пользуясь страницею 73, видимъ, что коэффиціентъ при q^m въ $\frac{4K^2}{\pi^2}$ будетъ $8\Phi(m)$. *Назовемъ черезъ* $\psi(m)$ *разность между числомъ дѣлителей m вида $3k+1$ и числомъ дѣлителей m вида* $3k-1$. Страница 94 показываетъ намъ, что коэффиціентъ при q^m въ выраженіи $8\vartheta_3(0,q)\Sigma q^{3n^2}$, если m не квадратъ, равенъ $8\psi(m)$. Такимъ образомъ, если m не квадратъ, то

$$6F(m)+12\Sigma F(m-p^2)-3G(m)-6\Sigma G(m-p^2)=2\Phi(m)-2\psi(m), \qquad (32)$$

гдѣ въ суммахъ p по прежнему получаетъ всѣ цѣлыя положительныя значенія, для которыхъ $m-p^2>0$.

Если же m квадратъ, то ко второй части (32) должно придать 3; но стоитъ считать $G(0)=\frac{1}{2}$, и формула будетъ годна для m, равнаго квадрату. *Будемъ впредь считать* $G(0)=\frac{1}{2}$.

Утроимъ (11) и вычтемъ (32):

$$3\,G(m)+6G(m-1^2)+6G(m-2^2)+6G(m-3^2)+6G(m-4^2)+\dots$$
$$=\Phi(m)+3\Psi(m)+3\varphi(m)+2\psi(m). \qquad (33)$$

§ 34. Продифференцируемъ теперь равенство (24) и въ результатѣ замѣнимъ q черезъ q^2. Будемъ употреблять слѣдующія обозначенія:

$$\vartheta_3^{\,2}(0,q^2)=\frac{2L}{\pi},\ \vartheta_2^{\,2}(0,q^2)=\frac{2Ll}{\pi},$$

m и p нечетныя числа.

$$\frac{4L^2l}{\pi^2}\sin am\frac{2Lx}{\pi}\Delta am\frac{2Lx}{\pi}=4\sum\frac{mq^m}{1+q^{2m}}\sin mx;$$

$$\vartheta_2(x,q)\sin 2x=q\sum\left\{q^{\frac14 m^2-m}-q^{\frac14 m^2+m}\right\}\sin mx.$$

$$\frac{4L^2l}{\pi^3 q}\int_0^\pi \sin am\frac{2Lx}{\pi}\Delta am\frac{2Lx}{\pi}\vartheta_2(x,q)\sin 2x\,dx=2\sum_{m=1}^{\infty}mq^{\frac14 m^2}\frac{1-q^{2m}}{1+q^{2m}}. \qquad (34)$$

Правую часть равенства (34) можно изобразить такъ:

$$2\Sigma m\{q^{\frac14 m^2}-2q^{\frac14 m(m+8)}+2q^{\frac14 m(m+16)}-2q^{\frac14 m(m+24)}+\dots\}.$$

Пусть s число вида $8N+1$. Назовемъ черезъ $\Phi'(m)$ сумму всѣхъ дѣлителей m вида $8h\pm1$, уменьшенную на сумму дѣлителей m вида $8h\pm3$; черезъ $\Psi'(m)$ назовемъ сумму дѣлителей m вида $8h\pm1$, большихъ $\sqrt{m}$, и дѣлителей вида $8h\pm3$, меньшихъ $\sqrt{m}$, уменьшенную на сумму дѣлителей вида $8h\pm1$, меньшихъ $\sqrt{m}$, и дѣлителей вида $8h\pm3$, большихъ $\sqrt{m}$.

Выраженіе $\Phi'(m)-\Psi'(m)$ есть удвоенная сумма дѣлителей m вида $8h\pm1$, меньшихъ $\sqrt{m}$, уменьшенная на удвоенную сумму дѣлителей m вида $8h\pm3$, меньшихъ $\sqrt{m}$. Если $m=(8h\pm1)^2$, то въ $\Phi'(m)-\Psi'(m)$ содержится одинъ разъ $8h\pm1$; если $m=(8h\pm3)^2$, то въ $\Phi'(m)-\Psi'(m)$ содержится одинъ разъ $-(8h\pm3)$.

1) Пусть $s=16N+1=d\delta$, $d\leqq\delta$. Если $d=8h\pm1$, то $\delta\equiv d\ (mod.\ 16)$ и d войдетъ въ составъ коэффиціента при $q^{\frac{1}{4}s}$ въ суммѣ (34) съ $+$. Если $d=8h\pm3$, то $\delta\equiv d+8\ (mod.\ 16)$ и d войдетъ въ тотъ же коэффиціентъ съ —. Итакъ коэффиціентъ при $q^{\frac{1}{4}s}$ въ правой части (34) есть $2\Phi'(s)-2\Psi'(s)$.

2) Пусть $s=16N+9=d\delta$, $d\leqq\delta$. Если $d=8h\pm3$, то $\delta\equiv d\ (mod.\ 16)$ и d въ составъ коэффиціента при $q^{\frac{1}{4}s}$ въ суммѣ (34) войдетъ съ $+$. Если $d=8h\pm1$, то $\delta\equiv d+8\ (mod.\ 16)$ и d въ составъ коэффиціента войдетъ съ —. Итакъ коэффиціентъ при $q^{\frac{1}{4}s}$ въ этомъ случаѣ будетъ $-2\Phi'(s)+2\Psi'(s)$.

Равенство (34) можно слѣдовательно написать такъ:

$$\frac{4L^2l}{\pi^3 q}\int_0^\pi sin\ am\frac{2Lx}{\pi}\Delta\ am\frac{2Lx}{\pi}\vartheta_2(x)sin2x\ dx$$

$$=2\sum(-1)^{\frac{s-1}{8}}\Big\{\Phi'(s)-\Psi'(s)\Big\}q^{\frac{1}{4}s}. \tag{35}$$

Требуется тотъ же интегралъ выразить такъ, чтобы коэффиціенты состояли изъ функцій $F(n)$ и $G(n)$.

$$\frac{2Ll}{\pi}sin\,am\frac{2Lx}{\pi}\vartheta_2(x,q)=4\sum\sum\frac{q^m}{1-q^{2m}}.q^{\frac{1}{4}p^2}\Big\{sin(m+p)x+sin(m-p)x\Big\}.$$

Будемъ искать коэффиціентъ при $sin2nx$ въ послѣднемъ рядѣ:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\Big\{q^{\frac{1}{4}(m-2n)^2}-q^{\frac{1}{4}(m+2n)^2}\Big\}=\sum_{m=1}^{\infty}q^{\frac{1}{4}m^2+n^2}\cdot\frac{q^{-nm}-q^{nm}}{q^{-m}-q^m}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}q^{\frac{1}{4}m^2+n^2}\Big\{q^{-(n-1)m}+q^{-(n-3)m}+\ldots+q^{(n-1)m}\Big\}.$$

1) Если n четенъ, то получимъ

$$q^{n^2}\vartheta_2(0,q)\{q^{-1}+q^{-9}+q^{-25}+\ldots+q^{-(n-1)^2}\}.$$

2) Если n нечетно, то получимъ

$$\frac{1}{2}q^{n^2}\vartheta_2(0,q)\{1+2q^{-4}+2q^{-16}+\ldots+2q^{-(n-1)^2}\}.$$

$$\frac{2Ll}{\pi}\sin am\frac{2Lx}{\pi}\vartheta_2(x,q)$$

$$=2\vartheta_2(0,q)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}q^{(2n-1)^2}(1+2q^{-4}+\ldots+2q^{-4(n-1)^2})\sin(4n-2)x\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}q^{4n^2}(2q^{-1}+2q^{-9}+\ldots+2q^{-(2n-1)^2})\sin4nx\right\}. \qquad (36)$$

$$\frac{2L}{\pi}\Delta\, am\frac{2Lx}{\pi}\sin2x=\sin2x$$

$$+2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{2r}}{1+q^{4r}}\left\{\sin2(r+1)x-\sin2(r-1)x\right\}. \qquad (37)$$

$$\frac{4L^2l}{\pi^3q}\int_0^{\pi}\sin am\frac{2Lx}{\pi}\Delta\, am\frac{2Lx}{\pi}\vartheta_2(x,q)\sin2x\,dx$$

$$=\left\{1+2\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-n+1}^{a=n-1}(-1)^b q^{4\pi_1(n,\,b,\,a)}-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-n+1}^{n-1}(-1)^b q^{4\pi_2(n,b,a)}\right.$$

$$\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-n}^{n-1}(-1)^b(q^{4\pi_3(n,\,b,\,a)}-q^{4\pi_4(n,\,b,\,a)})\right\}\vartheta_2(0,q). \qquad (38)$$

$$\pi_1(n,b,a)=n^2-n+(n-1)(2b+1)-a^2,\ \pi_2(n,b,a)=n^2-n+n(2b+1)-a^2,$$

$$4\pi_3(n,b,a)=4n^2+(4n-2)(2b+1)-(2a+1)^2-1,$$

$$4\pi_4(n,b,a)=4n^2+(4n+2)(2b+1)-(2a+1)^2-1.$$

Всѣ показатели q въ кривыхъ скобкахъ равенства (38) дѣлятся на 4. Будемъ разсматривать четверть каждаго показателя, какъ

минусъ-опредѣлитель нѣкоторой формы. Для этого представимъ эти четверти показателей въ слѣдующихъ видахъ, полагая a положительнымъ или равнымъ нулю:

$$\left.\begin{aligned}\pi_1(n,b,a)&=(n+b+a)(n+b-a)-(b+1)^2\\&=(2n-2)(n+b-a)-(n-a-1)^2,\\\pi_2(n,b,a)&=(n+b+a)(n+b-a)-b^2=2n(n+b-a)-(n-a)^2,\\\pi_3(n,b,a)&=(n+b+a+1)(n+b-a)-(b+1)^2\\&=(2n-1)(n+b-a)-(n-a-1)^2,\\\pi_4(n,b,a)&=(n+b+a+1)(n+b-a)-b^2\\&=(2n+1)(n+b-a)-(n-a)^2.\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

Будемъ, ради краткости, употреблять слѣдующія обозначенія:

$$dx^2+2fxy+cy^2=(d,f,c),\quad dc-f^2=\Delta(d,f,c)=\Delta.$$

Принявъ эти обозначенія, разсмотримъ, какіе коэффиціенты будутъ при нѣкоторой степени q, напр. при q^Δ, въ четырехъ суммахъ:

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\Sigma\Sigma(-1)^b q^{\pi_1(n,b,a)},\ \Sigma\Sigma\Sigma(-1)^{b+1} q^{\pi_2(n,b,a)},\\&\Sigma\Sigma\Sigma(-1)^b q^{\pi_3(n,b,a)},\ \Sigma\Sigma\Sigma(-1)^{b+1} q^{\pi_4(n,b,a)},\end{aligned}\right\}\quad(40)$$

въ которыхъ суммы берутся между тѣми же предѣлами, какъ и въ равенствѣ (38).

1) Если $b+1\leqq n-a-1$, то беремъ для $\pi_1(n,b,a)$ первое изъ разложеній (39), иначе беремъ второе разложеніе. Первое разложеніе даетъ или формы съ двумя крайними четными коэффиціентами, или—съ двумя крайними нечетными; второе разложеніе даетъ формы или съ двумя крайними четными коэффиціентами, или съ однимъ четнымъ и однимъ нечетнымъ; при этомъ, если одинъ изъ крайнихъ коэффиціентовъ или оба нечетны, то $(-1)^b=(-1)^\Delta$; если же оба четны, то $(-1)^b=-(-1)^\Delta$. Принимая въ разсчетъ, что въ суммахъ (40) a можетъ быть отрицательно и что формы

(d, f, c) и $(d, -f, c)$ не всегда эквивалентны, можно сообразить, что коэффиціентъ при q^{Δ} въ первой изъ суммъ (40) будетъ

$$(-1)^{\Delta}\{4F(\Delta)-3G(\Delta)\}+\text{поправка},$$

гдѣ поправка зависитъ отъ нѣкоторыхъ формъ частнаго вида.

2) Коэффиціентъ во второй изъ суммъ (40) выразится тою же формулою.

3) Если $n-a-1 \geqq b+1$, то первое изъ изображеній (39) $\pi_3(n, b, a)$ дастъ приведенныя формы съ однимъ крайнимъ нечетнымъ коэффиціентомъ, а другимъ четнымъ; при этомъ $(-1)^b = -(-1)^{\Delta}$. Если же $n-a-1 < b+1$, то получаемъ изъ втораго изображенія (39) по одному разу приведенныя формы съ однимъ крайнимъ коэффиціентомъ нечетнымъ и другимъ четнымъ и два раза съ двумя нечетными крайними; при этомъ $(-1)^b = -(-1)^{\Delta}$. Поэтому коэффиціентъ при q^{Δ} въ третьей изъ суммъ (40) будетъ

$$-2(-1)^{\Delta}F(\Delta)+\text{поправка}.$$

4) Коэффиціентъ при q^{Δ} въ четвертой суммѣ выразится той же формулою, что и въ третьей.

Итакъ правую часть равенства (38) можно написать такъ:

$$\vartheta_2(0,q)\left\{1+4\sum_{\Delta=1}^{\infty}(-1)^{\Delta}\{2F(\Delta)-3G(\Delta)\}q^{4\Delta}+\text{поправка}\right\}. \quad (41)$$

Для опредѣленія *поправки*, должно разсмотрѣть формы частнаго вида.

1) Формы $(c, 0, c)$. Если c нечетно, то въ суммѣ (41) имѣется членъ $+4q^{4\Delta(c,\,0,\,c)}$. На самомъ же дѣлѣ изъ удвоенныхъ суммъ (40) мы можемъ только получить $+2q^{\Delta(c,\,0,\,c)}$. Дѣйствительно, во второй суммѣ заключается членъ $-q^{\Delta(c,\,0,\,c)}$, который получается при $a=0$ и $b=0$, а въ третьей суммѣ $+2q^{\Delta(c,\,0,\,c)}$, получаемый при $a=n-1$, $b=2n-2$ и $a=-n$, $b=2n-2$. Слѣдовательно мы должны поправить сумму (41), вычитая

$$2q^4+2q^{36}+2q^{100}+2q^{196}+\ldots$$

Если c четно, то въ сумму (41) входитъ членъ $-12q^{4\Delta(c,\,0,\,c)}$. На самомъ же дѣлѣ изъ удвоенныхъ суммъ (40) мы получимъ только $-6q^{4\Delta(c,\,0,\,c)}$; а именно: изъ первой суммы $-2q^{4\Delta(c,\,0,\,c)}$ при $a=n-1$, $b=2n-3$ и при $a=-n+1$, $b=2n-3$, изъ второй суммы $-q^{4\Delta(c,\,0,\,c)}$ при $a=0$, $b=0$. Слѣдовательно къ суммѣ (41) должно прибавить

$$8\{q^{4.4}+q^{4.16}+q^{4.36}+\ldots\}-2\{q^{4.4}+q^{4.16}+q^{4.36}+\ldots\}.$$

Разсмотримъ теперь выраженіе

$$\vartheta_2(0,q)+4\vartheta_2(0,q)\sum_{\Delta=1}^{\infty}(-1)^{\Delta}\Big\{2F(\Delta)-3G(\Delta)\Big\}q^{4\Delta}+\textit{поправка}. \quad (41')$$

Изъ предъидущаго ясно, что часть поправки, происходящая отъ формъ $(c,\,0,\,c)$, будетъ

$$4\Sigma\Sigma\Big\{-q^{\frac{1}{4}(x^2+16y^2)}+4q^{\frac{1}{4}(x^2+64y^2)}\Big\},$$

гдѣ x всякое положительное нечетное число, а y всякое положительное число. *Будемъ обозначать черезъ* $\varphi'(s)$ *половину всѣхъ рѣшеній уравненія* $x^2+64y^2=s$, *считая и отрицательныя значенія* x *и* y, при чемъ s число вида $8h+1$. Тогда послѣдняя четверная сумма можетъ быть написана такъ:

$$2\Sigma\{-\varphi(s)+4\varphi'(s)\}q^{\frac{1}{4}s}-3\vartheta_2(0,q).$$

2) Форма $(2c,\,c,\,2c)$ при c нечетномъ входитъ въ сумму (41) съ коэффиціентомъ $+12$, а при c четномъ съ коэффиціентомъ -12. На самомъ дѣлѣ она можетъ явиться только въ первой изъ суммъ (40) при $a=0$, $n=b+2$ и во второй при $a=0$ и $n=b$. Слѣдовательно при c нечетномъ поправка -8, а при c четномъ $+8$. *Назовемъ черезъ* $\psi'(s)$ *половину числа рѣшеній уравненія* $x^2+3.64y^2=s$. Поправка въ (41′) отъ формъ $(2c,\,c,\,2c)$ будетъ (x нечетно)

$$16\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\Big\{-q^{\frac{1}{4}(x^2+48y^2)}+2q^{\frac{1}{4}(x^2+192y^2)}\Big\}$$

$$=-4\vartheta_2(0,q)+8\Sigma\{-\psi(s)+2\psi'(s)\}q^{\frac{1}{4}s}.$$

Сравнивая равенства (35) и (38), получаемъ

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{\frac{s-1}{8}}\Big\{\Phi'(s)-\Psi'(s)\Big\}q^{\frac{1}{4}s}=-3\vartheta_2(0,q)-\sum_{s=1}^{\infty}\varphi(s)q^{\frac{1}{4}s}$$

$$+4\sum_{s=1}^{\infty}\varphi'(s)q^{\frac{1}{4}s}-4\sum_{s=1}^{\infty}\psi(s)q^{\frac{1}{4}s}+8\sum_{s=1}^{\infty}\psi'(s)q^{\frac{1}{4}s}$$

$$+2\vartheta_2(0,q)\sum_{\Delta=1}^{\infty}(-1)^{\Delta}\Big\{2F(\Delta)-3G(\Delta)\Big\}q^{4\Delta}. \qquad (42)$$

Чтобы приравнять коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ q, должно во 1) сдѣлать умноженіе на $\vartheta_2(0,q)$ въ послѣдней суммѣ и во 2) опредѣлить Δ черезъ s, гдѣ Δ всякое положительное число, а s положительное вида $8h+1$.

$$2\vartheta_2(0,q)\Sigma(-1)^{\Delta}\{2F(\Delta)-3G(\Delta)\}q^{4\Delta}$$

$$=4\sum_{\Delta}\sum_{m}(-1)^{\Delta}\{2F(\Delta)-3G(\Delta)\}q^{4\Delta+\frac{m^2}{4}}.$$

Пусть $4\Delta+\frac{m^2}{4}=\frac{s}{4}$; тогда $\Delta=\frac{s-m^2}{16}$. Такъ какъ Δ цѣлое число, то m не всякое нечетное число: если $s=16t+1$, то $m=1,\ 7,\ 9,\ 15,\ 17\ldots$; если же $s=16t+9$, то $m=8n\pm3$. Соображая все предъидущее и полагая $G(0)=\frac{1}{2}$, получаемъ

$$4\sum_{m}(-1)^{\frac{1}{16}(s-m^2)}\Big\{2F\Big(\frac{s-m^2}{16}\Big)-3G\Big(\frac{s-m^2}{16}\Big)\Big\}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{8}(s-1)}\{\Phi'(s)-\Psi'(s)\}+\varphi(s)+4\psi(s)-4\varphi'(s)-8\psi'(s), \qquad (43)$$

гдѣ m должно такъ измѣняться, что $s-m^2 \geqq 0$ и $\frac{s-m^2}{16}$ цѣлое число.

§ 35. Наконецъ для вывода послѣдней изъ восьми основныхъ формулъ Кронекера возьмемъ слѣдующія равенства:

$$\frac{4K^2k}{\pi^2} sin\ am \frac{2Kx}{\pi} \Delta\ am \frac{2Kx}{\pi} = 4\sum \frac{m\sqrt{q^m}}{1+q^m} sin\ mx,$$

$$\vartheta_1(2x,q^2) cosx = \Sigma(-1)^{\frac{p-1}{2}} \{sin(2p+1)x + sin(2p-1)x\} q^{\frac{p^2}{2}},$$

гдѣ m и p нечетныя числа. Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ

$$\frac{4K^2k}{\pi^3}\int_0^\pi sin\ am \frac{2Kx}{\pi} \Delta\ am \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_1(2x,q^2) cosx\ dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n+1)q^{\frac{1}{8}\lambda}}{1+q^{8n+1}}$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n+3)q^{\frac{1}{8}\rho}}{1+q^{8n+3}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n+5)q^{\frac{1}{8}\sigma}}{1+q^{8n+5}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n+7)q^{\frac{1}{8}\tau}}{1+q^{8n+7}}, \qquad (44)$$

гдѣ $\lambda = (8n+1)^2 + 6(8n+1) + 1$, $\rho = (8n+3)^2 + 2(8n+3) + 1$,

$\sigma = (8n+5)^2 + 6(8n+5) + 1$, $\tau = (8n+7)^2 + 2(8n+7) + 1$.

Обозначая черезъ r *число вида* $8n+7$, можемъ (44) написать такъ:

$$\frac{4K^2k}{\pi^3\sqrt[8]{q}}\int_0^\pi sin\ am \frac{2Kx}{\pi} \Delta\ am \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_1(2x,q^2) cosx\ dx$$

$$= \sum_{r=7}^{\infty} (-1)^{\frac{r-7}{8}} \left\{ \Phi'(r) - \Psi'(r) \right\} q^{\frac{1}{8}r}. \qquad (44')$$

Для опредѣленія интеграла другимъ способомъ возьмемъ равенство:

$$\frac{2K}{\pi} \Delta\ am \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_1(2x,q^2) = 2\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{1}{2}m^2} sin2mx$$

$$+4\sum\sum(-1)^{\frac{m-1}{2}}\, q^{\frac{1}{2}m^2}\cdot\frac{q^n}{1+q^{2n}}\left\{sin2(n+m)x-sin2(n-m)x\right\}.$$

Будемъ обозначать черезъ t всякое цѣлое положительное число. Опредѣлимъ коэффиціентъ при $sin2tx$. Должно различать два случая: t четно и t нечетно.

1) Если t нечетно, то коэффиціентъ при $sin2tx$ будетъ

$$2(-1)^{\frac{t-1}{2}}\, q^{\frac{1}{2}t^2}-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-\frac{1}{2}(t+1)}\, q^{\frac{1}{2}(2n-t)^2+2n}\cdot\frac{1+q^{4nt}}{1+q^{4n}}.$$

Послѣ нѣкоторыхъ вычисленій предъидущій коэффиціентъ можно написать такъ:

$$2\vartheta(0,q^2)q^{\frac{1}{2}t^2}\left(1+2q^{-2}+2q^{-8}+\ldots+2q^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\right).$$

2) Если t четно, то коэффиціентъ при $sin2tx$ выразится, если m по прежнему обозначаетъ нечетное число, такъ:

$$-4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{\frac{1}{2}(m-t-1)}\, q^{\frac{1}{2}(m-t)^2+m}\cdot\frac{1-q^{2mt}}{1+q^{2m}}$$

$$=4\vartheta(0,q^2)q^{\frac{1}{2}t^2}\left(q^{-\frac{1}{2}}+q^{-\frac{9}{2}}+q^{-\frac{25}{2}}+\ldots+q^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\right).$$

$$\frac{2K}{\pi}\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_1(2x,q^2)=2\vartheta(0,q^2)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a=-n}^{+n}q^{\frac{1}{2}(2n+1)^2-2a^2}\, sin(4n+2)x\right.$$

$$\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=0}^{a=n-1}q^{2n^2-\frac{1}{2}(2a+1)^2}\, sin4nx\right\}. \qquad (44'')$$

Помножимъ это равенство почленно на равенство:

$$\frac{2Kk}{\pi}sin\, am\frac{2Kx}{\pi}cosx=2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}q^{\frac{1}{2}(2b-1)m}\left\{sin(m+1)x+sin(m-1)x\right\}.$$

Помноживъ, возьмемъ интегралъ:

$$\frac{4K^2k}{\pi^3\sqrt[8]{q}}\int_0^{\pi} sin\ am\frac{2Kx}{\pi}\Delta\ am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_1(2x,q^2)cosx\ dx$$

$$=2\vartheta(0,q^2)\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{a=-n}^{+n}(q^{\frac{1}{8}\rho_1(n,b,a)}+q^{\frac{1}{8}\rho_2(n,b,a)})$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=0}^{n-1}(q^{\frac{1}{8}\rho_3(n,b,a)}+q^{\frac{1}{8}\rho_4(n,b,a)})\Big\}, \qquad (45)$$

$$\rho_1(n,b,a)=16n^2+32nb+8b-16a^2-1,$$
$$\rho_2(n,b,a)=16n^2+32nb+24b-16a^2-9,$$
$$\rho_3(n,b,a)=16n^2+16n+32nb+8b-16a^2-16a-1,$$
$$\rho_4(n,b,a)=16n^2+16n+32nb-8b-16a^2-16a-9.$$

Представимъ теперь $\rho_1(n,b,a)$, $\rho_2(n,b,a)$, $\rho_3(n,b,a)$ и $\rho_4(n,b,a)$ въ видѣ минусъ-опредѣлителей квадратичныхъ формъ:

$$\rho_1(n,b,a)=(4n+4b+4a)(4n+4b-4a)-(4b-1)^2$$
$$=(8n+2)(4n+4b-4a)-(4n-4a+1)^2,$$
$$\rho_2(n,b,a)=(4n+4b+4a)(4n+4b-4a)-(4b-3)^2$$
$$=(8n+6)(4n+4b-4a)-(4n-4a+3)^2,$$
$$\rho_3(n,b,a)=(4n+4b+4a+4)(4n+4b-4a)-(4b+1)^2$$
$$=(8n+2)(4n+4b-4a)-(4n-4a-1)^2,$$
$$\rho_4(n,b,a)=(4n+4b+4a+4)(4n+4b-4a)-(4b+3)^2$$
$$=(8n-2)(4n+4b-4a)-(4n-4a-3)^2.$$

Въ выраженіяхъ $\rho_1(n,b,a)$ и $\rho_2(n,b,a)$ должно будетъ замѣнить a черезъ $-a$, если a отрицательно.

Разсматривая внимательно эти выраженія, видимъ, что вторую часть равенства (45) можно написать такъ:

$$2\vartheta(0,q^2)\Sigma M(r)q^{\frac{1}{8}r}.$$

Дѣйствительно, при измѣненіи n, b и a въ предѣлахъ, указанныхъ въ равенствѣ (45), $\rho_1(n, b, a)$ даетъ намъ формы двухъ родовъ: 1) такія формы, у которыхъ средній коэффиціентъ вида $\pm(4n'+3)$ и оба крайніе дѣлятся на 4 и при томъ сравнимы между собою по модулю 8; 2) формы съ среднимъ коэффиціентомъ вида $\pm(4n'+1)$, однимъ изъ крайнихъ вида $8n'+2$ и другимъ крайнимъ, дѣлящимся на 4. Показатель $\rho_2(n,b,a)$ даетъ намъ также формы двухъ родовъ: 1) формы, у которыхъ средній коэффиціентъ вида $\pm(4n'+1)$ и оба крайніе дѣлятся на 4 и при томъ сравнимы по модулю 8; 2) формы, у которыхъ средній коэффиціентъ вида $\pm(4n'+3)$, одинъ крайній дѣлится на 4, а другой вида $8n'+6$. Выраженіе $\rho_3(n,b,a)$ даетъ также формы двухъ родовъ: 1) формы, у которыхъ средній коэффиціентъ вида $\pm(4n'+1)$ и оба крайніе дѣлятся на 4, но не сравнимы по модулю 8; 2) формы съ среднимъ коэффиціентомъ вида $\pm(4n'+3)$, однимъ изъ крайнихъ вида $8n'+2$ и другимъ крайнимъ, кратнымъ 4. Наконецъ $\rho_4(n,b,a)$ даетъ формы, у которыхъ средній коэффиціентъ вида $\pm(4n'+3)$ и оба крайніе дѣлятся на 4, но не сравнимы по модулю 8, и формы съ среднимъ коэффиціентомъ вида $\pm(4n'+1)$, однимъ крайнимъ вида $8n'+6$ и другимъ крайнимъ, кратнымъ 4. Такимъ образомъ каждая неэквивалентная приведенная форма съ двумя крайними четными коэффиціентами будетъ имѣть одного представителя, и только одного, между показателями $\rho_1(n,b,a)$, $\rho_2(n,b,a)$, $\rho_3(n,b,a)$ и $\rho_4(n,b,a)$, находящимися въ выраженіи, заключенномъ въ равенствѣ (45) въ кривыя скобки, и слѣдовательно правую сторону (45) можно написать такъ:

$$2\vartheta(0,q^2)\Sigma\{G(r)-F(r)\}q^{\frac{1}{8}r}.$$

Но числа вида $8h+7$ не разлагаются на три квадрата, поэтому изъ формулы (30) слѣдуетъ $G(r)=2F(r)$; слѣдовательно

$$\frac{4K^2k}{\sqrt[8]{q\pi^3}}\int_0^\pi sin\ am\frac{2Kx}{\pi}\Delta\ am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_1(2x,q^2)cosx\ dx=2\vartheta(0,q^2)\Sigma F(r)q^{\frac{1}{8}r}. \quad (46)$$

Сравнимъ (46) съ (44′):

$$2\vartheta(0,q^2)\Sigma F(r)q^{\frac{1}{8}r}=\Sigma(-1)^{\frac{1}{8}(r-7)}\{\Phi'(r)-\Psi'(r)\}q^{\frac{1}{8}r}; \quad (47)$$

$$2F(r)-4F(r-4^2)+4F(r-8^2)-\ldots=(-1)^{\frac{1}{8}(r-7)}\{\Phi'(r)-\Psi'(r)\}. \quad (48)$$

§ 36. Формулы (11), (12), (13), (18), (19), (33), (43) и (48) суть основныя формулы Кронекера, которыя онъ сообщилъ въ 57 томѣ журнала Крелля. Для удобства я ихъ выпишу въ одну табличку, напоминая, что n въ нихъ обозначаетъ всякое положительное цѣлое число, m всякое нечетное положительное число, s число вида $8n+1$, а r число вида $8n+7$:

$$F(4n)+2F(4n-1^2)+2F(4n-2^2)+\ldots=\Phi(n)+2X(n)+\Psi(n), \quad (49)$$

$$F(2m)+2F(2m-1^2)+2F(2m-2^2)+\ldots=2\Phi(m)+\varphi(m), \quad (50)$$

$$F(2m)-2F(2m-1^2)+2F(2m-2^2)-\ldots=-\varphi(m), \quad (51)$$

$$2F(m)+4F(m-1^2)+4F(m-2^2)+\ldots=\Phi(m)+\Psi(m)+\varphi(m), \quad (52)$$

$$2F(m)-4F(m-1^2)+4F(m-2^2)-4F(m-3^2)+4F(m-4^2)-\ldots$$
$$=(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\{\Phi(m)-\Psi(m)\}+\varphi(m), \quad (53)$$

$$3G(m)+6G(m-1^2)+6G(m-2^2)+6G(m-3^2)+6G(m-4^2)+\ldots$$
$$=\Phi(m)+3\Psi(m)+3\varphi(m)+2\psi(m), \quad (54)$$

$$2F(r)-4F(r-4^2)+4F(r-8^2)-\ldots=(-1)^{\frac{1}{8}(r-7)}\{\Phi'(r)-\Psi'(r)\}, \quad (55)$$

$$4\sum_m(-1)^{\frac{1}{16}(s-m^2)}\left\{2F\left(\frac{s-m^2}{16}\right)-3G\left(\frac{s-m^2}{16}\right)\right\}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{8}(s-1)}\{\Phi'(s)-\Psi'(s)\}+\varphi(s)+4\psi(s)-4\varphi'(s)-8\psi'(s). \quad (56)$$

Посредствомъ этихъ формулъ можно постепенно вычислить числа неэквивалентныхъ классовъ формъ съ отрицательными опредѣлителями; особенно для этого удобны формулы (55) и (56).

§ 37. Кромѣ этихъ формулъ Кронекеръ вывелъ еще нѣкоторыя формулы. Но всѣ эти формулы выводятся изъ предъидущихъ формулъ: онѣ получаются или изъ (49)—(56), или простыми преобразованіями рядовъ, изъ которыхъ выведены (49)—(56). Мы ограничимся выводомъ только нѣкоторыхъ, наиболѣе интересныхъ формулъ.

Прежде всего мы имѣемъ рядъ элементарныхъ формулъ, т. е. формулъ, могущихъ выводиться элементарными соображеніями.

Если n не нечетный квадратъ, то $F(4n)=2F(n)$; (57)

если же m нечетный квадратъ, то $F(4m)=2F(m)-1$. (58)

Для всякаго n $G(4n)=F(4n)+G(n)$. (59)

Если $n\equiv 1$ или 2 (*mod.* 4), то $G(n)=F(n)$. (60)

Если $n\equiv 7$ (*mod.* 8), то $G(n)=2F(n)$. (61)

Если $n\equiv 3$ (*mod.* 8) и не утроен. квадр., то $3G(n)=4F(n)$; (62)

если $n\equiv 3$ (*mod.* 8) и утроенный квадр., то $3G(n)=4F(n)+2$. (63)

Для краткости изложенія мы иногда не будемъ пренебрегать элементарными доказательствами.

Формулы (57), (58) и (61) уже доказаны.

Формула (60) показываетъ, что нельзя составить форму вида $2ax^2+2bxy+2cy^2$, у которой минусъ-опредѣлитель вида $4N+1$ или $4N+2$.

Формула (59): всякая форма съ опредѣлителемъ $-4n$, у которой два крайніе коэффиціента дѣлятся на 2, имѣетъ видъ $2ax^2\pm 4bxy+2cy^2$; поэтому такихъ неэквивалентныхъ формъ столько, сколько неэквивалентныхъ формъ съ опредѣлителемъ $-n$ вида $ax^2\pm 2bxy+cy^2$.

Наконецъ для доказательства (62) и (63) найдемъ два выраженія для числа разложеній $8n+3$ на три квадрата; очевидно, что всѣ эти квадраты нечетны. Прежде всего изъ формулы (30) слѣдуетъ

Теорема. *Число разложеній* $8n+3$ *на три квадрата равно* $24F(8n+3)-12G(8n+3)$, *если* $8n+3$ *не утроенный квадратъ; если-же* $8n+3$ *утроенный квадратъ, то число разложеній будетъ* $24F(8n+3)-12G(8n+3)+8$.

Для полученія второй формулы, изображающей число разложеній на три квадрата, замѣнимъ въ равенствѣ (49) n черезъ $2n+1$ и вычтемъ почленно изъ него равенство (52), полагая въ послѣднемъ $m=2n+1$. Принимая въ соображеніе формулы (57) и (58), получимъ

$$F(8n+3)+F(8n+3-8)+F(8n+3-24)+F(8n+3-48)+\ldots$$
$$=\Phi(2n+1). \qquad (64)$$

Помножимъ обѣ части равенства на $2q^{2n+\frac{3}{4}}$ и будемъ суммировать, придавая n всѣ цѣлыя значенія отъ 0 до ∞:

$$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}F(8n+3)q^{2n+\frac{1}{2}}=2q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(2n+1)q^{2n+1}$$

$$=2q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{4n+2}}. \qquad (65)$$

Сдѣлаемъ въ равенствѣ (6′) $x=\frac{1}{2}\pi$. Замѣтивъ, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}},$$

получимъ

$$\frac{K^2k^2}{\pi^2}=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{4n+2}}.$$

$$8\sum_{n=0}^{\infty}F(8n+3)q^{2n+\frac{3}{4}}=\vartheta_2^{\,3}(0,q)$$

$$=\sum_{x,\,y,\,z=-\infty}^{+\infty}\sum\sum q^{\frac{1}{4}\{(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2\}}. \qquad (66)$$

Теорема. *Число разложеній* $8n+3$ *на три квадрата, считая и отрицательныя рѣшенія, равно* $8F(8n+3)$.

Сопоставляя эту теорему съ предъидущею, выводимъ формулы (62) и (63).

Мы имѣемъ такимъ образомъ двѣ теоремы о числѣ разложеній даннаго числа на три квадрата; одна теорема общая, другая даетъ число разложеній на три нечетные квадрата. Двѣ теоремы, подобныя послѣдней, прямо вытекаютъ изъ общей теоремы при примѣненіи (60) формулы.

Теорема 1. *Число разложеній числа вида* $4n+1$ *на три квадрата равно* $12F(4n+1)$ *или* $12F(4n+1)-6$, *смотря по тому, не квадратъ или квадратъ* $4n+1$.

Теорема 2. *Число разложеній* $4n+2$ *на три квадрата равно* $12F(4n+2)$.

Замѣтимъ еще одну формулу Кронекера, которая легко выводится, если въ равенствахъ (52) и (53) положить $m=4n+1$ и вычесть второе изъ перваго; пользуясь кромѣ того равенствами (57) и (58), получимъ

$$F(n)+F(n-2)+F(n-6)+F(n-12)+F(n-20)+\ldots$$

$$=\frac{1}{8}\Psi(4n+1)+\frac{1}{8}\tau(4n+1), \qquad (67)$$

гдѣ $\tau(4n+1)$ число рѣшеній уравненія $(2x+1)^2+4(2y+1)^2=4n+1$, считая и отрицательныя рѣшенія; слѣдовательно при n нечетномъ $\tau(4n+1)=2\varphi(4n+1)$, при n четномъ $\tau(4n+1)=0$.

§ 38. Въ предъидущихъ формулахъ играли роль функціи, обозначающія суммы дѣлителей различнаго характера нѣкотораго числа n: $\Phi(n)$, $\Psi(n)$, $\Phi'(n)$ и $\Psi'(n)$. Допуская умѣніе разлагать числа на комплексныя Гауссовы цѣлыя числа, можно вывести другія формулы, связывающія функціи F и G съ новыми функціями, зависящими отъ нахожденія рѣшеній неопредѣленныхъ квадратныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Такъ, Кронекеръ опредѣляетъ

$$\sum_h (-1)^h F(n-4h^2),\ h=0,\ \pm1,\ \pm2\ldots, \qquad (68)$$

съ помощію функціи

$$\Omega(n)=\sum_m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}m, \qquad (68')$$

гдѣ m всевозможныя нечетныя положительныя числа, удовлетворяющія равенству $l^2+m^2=n$, при чемъ l или положительно, или отрицательно, или нуль. Замѣтимъ, что для $n\equiv 3$ ($mod.$ 4) сумма (68) получается рядомъ легкихъ вычисленій изъ формулъ (52), (53) и (54).

Для опредѣленія суммы (68) въ случаѣ $n\equiv 1$ или 2 ($mod.$ 4) переведемъ теоремы 1 и 2 предъидущаго параграфа на алгебраическій языкъ:

$$4\sum_{n=0}^{\infty}F(4n+2)q^{n+\frac{1}{2}}=\vartheta_2^{\,2}(0,q)\vartheta_3(0,q),$$

$$4\sum_{n=0}^{\infty}F(4n+1)q^{n+\frac{1}{4}}=\vartheta_2(0,q)\{\vartheta_3^{\,2}(0,q)+1\}.$$

Умножимъ оба равенства на $\vartheta(0,q)$ и вспомнимъ, что $\vartheta_1'(0,q)=\vartheta_2(0,q)\vartheta(0,q)\vartheta_3(0,q)$.

$$\sum_{n_1,n}\sum(-1)^{n_1}F(4n+2)q^{n_1^2+n+\frac{1}{2}}=\sum_{mm_1}\sum(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}mq^{\frac{1}{4}(m^2+m_1^2)},$$

$$2\sum_{nn_1}\sum(-1)^{n_1}F(4n+1)q^{n_1^2+n+\frac{1}{4}}=\sum_{mn_1}\sum(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}mq^{n_1^2+\frac{1}{4}m^2}$$

$$+\sum_{mn_1}\sum(-1)^{n_1}q^{n_1^2+\frac{1}{4}m^2},$$

гдѣ m и $m_1=1,3,5,7\ldots$, $n=0,1,2,3\ldots$, $n_1=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$. Сравнивая одинаковыя степени въ обоихъ равенствахъ, получаемъ

$$2\sum_h(-1)^hF(4n+2-4h^2)=\sum(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}m=\Omega(4n+2), \qquad (69)$$

$$2\sum_h(-1)^hF(4n+1-4h^2)=\Omega(4n+1)+(-1)^n\varphi(4n+1). \qquad (70)$$

§ 39. Изъ восьми основныхъ теоремъ Кронекера и изъ равенствъ (57).—(63) выводятся еще многія интересныя теоремы; эти теоремы иногда имѣютъ такую неожиданную форму, что на первый взглядъ онѣ кажутся не имѣющими ничего общаго съ выведенными нами формулами Кронекера. Такъ, Ліувилль въ 14 томѣ своего журнала даетъ три интересныя формулы, которыя, не смотря на свой оригинальный видъ, суть слѣдствія теоремъ, помѣщенныхъ нами на страницѣ 177.

Однако можетъ случиться, что слѣдствія выводятся на столько сложнымъ путемъ изъ теоремъ Кронекера, что можно предпочесть выводить ихъ прямо способомъ Эрмита, т.-е. тѣми пріемами, которыми мы вывели восемь формулъ Кронекера. Кромѣ того упомянутый способъ можетъ дать и такія теоремы, которыя совершенно независятъ отъ восьми теоремъ Кронекера. Къ теоремамъ послѣдняго рода относятся такія, которыя даютъ свойства болѣе сложныхъ функцій чѣмъ $F(n)$ и $G(n)$; такія болѣе сложныя функціи также обозначаютъ числа извѣстнаго рода формъ съ даннымъ отрицательнымъ опредѣлителемъ. Къ теоремамъ, не выводимымъ изъ восьми формулъ Кронекера, могутъ относиться и новыя свойства функцій $F(n)$, $G(n)$ и $M(n)$; такъ, Гирстеръ далъ цѣлый рядъ такихъ новыхъ свойствъ. Вслѣдствіе всего этого очень умѣстно сдѣлать здѣсь нѣсколько общихъ соображеній о пріемахъ, употребленныхъ нами при выводѣ формулъ Кронекера.

Во всѣхъ предъидущихъ выводахъ опредѣлялся какой нибудь коэффиціентъ тригонометрическаго разложенія функціи, въ которой произведеніе трехъ Якобіевыхъ функцій дѣлится на произведеніе такихъ же двухъ функцій. Въ своихъ двухъ статьяхъ, трактующихъ о приложеніяхъ эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ, Эрмитъ опредѣляетъ всегда только постоянный членъ тригонометрическаго разложенія; этимъ, можетъ быть, объясняется то, что въ его статьяхъ выведены только нѣкоторыя частныя формулы и что задачу о трехъ квадратахъ онъ рѣшилъ не съ разу. Кронекеру должно приписать мысль опредѣлять коэффиціентъ при $\cos x$ въ тригонометрическомъ разложеніи; вслѣдствіе этого выборъ формулъ значительно расширился.

Во всѣхъ предъидущихъ выводахъ вышеупомянутый коэффиціентъ опредѣляется двумя способами; а потому и получаются равенства.

Опредѣляется, во первыхъ, коэффиціентъ, который получится, если эллиптическую функцію второй степени умножить на Якобіеву функцію. Такимъ образомъ получается сумма дробей, у которыхъ числители и знаменатели—функціи модуля q. Если это выраженіе расположить по возрастающимъ степенямъ q, то коэффиціенты при различныхъ степеняхъ q будутъ нѣкоторыя алгебраическія суммы дѣлителей показателей q, $\sqrt{q}$, $\sqrt[4]{q}$ и т. п. Впрочемъ мы видѣли, что возможны и другія функціи, напримѣръ функція $\Omega(n)$.

Другимъ способомъ, въ нашихъ выводахъ коэффиціентъ опредѣлялся слѣдующимъ образомъ. Опредѣлялось тригонометрическое разложеніе частнаго, полученнаго отъ дѣленія двухъ Якобіевыхъ функцій на третью. Такое частное уже не двойно-періодичная функція; здѣсь коэффиціенты при тригонометрическихъ функціяхъ состоятъ изъ суммъ конечнаго числа степеней модуля q. Далѣе рядъ, выражающій это частное, умножался на двойно-періодичную функцію, частное двухъ Якобіевыхъ функцій. При перемноженіи этихъ рядовъ ищется опять тотъ же коэффиціентъ, что въ первомъ случаѣ. Въ этомъ случаѣ коэффиціентъ выражался такимъ образомъ черезъ q, что степени q можно было разсматривать, какъ числа, пропорціональныя минусъ-опредѣлителямъ нѣкоторыхъ квадратичныхъ формъ.

Въ предъидущемъ пріемѣ можно дѣлать нѣкоторыя измѣненія. Такъ, Эрмитъ предлагаетъ употреблять иногда вмѣсто двойно-періодичныхъ функцій производныя отъ логариѳмовъ Якобіевыхъ функцій.

Примѣнимъ описанный способъ къ выводу нѣсколькихъ формулъ, отличающихся своимъ характеромъ отъ формулъ, выведенныхъ Кронекеромъ въ различныхъ его сочиненіяхъ.

Примѣръ 1. На страницѣ 149 имѣемъ формулу (3); помножимъ ее почленно на слѣдующее равенство:

$$\frac{\vartheta_3'(x)}{\vartheta_3(x)}=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin 2nx. \qquad (71)$$

Перемноживъ, возьмемъ интегралъ:

$$\sqrt{\frac{2Kk^2}{\pi^3}}\int\limits_0^\pi sin\ am\frac{2Kx}{\pi}.\frac{\vartheta_2(x)\vartheta_3'(x)}{\vartheta_3(x)}dx$$

$$=4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-n}^{a=n-1}(-1)^n q^{n^2+n+2nb-\frac{1}{4}(2a+1)^2}. \qquad (72)$$

Съ другой стороны, имѣемъ

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\frac{dlg\ \Delta am\frac{2Kx}{\pi}}{dx}\vartheta_3'(x)dx=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)q^{2n(2n-1)}}{1-q^{4n-2}}.$$

$$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-n}^{n-1}(-1)^{n-1}q^{n(n+2b+1)-\frac{1}{4}(2a+1)^2}$$

$$=4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}(2n-1)q^{(2n-1)(2n+2b)}. \qquad (73)$$

Показатель при $\sqrt[4]{q}$ въ первой суммѣ можетъ быть и здѣсь представленъ въ двухъ видахъ:

$$2n(2n+2+4b)-(2a+1)^2,\ 2n(4n+4b-4a)-(2n-2a-1)^2.$$

Если $(2a+1)^2\leqq n^2$, то

$$2nx^2+2(2a+1)xy+(2n+2+4b)y^2$$

изображаетъ всевозможныя приведенныя формы съ опредѣлителемъ вида $1-8N$ и однимъ крайнимъ коэффиціентомъ четно-нечетнымъ, а другимъ четно-четнымъ. Если четно-нечетенъ первый коэффиціентъ, то $(-1)^{n-1}=+1$; если четно-нечетенъ третій коэффиціентъ, то $(-1)^{n-1}=-1$.

Назовемъ черезъ $2a_1+1$ абсолютную величину $2a+1$ и положимъ $2a_1+1>n$, $n\leqq 2n+2b-2a_1$; тогда

$$2nx^2 \pm 2(2n-2a_1-1)xy+(4n+4b-4a_1)y^2$$

изобразитъ или приведенныя формы съ опредѣлителями вида $1-8N$ и съ двумя четно-четными крайними коэффиціентами (въ такомъ случаѣ $(-1)^{n-1}=-1$), или такія приведенныя формы, у которыхъ первый коэффиціентъ четно-нечетенъ, а послѣдній четно-четенъ (въ такомъ случаѣ $(-1)^{n-1}=+1$).

Пусть наконецъ $2a_1+1>n>2n-2a_1+2b$; тогда

$$4(n+b-a_1)x^2 \pm 2(2n-2a_1-1)xy+2ny^2$$

изобразитъ приведенныя формы съ двумя крайними четно-четными коэффиціентами, а также формы съ третьимъ четно-нечетнымъ и первымъ четно-четнымъ. Въ первомъ случаѣ $(-1)^{n-1}=-1$, во второмъ $(-1)^{n-1}=+1$.

Итакъ тройная сумма первой части равенства (73) состоитъ изъ членовъ вида $\pm 2q^{\frac{1}{4}(ac-b^2)}$, въ которыхъ $c \geqq a$, $a^2 \geqq 4b^2$, a и c положительны, c непремѣнно четно-четно, а b нечетно; если a четно-четно, то передъ членомъ должно брать —; если же a четно-нечетно, то должно брать +.

Будемъ обозначать *черезъ $A(n)$ число всѣхъ неэквивалентныхъ приведенныхъ формъ съ опредѣлителемъ $-n$ и съ двумя крайними коэффиціентами четно-четными, черезъ $B(n)$ число такихъ же формъ съ первымъ коэффиціентомъ четно-нечетнымъ и послѣднимъ четно-четнымъ, черезъ $Z(2n)$ сумму нечетныхъ дѣлителей $2n$, меньшихъ $\sqrt{2n}$.* Тогда получаемъ теорему:

$$B(8n-1)+B(8n-3^2)+B(8n-5^2)+\ldots+B(8n-m^2)+\ldots$$
$$-A(8n-1)-A(8n-3^2)-A(8n-5^2)-\ldots=Z(2n). \qquad (74)$$

Примѣръ 2. Помножимъ то же равенство (3) на

$$\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}=4\sum\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin 2nx.$$

$$\sqrt{\frac{2Kk^3}{\pi^3k'}}\int_0^{\pi}\sin am\frac{2Kx}{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta'(x)\,dx$$

$$=4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{a=-n}^{n-1} q^{n^2+n+2nb-\frac{1}{4}(2a+1)^2} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\left\{G(8n-1)-F(8n-1)\right\} q^{2n-\frac{1}{4}}$$

$$=8\sum_{n=1}^{\infty} F(8n-1) q^{2n-\frac{1}{4}}. \tag{75}$$

Умножимъ обѣ части равенства (75) на $\vartheta_1'(0)=\vartheta(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)$:

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^3}\int_0^{\pi} \sin am\frac{2Kx}{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta'(x)\,dx$$

$$=16\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}(-1)^{r+b+1} r^2 q^{r^2+r+2rb}$$

$$=16\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}} m q^{\frac{1}{4}m^2} . \Sigma F(8n-1) q^{2n-\frac{1}{4}}; \tag{76}$$

здѣсь по обыкновенію m обозначаетъ нечетное число.

Пусть $2n=d\delta$, $\delta>d$. *Предполагая всегда одну изъ величинъ d или δ нечетною*, будемъ употреблять слѣдующее обозначеніе:

$$\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d+\delta+1)} d^2 = \varkappa(2n), \tag{77}$$

гдѣ d и δ должны получать всевозможныя значенія, удовлетворяющія тремъ предъидущимъ условіямъ. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p(2p+1)F(8n-1)q^{2n+p^2+p} = \sum_{n=1}^{\infty}\varkappa(2n)q^{2n},$$

$$F(8n-1)-3F(8n-3^2)+5F(8n-5^2)-7F(8n-7^2)+\ldots=\varkappa(2n). \tag{78}$$

Мы упомянули на страницѣ 179 о трехъ формулахъ Ліувилля; выведемъ теперь одну изъ этихъ формулъ, такъ какъ въ ней дѣло касается той же функціи отъ различныхъ $F(n)$, какъ и въ равенствѣ (78).

Помножимъ обѣ части равенства (66) на $\vartheta_1'(0)$:

$$16\Sigma\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}iF(4m-1)q^{m+\frac{1}{4}(i^2-1)}=\frac{8K^3}{\pi^3}k^2\sqrt{k'},$$

гдѣ i и m всевозможныя нечетныя, положительныя числа. На страницѣ 114 имѣемъ формулу (31′); примѣняя ее, получаемъ

$$\Sigma_i(-1)^{\frac{1}{2}(i-1)}iF(4m-i^2)=\Sigma\Sigma(-1)^{r+s}(2r+1)(2s+1)$$

$$=\Sigma\Sigma(a^2-4b^2), \tag{79}$$

гдѣ i берется такъ, что $4m-i^2>0, (2r+1)^2+(2s+1)^2=2m,$

$$2r+1=\pm(a+2b),\ 2s+1=\pm(a-2b),\ a^2+4b^2=m.$$

Послѣдняя сумма должна распространяться на всѣ положительныя a и на положительныя, отрицательныя и равныя нулю b.

§ 40. Примѣръ 3. Этотъ примѣръ мы посвятимъ выводу формулъ Гирстера *третьей ступени*; о формулахъ *другихъ ступеней* мы скажемъ нѣсколько словъ въ 7-ой главѣ.

Въ теоріи эллиптическихъ функцій извѣстенъ слѣдующій рядъ:

$$lg\vartheta_1(x,\sqrt{q})=lg(2q^{\frac{1}{8}}sinx)-\sum\frac{1}{r}\cdot\frac{q^r}{1-q^r}(2cos2rx+1).$$

Изъ этого ряда дифференцированіемъ выводимъ

$$\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx}=cotgx+4\sum\frac{q^r}{1-q^r}sin2rx, \tag{80}$$

$$q\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dq}=\frac{1}{8}-\sum\frac{q^r}{(1-q^r)^2}(2cos2rx+1).$$

Замѣтивъ однако, что

$$\left\{\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx}\right\}^2=-\frac{d^2lg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx^2}-8q\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dq},$$

легко находимъ

$$\left\{\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx}\right\}^2=cotg^2x+8\sum\frac{rq^r}{1-q^r}(1-cos2rx)$$

$$+16\sum\frac{q^r}{(1-q^r)^2}cos2rx, \tag{81}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\vartheta_3(x)\left\{\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx}\right\}^2-\vartheta_3(0)cotg^2x\right]dx$$ [1])

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(n)q^n+20\sum_{n=1}^{\infty}\Psi(n)q^n. \qquad (82)$$

Въ послѣдней формулѣ $\Phi(n)$ и $\Psi(n)$ значатъ то же, что и въ формулахъ Кронекера.

Опредѣлимъ тотъ же интегралъ инымъ путемъ:

$$\vartheta_3(x)\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx}=\vartheta_3(0)cotgx-8\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n^2}sin2nx$$

$$+2\vartheta_3(0)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=-n+1}^{n-1}q^{n^2-a^2}sin2nx+4\vartheta_2(0)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{n}q^{n^2-(a-\frac{1}{2})^2}sin2nx. \qquad (83)$$

Замѣтивъ же, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi sin2nx\,cotgx\,dx=1,\ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi sin2px\,sin2nx\,dx=0 \text{ или } 1,$$

смотря по тому, p не равно или равно n, находимъ

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\vartheta_3(x)\left\{\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx}\right\}^2-\vartheta_3(0)cotg^2x\right]dx$$

$$=-8\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n^2}-16\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}nq^{n(n+b)}+2\vartheta_3(0)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=-n+1}^{n-1}q^{n^2-a^2}$$

[1]) Если въ Якобіевой функціи пропущенъ модуль, то подразумѣвается модуль q.

$$+4\vartheta_2(0)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{n}q^{n^2-(a-\frac{1}{2})^2}+4\vartheta_3(0)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{a=-n+1}^{n}q^{n^2+nb-a^2}$$

$$+8\vartheta_2(0)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{n}q^{n^2+nb-(a-\frac{1}{2})^2}. \tag{84}$$

Подразумѣвая подъ ζ какое нибудь положительное число или нуль, разсмотримъ выраженіе $4n^2+4nb-\zeta^2$. Если $\zeta\leqq n$, то $4n^2+4nb-\zeta^2=2n(2n+2b)-\zeta^2$ можно разсматривать какъ минусъ-опредѣлитель приведенныхъ формъ:

$$2nx^2\pm 2\zeta xy+(2n+2b)y^2.$$

Придавая n всевозможныя положительныя значенія, b—тѣ же значенія со включеніемъ нуля, а ζ—всевозможныя значенія, не превышающія n и не меньшія нуля, мы получимъ всевозможныя приведенныя формы съ двумя крайними коэффиціентами четными и съ отрицательными опредѣлителями. Если $2n\geqq\zeta>n$, то $4n^2+4nb-\zeta^2=2n(4n+2b-2\zeta)-(2n-\zeta)^2$ можно разсматривать какъ минусъ-опредѣлитель приведенныхъ формъ:

$$2nx^2\pm 2(2n-\zeta)xy+(4n+2b-2\zeta)y^2,$$
$$(4n+2b-2\zeta)x^2\pm 2(2n-\zeta)xy+2ny^2.$$

Будемъ называть *черезъ* $M(n)$ *число всѣхъ неэквивалентныхъ, приведенныхъ формъ съ опредѣлителемъ* $-n$ *и двумя крайними коэффиціентами четными, считая всякую форму* $2px^2+2py^2$ *за половину, а форму* $2px^2+2pxy+2py^2$ *за треть* (*n и p нѣкоторыя положительныя, цѣлыя числа*).

Тогда можно сообразить, что правая сторона равенства (84) можетъ быть написана такъ:

$$-8\Sigma\Phi(n)q^n+8\Sigma\Psi(n)q^n+12\vartheta_3(0)\Sigma M(4n)q^n+12\vartheta_2(0)\Sigma M(4n-1)q^{n-\frac{1}{4}}.$$

Сопоставляя послѣднюю формулу съ формулою (82), получаемъ ариѳметическую теорему:

$$\Sigma M(4n-h^2)=\Phi(n)+\Psi(n), \tag{85}$$

$$h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots,\ h^2\leqq 4n,$$

при чемъ однако полагается $M(0)=-\frac{1}{12}$.

Эта теорема есть слѣдствіе формулъ Кронекера; выводъ ея приведенъ только съ тою цѣлью, чтобы послѣдующіе выводы были понятнѣе.

Замѣтимъ теперь одну особенность формулы $2n(2n+2b)-\zeta^2$ въ томъ случаѣ, когда она сравнима съ 1 по модулю 3. Положимъ, $\zeta\equiv\pm1\ (mod\ 3)$; тогда $2n\equiv\pm1\ (mod\ 3)$, $2n+2b\equiv\mp1\ (mod\ 3)$. Въ такомъ случаѣ, не смотря на предъидущія ограниченія, въ формулахъ

$$2nx^2\pm2\zeta xy+2(n+b)y^2,\quad 2nx^2\pm2(2n-\zeta)xy+2(2n+b-\zeta)y^2,$$
$$2(2n+b-\zeta)x^2\pm2(2n-\zeta)xy+2ny^2 \qquad (86)$$

мы при измѣненіи n, b и ζ въ тѣхъ же предѣлахъ, какъ на страницѣ 186, будемъ имѣть всевозможныя приведенныя формы съ опредѣлителями, сравнимыми съ -1 по модулю 3. Въ самомъ дѣлѣ, если $\zeta\equiv2n\ (mod\ 3)$, то въ двухъ послѣднихъ формулахъ (86) мы имѣемъ всѣ формы съ среднимъ коэффиціентомъ, дѣлящимся на 3, а въ первой формулѣ формы, у которыхъ первый коэффиціентъ сравнимъ съ абсолютною величиною втораго коэффиціента по модулю 3; если $2n$ не $\equiv\zeta\ (mod\ 3)$, то $2n+2b\equiv\zeta$, $4n+2b-2\zeta\equiv2n-\zeta\ (mod\ 3)$, и тогда въ первой и второй формулахъ третій коэффиціентъ сравнимъ съ абсолютною величиною втораго по модулю 3, а въ третьей формулѣ (86) первый коэффиціентъ сравнимъ по модулю 3 съ абсолютною величиною втораго. Такимъ образомъ при измѣненіи n, b и ζ каждая приведенная форма изобразится формулами (86) два раза.

Замѣтимъ кстати, что и въ случаѣ $\zeta\equiv0\ (mod\ 3)$ три формулы (86) даютъ всѣ приведенныя формы съ опредѣлителями, сравнимыми съ -1 по модулю 3, но только по разу; именно первая формула всѣ формы, у которыхъ средній коэффиціентъ дѣлится на 3, вторая тѣ формы, у которыхъ первый коэффиціентъ сравнимъ съ абсолютною величиною втораго по модулю 3; въ третьей же формулѣ третій коэффиціентъ сравнимъ съ абсолютною величиною втораго по модулю 3.

Изъ предъидущихъ разсужденій выводимъ слѣдующее заключеніе: если въ четырехъ послѣднихъ суммахъ формулы (84) отбросимъ всѣ члены, въ которыхъ a или $2a-1\equiv 0$ $(mod\ 3)$, и отберемъ потомъ всѣ члены, въ которыхъ показатели при $\sqrt[4]{q}$ сравнимы съ 1 по модулю 3, то отобранные показатели составятъ систему приведенныхъ неэквивалентныхъ формъ съ опредѣлителями, сравнимыми съ -1 по модулю 3, при чемъ эти формы будутъ встрѣчаться въ $^2/_3$ раза рѣже, чѣмъ въ формулѣ (84).

Помножимъ теперь вторую часть равенства (83) на

$$4\sum_{p=0}^{\infty}\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p+3}}sin(6p+2)x+4\sum_{p=0}^{\infty}\frac{q^{6p+4}}{1-q^{9p+6}}sin(6p+4)x. \qquad (87)$$

Если послѣ этого результатъ перемноженія интегрировать, то всѣ члены, въ которыхъ n^2 дѣлится на 3, исчезнутъ. Формула $4n(n+b)-\zeta^2$ будетъ или $\equiv 1$ $(mod\ 3)$ при $\zeta\equiv\pm 1$ $(mod\ 3)$, или $\equiv 2$ $(mod\ 3)$ при $\zeta\equiv 0$ $(mod\ 3)$. При умноженіи же на $\vartheta_3(0)$ и $\vartheta_2(0)$ формула $4n(n+b)-\zeta^2+9l^2\equiv 1$ $(mod\ 3)$, если $4n(n+b)-\zeta^2\equiv 1$ $(mod\ 3)$, иначе она сравнима съ 2; формула же $4n(n+b)-\zeta^2+(3l\pm 1)^2$ не можетъ быть сравнима съ 1 по модулю 3. Поэтому, если мы въ опредѣленномъ интегралѣ произведенія (87) и второй части (83) отберемъ всѣ члены, у которыхъ показатели q сравнимы съ 1 по модулю 3, то получимъ

$$8\vartheta_3(0,q^9)\sum_{n=0}^{\infty}M(12n+4)q^{3n+1}+8\vartheta_2(0,q^9)\sum_{n=0}^{\infty}M(12n+7)q^{3n+\frac{7}{4}}. \qquad (88)$$

Отберемъ теперь всѣ члены, у которыхъ показатели q сравнимы съ 1, въ интегралѣ

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta_3(x)\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx}\Big\{\sum\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p+3}}sin(6p+2)x$$

$$+\sum\frac{q^{6p+4}}{1-q^{9p+6}}sin(6p+4)x\Big\}dx; \qquad (89)$$

для этого должно вычислить два произведенія: одно, которое умножается на $\vartheta_3(x,q)-\vartheta_3(3x,q^9)$, и другое, которое умножается передъ интегрированіемъ на $\vartheta_3(3x,q^9)$.

Необходимую намъ часть перваго произведенія можно представить такъ:

$$8\sum\sum\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p+3}}\cdot\frac{q^{3r+2}}{1-q^{9r+6}}\cos(6r-6p+2)x$$

$$+8\sum\sum\frac{q^{6p+4}}{1-q^{9p+6}}\cdot\frac{q^{6r+2}}{1-q^{9r+3}}\cos(6r-6p-2)x$$

$$-8\sum\sum\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p+3}}\cdot\frac{q^{6r+2}}{1-q^{9r+3}}\cos(6r+6p+4)x$$

$$-8\sum\sum\frac{q^{6p+4}}{1-q^{9p+6}}\cdot\frac{q^{3r+2}}{1-q^{9r+6}}\cos(6p+6r+8)x.$$

Здѣсь мы приведемъ вычисленіе только коэффиціента при $\cos(6n+2)x$. Этотъ коэффиціентъ можно написать такъ:

$$8\sum_{p=0}^{\infty}\frac{q^{3n+6p+3}+q^{6n+12p+6}}{(1-q^{9p+3})(1-q^{9p+9n+6})}-8\sum_{p=0}^{n-1}\frac{q^{6n-3p}}{(1-q^{9p+6})(1-q^{9n-9p-3})}$$

$$=\frac{8}{1-q^{9n+3}}\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\frac{q^{3n+6p+3}}{1-q^{9p+3}}-\frac{q^{12n+6p+6}}{1-q^{9n+9p+6}}+\frac{q^{6n+3p+3}}{1-q^{9p+3}}-\frac{q^{6n+3p+3}}{1-q^{9n+9p+6}}\right\}$$

$$-\frac{8}{1-q^{9n+3}}\sum_{p=0}^{n-1}\left\{\frac{q^{6n+6p+6}}{1-q^{9p+6}}+\frac{q^{6n-3p}}{1-q^{9n-9p-3}}\right\}.$$

Во второй и четвертой дробяхъ послѣднихъ двухъ суммъ замѣнимъ p черезъ $p-n$, а въ шестой p черезъ $n-p-1$; тогда вмѣсто шести дробей можно написать четыре, которыя всѣ суммируются для p отъ 0 до ∞. Окончательно, предъидущее выраженіе можно написать такъ:

$$\frac{8q^{6n+2}}{1-q^{9n+3}}\sum_{p,\,b=0}^{p,\,b=\infty}\sum\left\{q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\right\}$$

$$+\frac{8q^{3n+1}}{1-q^{9n+3}}\sum_{p,\,b=0}^{p,\,b=\infty}\sum\left\{q^{(3p+1)(3b+2)}-q^{(3p+2)(3b+1)}\right\}.$$

Очевидно, что вторая сумма равна нулю.

Такими же пріемами найдемъ, что коэффиціентъ при $cos(6n+4)x$ будетъ

$$-\frac{8q^{3n+2}}{1-q^{9n+6}}\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}\left\{q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\right\}.$$

Умножая на $\vartheta_3(x,q)-\vartheta_3(3x,q^9)$ и беря интегралъ, мы, очевидно, получимъ

$$8\sum_{n,\,b=0}^{n,\,b=\infty}\sum\left\{q^{(3n+1)(3n+3b+3)}-q^{(3n+2)(3n+3b+3)}\right\}$$

$$\times\sum_{p,\,b=0}^{p,\,b=\infty}\sum\left\{q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\right\}.$$

Замѣтимъ, что въ показателяхъ первой суммы большій множитель дѣлится на 3.

Обращаясь къ той части интеграла (89), которая передъ интегрированіемъ умножается на $\vartheta_3(3x,q^9)$, прежде всего замѣтимъ, что $cotgx\ sin2rx=cos2rx+2cos2(r-1)x+2cos2(r-2)x+\ldots+2cos2x+1$; поэтому выраженіе, которое требуется разсмотрѣть, можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$4\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2p}\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p+3}}cos(6p-6r)x+4\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2p}\frac{q^{6p+4}}{1-q^{9p+6}}cos(6p-6r)x$$

$$+8\sum\sum_{p,\,r=0}^{p,\,r=\infty}\frac{q^{9r+3}}{1-q^{9r+3}}\cdot\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p+3}}\cos(6p-6r)x$$

$$+8\sum\sum_{p,\,r=0}^{p,\,r=\infty}\frac{q^{9r+6}}{1-q^{9r+6}}\cdot\frac{q^{6p+4}}{1-q^{9p+6}}\cos(6p-6r)x$$

$$-8\sum\sum_{p,\,r=0}^{p,\,r=\infty}\frac{q^{9r+6}}{1-q^{9r+6}}\cdot\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p+3}}\cos(6p+6r+6)x$$

$$-8\sum\sum_{p,\,r=0}^{p,\,r=\infty}\frac{q^{9r+3}}{1-q^{9r+3}}\cdot\frac{q^{6p+4}}{1-q^{9p+6}}\cos(6p+6r+6)x.$$

Постоянный коэффиціентъ можно изобразить такъ:

$$4\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(1+q^{9p+3})q^{3p+1}}{(1-q^{9p+3})^2}+4\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(1+q^{9p+6})q^{6p+4}}{(1-q^{9p+6})^2}$$

$$=4\sum\sum_{p,\,b=0}^{p,\,b=\infty}(2b+1)q^{(3p+1)(3b+1)}+4\sum\sum_{p,\,b=0}^{p,\,b=\infty}(2b+1)q^{(3p+2)(3b+2)}.$$

Коэффиціентъ при $\cos 6nx$ распадается на три части: первую, состоящую изъ произведенiй дробей, у которыхъ дѣлителями показателей, кромѣ 3, служатъ только числа вида $3p+1$; вторую, состоящую изъ произведенiй дробей, у которыхъ дѣлители показателей вида $3p+2$; третью, состоящую изъ дробей, у которыхъ дѣлители показателей различнаго вида. Первыя двѣ суммы безконечны, послѣдняя конечна.

Первую сумму можно изобразить такъ:

$$8\sum_{p=n}^{\infty}\frac{q^{3p+1}+q^{12p-3n+4}}{(1-q^{9p+3})(1-q^{9p-9n+3})}$$

$$=\frac{8}{1-q^{9n}}\sum_{p=n}^{\infty}\left\{\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p-9n+3}}-\frac{q^{3p+9n+1}}{1-q^{9p+3}}+\frac{q^{3p+6n+1}}{1-q^{9p-9n+3}}-\frac{q^{3p+6n+1}}{1-q^{9p+3}}\right\}.$$

Легко замѣтить, что вторая дробь послѣдней суммы становится равною третьей, если въ ней p замѣнить $p-n$; поэтому отъ суммированія этихъ дробей останется конечная сумма, состоящая изъ n дробей. Также при замѣнѣ p черезъ $p-n$ четвертая дробь дѣлается равною первой, умноженной на q^{3n}. Соображая все это, представимъ предъидущую сумму такъ:

$$\frac{8q^{6n}(1+q^{3n})}{1-q^{9n}}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{q^{3p+1}}{1-q^{9p+3}}+\frac{8q^{3n}(1-q^{3n})}{1-q^{9n}}\sum_{p,\,b=0}^{p,\,b=\infty}\sum q^{(3p+1)(3b+1)}.$$

Разсуждая также, представимъ вторую часть коэффиціента при $\cos 6nx$ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{8q^{3n}(1+q^{6n})}{1-q^{9n}}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{q^{6n-6p-2}}{1-q^{9n-9p-3}}-\frac{8q^{3n}(1-q^{3n})}{1-q^{9n}}\sum_{p,\,b=0}^{p,\,b=\infty}\sum q^{(3p+2)(3b+2)}.$$

Конечная же сумма представляется такъ:

$$-8\sum_{p=0}^{n-1}\frac{q^{9n-6p-2}+q^{6n+3p+1}}{(1-q^{9n-9p-3})(1-q^{9p+3})}.$$

Простымъ приведеніемъ къ одному знаменателю доказывается, что послѣдняя сумма сокращается съ первыми суммами двухъ остальныхъ частей коэффиціента, такъ что послѣ интегрированія отъ всѣхъ коэффиціентовъ при различныхъ $\cos 6nx$ получимъ

$$8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\left\{q^{3n(3n+3p+1)}-q^{3n(3n+3p+2)}\right\}$$

$$\times\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\left\{q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\right\}.$$

Замѣтимъ, что каждый показатель первой суммы распадается на два множителя, изъ которыхъ меньшій дѣлится на 3, между тѣмъ какъ прежде мы получили подобную же сумму, но тамъ большій дѣлитель показателя кратенъ 3.

Сопоставляя все вышесказанное, можемъ написать, чему равно выраженіе (88):

$$2\vartheta_3(0,q^9)\Sigma M(12n+4)q^{3n+1}+2\vartheta_2(0,q^9)\Sigma M(12n+7)q^{3n+\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{2}{3}\Sigma\Sigma(3p+1)q^{(3p+1)(3b+1)}+\frac{2}{3}\Sigma\Sigma(3p+2)q^{(3p+2)(3b+2)}$$

$$+\frac{1}{3}\left\{1+6\Sigma\Sigma[q^{3n(3p+1)}-q^{3n(3p+2)}]\right\}\Sigma\Sigma\{q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\}. \quad (90)$$

Первыя двѣ суммы второй части (90) можно изобразить такъ:

$$\frac{2}{3}\Sigma\Phi(3n+1)q^{3n+1}.$$

Чтобы преобразовать остальную часть равенства (90), вспомнимъ теорему страницы 94 этого сочиненія; по этой теоремѣ число рѣшеній уравненія $x^2+3y^2=4^\alpha(2n+1)$ при $\alpha=0$ равно $2H(2n+1)$, а при $\alpha>0$ втрое болѣе, т. е. равно $6H(2n+1)$, уравненіе же $x^2+3y^2=4^\alpha(4n+2)$ не имѣетъ рѣшеній. Легко замѣтить, что обѣ послѣднія суммы равенства (90) могутъ быть представлены съ помощью функціи $H(2n+1)$, т. е. функціи, указывающей разность между числомъ дѣлителей $2n+1$ вида $6p+1$ и числомъ дѣлителей вида $6p+5$. Дѣйствительно, вспомнивъ, что $\left(\frac{2}{3}\right)=-1$, легко представить послѣднее произведеніе равенства (90) такъ:

$$\left\{\frac{1}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}H(6n-3)[q^{6n-3}+q^{4(6n-3)}+q^{16(6n-3)}+q^{64(6n-3)}+\ldots]\right\}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}H(6n+1)[q^{6n+1}+q^{4(6n+1)}+q^{16(6n+1)}+\ldots]. \quad (91)$$

Разсмотримъ теперь уравненіе:

$$(x^2+3y^2)+(z^2+3t^2)=6p+1. \tag{92}$$

Положимъ, что $6p+1=3p_1+p_2$; положимъ, что $3p_1$ изображается нами всевозможными способами черезъ форму x^2+3y^2, а p_2—формою z^2+3t^2. Если p_1 нечетно, а слѣдовательно p_2 дѣлится на 4, то коэффиціентъ при q^{3p_1} въ первомъ изъ производителей выраженія (91) равняется числу рѣшеній уравненія $x^2+3y^2=3p_1$, коэффиціентъ же при q^{p_2} во второмъ изъ производителей (91) равенъ $\frac{1}{6}$ числа рѣшеній $z^2+3t^2=p_2$. Если p_1 дѣлится на 4, а слѣдовательно p_2 нечетно, то коэффиціентъ при q^{3p_1} будетъ равенъ $\frac{1}{3}$ числа рѣшеній $x^2+3y^2=3p_1$, а при q^{p_2} равенъ $\frac{1}{2}$ числа рѣшеній $z^2+3t^2=p_2$. Отсюда ясно, что коэффиціентъ при q^{6p+1} въ произведеніи (91) равенъ $\frac{1}{12}$ числа рѣшеній уравненія (92).

По теоремѣ страницы 121, число рѣшеній уравненія (92) равно $4\Phi(6p+1)$; слѣдовательно коэффиціентъ при q^{6p+1} въ произведеніи (91) есть $\frac{1}{3}\Phi(6p+1)$.

Положимъ теперь $12p+10=3p_1+p_2$. Чтобы $3p_1$ и p_2 могли оба выражаться черезъ форму x^2+3y^2, они оба должны быть нечетны. Поэтому коэффиціентъ при q^{3p_1} въ первомъ изъ производителей (91) равенъ числу рѣшеній уравненія $x^2+3y^2=3p_1$, а коэффиціентъ при q^{p_2} во второмъ изъ производителей (91) равенъ половинѣ числа рѣшеній $z^2+3t^2=p_2$. Итакъ коэффиціентъ при q^{12p+10} равенъ четверти числа рѣшеній уравненія

$$x^2+3y^2+z^2+3t^2=12p+10,$$

т.-е., по теоремѣ страницы 121, равенъ

$$\Phi(6p+5)=\frac{1}{3}\Phi(12p+10).$$

Пусть $3n+1=4^\alpha(6p+1)$ или $4^\alpha(12p+10)$, гдѣ $\alpha>0$; пусть $3n+1=3p_1+p_2$, и пусть опять $3p_1$ выражается формою x^2+3y^2, а p_2 формою z^2+3t^2. Рѣшенія уравненія

$$(x^2+3y^2)+(z^2+3t^2)=3n+1 \tag{93}$$

раздѣлимъ на группы. Къ первой группѣ пусть принадлежатъ всѣ рѣшенія, для которыхъ и x^2+3y^2, и z^2+3t^2 равны нечетнымъ числамъ; назовемъ число такихъ рѣшеній черезъ $\mu(\alpha)$. Ко второй группѣ причислимъ всѣ рѣшенія, для которыхъ наибольшая степень двухъ, дѣлящая и x^2+3y^2, и z^2+3t^2, есть 4; пусть число такихъ рѣшеній будетъ $9\mu(\alpha-1)$. Къ третьей группѣ причислимъ всѣ рѣшенія, для которыхъ наибольшая степень двухъ, дѣлящая какъ x^2+3y^2, такъ и z^2+3t^2, есть 16; пусть число такихъ рѣшеній будетъ $9\mu(\alpha-2)$. И такъ далѣе. Замѣтимъ теперь, что при $\alpha>\gamma>0$ $\mu(\gamma)$ есть число такихъ рѣшеній уравненія $x^2+3y^2+z^2+3t^2=4^\gamma(6p+1)$ или $4^\gamma(12p+10)$, для которыхъ и x^2+3y^2, и z^2+3t^2 нечетны. Что касается до $\mu(0)$, то въ случаѣ уравненія $x^2+3y^2+z^2+3t^2=4^\alpha(6p+1)$ число рѣшеній уравненія $x^2+3y^2+z^2+3t^2=6p+1$ есть $3\mu(0)$, въ случаѣ же $x^2+3y^2+z^2+3t^2=4^\alpha(12p+10)$ число рѣшеній уравненія $x^2+3y^2+z^2+3t^2=12p+10$ есть $\mu(0)$; поэтому въ первомъ случаѣ $3\mu(0)=4\Phi(6p+1)$, а во второмъ $3\mu(0)=4\Phi(12p+10)$. Вспомнивъ теперь, что коэффиціентъ при $q^{4^\alpha n}$ въ каждомъ изъ производителей (91) равенъ коэффиціенту при q^n, видимъ, что коэффиціентъ при q^{3n+1} въ произведеніи (91) всегда выразится формулою:

$$\frac{1}{4}\Big\{\mu(\alpha)+\mu(\alpha-1)+\mu(\alpha-2)+\mu(\alpha-3)+\ldots+\mu(2)+\mu(1)+\mu(0)\Big\}. \tag{94}$$

Допустимъ теперь, что доказана слѣдующая теорема: для всѣхъ α, меньшихъ извѣстнаго положительнаго цѣлаго числа, выраженіе (94) равно $\frac{1}{3}\Phi(3n+1)$. Тогда

$$\mu(\alpha)+\mu(\alpha-1)+\ldots+\mu(0)=\frac{4}{3}\Phi(3n+1)=\frac{4}{3}(2^{\gamma+1}-1)\Phi(2s+1),$$

предполагая $3n+1=2^{\gamma}(2s+1)$. Но число всѣхъ рѣшеній уравненія $x^2+3y^2+z^2+3t^2=2^{\gamma+2}(2s+1)$ равно $4(2^{\gamma+3}-3)\Phi(2s+1)$; слѣдовательно

$$\frac{1}{4}\mu(\alpha+1)=(2^{\gamma+3}-3)\Phi(2s+1)-\frac{9}{4}[\mu(\alpha)+\mu(\alpha-1)+\ldots+\mu(1)+\mu(0)];$$

$$\frac{1}{4}\{\mu(\alpha+1)+\mu(\alpha)+\mu(\alpha-1)+\ldots+\mu(1)+\mu(0)\}=(2^{\gamma+3}-3)\Phi(2s+1)$$

$$-2\{\mu(\alpha)+\mu(\alpha-1)+\ldots+\mu(1)+\mu(0)\}=\left[2^{\gamma+3}-3-\frac{2^{\gamma+3}}{3}+\frac{8}{3}\right]\Phi(2s+1)$$

$$=\frac{1}{3}[2^{\gamma+3}-1]\Phi(2s+1)=\frac{1}{3}\Phi(12n+4).$$

Допущенная теорема вѣрна для $\alpha=0$; легко ее также доказать и для $\alpha=1$; слѣдовательно теорема вѣрна и для всякаго α. Итакъ во всякомъ случаѣ коэффиціентъ при q^{3n+1} въ произведеніи (91) равенъ $\frac{1}{3}\Phi(3n+1)$.

Сопоставляя все вышесказанное, видимъ, что изъ равенства (90) слѣдуетъ ариѳметическая теорема:

$$\left.\begin{aligned}&2\Sigma M(12n+4-9h^2)=\Phi(3n+1),\\&h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots,\ 9h^2<12n+4.\end{aligned}\right\}\qquad(95)$$

Изъ равенствъ (85) и (95) слѣдуетъ немедленно другая формула Гирстера:

$$\left.\begin{aligned}&4\Sigma M(12n+4-h_1^{\,2})=\Phi(3n+1)+2\Psi(3n+1),\\&h_1=1,\ 2,\ 4,\ 5\ldots3p\pm1,\ldots,\ h_1^{\,2}\leq12n+4.\end{aligned}\right\}\qquad(96)$$

Помножимъ обѣ части равенства (83) на

$$\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q^3})}{dx}-\frac{1}{3}\frac{dlg\vartheta_1(3x,\sqrt{q^9})}{dx}=cotgx-cotg3x$$

$$+4\sum\frac{q^{9n+3}}{1-q^{9n+3}}sin(6n+2)x+4\sum\frac{q^{9n+6}}{1-q^{9n+6}}sin(6n+4)x.\qquad(97)$$

Такъ какъ

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi sin6nx\ cotg3x\ dx=1,\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sin(6n\pm2)x\ cotg3x\ dx=0,$$

то во второй части равенства (84) останутся только тѣ члены, въ которыхъ $n\equiv\pm1$ (mod 3), а $b\equiv0$ (mod 3).

Отберемъ теперь въ результатѣ, полученномъ послѣ интегрированія произведенія (83) и (97), всѣ члены, въ которыхъ показатели q сравнимы съ 2 по модулю 3:

$$4\Sigma q^{(3h\pm1)^2}\{\Sigma\Sigma q^{(3n\pm1)^2-9a^2}+2\Sigma\Sigma\Sigma q^{(3n\pm1)(3n\pm1+3b)-9a^2}\}$$

$$+8\Sigma q^{\frac{1}{4}(6h\pm1)^2}\{\Sigma\Sigma q^{(3n\pm1)^2-9(a-\frac{1}{2})^2}+2\Sigma\Sigma\Sigma q^{(3n\pm1)(3n\pm1+3b)-9(a-\frac{1}{2})^2}\}.(98)$$

Въ послѣдней формулѣ $3h\pm1$, $6h\pm1$ и $3n\pm1$ полагаются положительными, суммированіе же относительно b и a производится въ тѣхъ же предѣлахъ, какъ и въ формулѣ (84).

Мы уже замѣтили на страницѣ 187, что формула $4n^2+12nb-9\zeta^2$, въ которой n не дѣлится на три, при измѣненіи n, b и ζ даетъ всевозможные минусъ-опредѣлители, сравнимые съ 1 по модулю 3. Отсюда ясно, что формулу (98) можно написать въ такомъ видѣ:

$$8\Sigma q^{(3h\pm1)^2}.\ \Sigma M(12n+4)q^{3n+1}+8\Sigma q^{\frac{1}{4}(6h\pm1)^2}.\ \Sigma M(12n+7)q^{3n+\frac{7}{4}}.(98')$$

Отберемъ же теперь всѣ члены, у которыхъ показатели q сравнимы съ 2 по модулю 3, въ интегралѣ

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \vartheta_3(x)\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx}\left\{\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q^3})}{dx}-\frac{1}{3}\frac{dlg\vartheta_1(3x,\sqrt{q^9})}{dx}\right\}dx;\quad(99)$$

для этого должно вычислить два произведенія: одно, которое передъ интегрированіемъ умножается на $\vartheta_3(3x,q^9)$, и другое, которое передъ интегрированіемъ умножается на $\vartheta_3(x,q)-\vartheta_3(3x,q^9)$. Первое произведеніе получается отъ умноженія выраженія (97) на

$$4\sum\frac{q^{6n+2}}{1-q^{9n+3}}sin(6n+2)x+4\sum\frac{q^{3n+2}}{1-q^{9n+6}}sin(6n+4)x;$$

второе произведеніе получается отъ умноженія выраженія (97) на

$$4\sum\frac{q^{3n+1}}{1-q^{9n+3}}sin(6n+2)x+4\sum\frac{q^{6n+4}}{1-q^{9n+6}}sin(6n+4)x.$$

Рядъ вычисленій, совершенно подобныхъ употребленнымъ при выводѣ формулы (90), даетъ намъ, какъ постоянный членъ перваго произведенія,

$$4\sum\frac{(2p+1)q^{6p+2}}{1-q^{9p+3}}+4\sum\frac{(2p+1)q^{3p+2}}{1-q^{9p+6}};$$

коэффиціентъ же при $cos6nx$ въ первомъ произведеніи будетъ нуль.

Во второмъ произведеніи коэффиціентъ при $cos(6n+2)x$ будетъ

$$\frac{8q^{9n+3}}{1-q^{9n+3}}\sum_{p,\ b=0}^{p,\ b=\infty}\sum\left\{q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\right\},$$

а при $cos(6n+4)x$

$$\frac{8q^{9n+6}}{1-q^{9n+6}}\sum_{p,\ b=0}^{p,\ b=\infty}\sum\left\{q^{(3p+2)(3b+2)}-q^{(3p+1)(3b+1)}\right\}.$$

Надо замѣтить, что при r положительномъ

$$sin2rx\,cotg3x=cos2rx+2cos2(r-3)x+2cos2(r-6)x+\ldots+\mu,$$

гдѣ $\mu=1$ при $r\equiv0\ (mod\ 3)$, $\mu=-sinx:sin3x$ при $r\equiv1\ (mod\ 3)$ и $\mu=sinx:sin3x$ при $r\equiv2\ (mod\ 3)$.

Замѣтимъ кстати, что интегралъ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{cos2rx\,sinx}{sin3x}dx$$

равенъ 1 при $r \equiv 1$ $(mod\ 3)$, -1 при $r \equiv 2$ $(mod\ 3)$ и нулю при r кратномъ трехъ.

Коэффиціентъ при $sinx : sin3x$ во второмъ произведеніи будетъ

$$4\sum\frac{q^{3n+1}}{1-q^{9n+3}}-4\sum\frac{q^{6n+4}}{1-q^{9n+6}}=4\sum_0^\infty\sum_0^\infty\left\{q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\right\}.$$

Вслѣдствіе всего вышесказаннаго интегралъ (99) дастъ

$$4\sum\frac{(2p+1)q^{6p+2}}{1-q^{9p+3}}+4\sum\frac{(2p+1)q^{3p+2}}{1-q^{9p+6}}$$

$$+\left\{4\Sigma q^{(3n+1)^2}-4\Sigma q^{(3n+2)^2}+8\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\left[q^{(3n+1)(3n+1+3b)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-q^{(3n+2)(3n+2+3b)}\right]\right\}\sum\sum\left(q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\right). \quad (100)$$

Формулу (100) можно представить въ иномъ видѣ, если прибавить къ ней

$$-\frac{4}{3}\Sigma\Sigma q^{(3p+1)(3b+2)}+\frac{4}{3}\Sigma\Sigma q^{(3p+2)(3b+1)};$$

вотъ этотъ видъ:

$$\frac{8}{3}\sum\frac{(3p+1)q^{6p+2}}{1-q^{9p+3}}+\frac{8}{3}\sum\frac{(3p+2)q^{3p+2}}{1-q^{9p+6}}$$

$$+4\left\{\Sigma\Sigma\left(q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\right)\right\}^2. \quad (100')$$

Первыя двѣ суммы выраженія (100′), очевидно, можно представить такъ:

$$\frac{8}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(3n+2)q^{3n+2}.$$

Число $3p+2$ не представляется формою x^2+3y^2; поэтому если имѣемъ уравненіе $x^2+3y^2+z^2+3t^2=3n+2$, то $x^2+3y^2=3n_1+1$

и $z^2+3t^2=3n_2+1$. Если $3n_1+1$ и $3n_2+1$ нечетны, то коэффиціенты при q^{3n_1+1} и q^{3n_2+1} въ суммѣ

$$2\Sigma\Sigma(q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)})$$

равны числамъ рѣшеній уравненій $x^2+3y^2=3n_1+1$ и $z^2+3t^2=3n_2+1$; если $3n_1+1$ и $3n_2+1$ четно-нечетны или вида $2^{2\alpha+1}(2p+1)$, то тѣ же коэффиціенты равны нулю; если $3n_1+1$ и $3n_2+1$ вида $4^{\alpha}(2s+1)$, то тѣ же коэффиціенты будутъ равны $\frac{1}{3}$ чиселъ рѣшеній уравненій $x^2+3y^2=3n_1+1$ и $z^2+3t^2=3n_2+1$. Поэтому къ выраженію

$$4\{\Sigma\Sigma(q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)})\}^2$$

можно примѣнить тѣ же разсужденія, какъ къ подобному же выраженію равенства (90), съ тою разницею, что тамъ мы результаты между прочимъ уменьшали въ два раза вслѣдствіе того, что суммы разнились между собою; такого уменьшенія здѣсь уже не будетъ. Такимъ образомъ послѣднее выраженіе равно

$$\frac{4}{3}\Sigma\Phi(3n+2)q^{3n+2}.$$

Такъ какъ выраженія (98′) и (100′) равны между собою, то получаемъ

$$8\Sigma q^{(3h\pm1)^2}.\Sigma M(12n+4)q^{3n+1}+8\Sigma q^{\frac{1}{4}(6h\pm1)^2}.\Sigma M(12n+7)q^{3n+\frac{7}{4}}$$
$$=4\Sigma\Phi(3n+2)q^{3n+2}.$$

Вслѣдствіе этого имѣемъ формулы:

$$2\Sigma M(12n+8-l^2)=\Phi(3n+2), \tag{101}$$

$$l=1,\ 2,\ 4,\ 5\ \ldots\ 3h\pm1,\ \ldots,\ l^2<12n+8;$$

$$\Sigma M(12n+8-9h^2)=\Psi(3n+2), \tag{102}$$

$$h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots,\ 9h^2<12n+8.$$

Послѣдняя формула получается при вычитаніи почленно равенства (101) изъ равенства (85), когда въ послѣднемъ n замѣнимъ черезъ $3n+2$.

Помножимъ равенство (83) почленно на равенство

$$\frac{1}{3}\frac{dlg\vartheta_1(3x, \sqrt{q^9})}{dx} = cotg3x + 4\sum\frac{q^{9n}}{1-q^{9n}}sin6nx; \qquad (103)$$

по умноженіи возьмемъ междупредѣльный интегралъ; тогда получимъ равенство, первую часть котораго представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left\{\frac{1}{3}\vartheta_3(x)\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{dx}\cdot\frac{dlg\vartheta_1(3x,\sqrt{q^9})}{dx} - \vartheta_3(0)cotgx\; cotg3x\right\}dx. \; (104)$$

Отберемъ въ обѣихъ частяхъ полученнаго равенства всѣ члены, у которыхъ показатели q сравнимы съ 1 по модулю 3; тогда вторая часть нашего равенства дастъ выраженіе:

$$2[\vartheta_3(0)-\vartheta_3(0, q^9)]\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=-n+1}^{n-1}q^{9(n^2-a^2)} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{a=-n+1}^{n}q^{9(n^2+nb-a^2)}\right\}$$

$$+4[\vartheta_2(0)-\vartheta_2(0, q^9)]\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{n}q^{9[n^2-(a-\frac{1}{2})^2]}\right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{n}q^{9\{n^2+nb-(a-\frac{1}{2})^2\}}\right\}$$

$$= 24\Sigma q^{(3h\pm1)^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}M(4n)q^{9n} + 24\,\Sigma q^{\frac{1}{4}(6h\pm1)^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}M(4n-1)q^{9n-\frac{9}{4}}; \; (105)$$

двѣ суммы, въ которыхъ предѣлы суммованія не обозначены, должны распространяться на всѣ положительныя числа означенныхъ въ нихъ видовъ.

Если же отбирать члены съ показателями, сравнимыми съ 1, въ интегралѣ (104), то совокупность этихъ членовъ можетъ быть представлена интеграломъ

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left\{\frac{2}{3}\Sigma q^{(3h\pm1)^2}cos(6h\pm2)x\,.\,\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q^3})}{dx}\,.\,\frac{dlg\vartheta_1(3x,\sqrt{q^3})}{dx}\right.$$

$$\left.-2cotgx\;cotg3x\Sigma q^{(3h\pm1)^2}\right\}dx\,. \qquad (106)$$

Мы не станемъ здѣсь производить вычисленіе интеграла (106); замѣтимъ только, что рядъ для функціи

$$\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q^3})}{dx}\,.\,\frac{dlg\vartheta_1(3x,\sqrt{q^3})}{dx}=\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q^3})}{dx}\left\{\frac{dlg\vartheta_1(x,\sqrt{q^3})}{dx}\right.$$

$$\left.+\frac{dlg\vartheta_1\left(x+\frac{\pi}{3},\sqrt{q^3}\right)}{dx}+\frac{dlg\vartheta_1\left(x-\frac{\pi}{3},\sqrt{q^3}\right)}{dx}\right\} \qquad (107)$$

удобнѣе вычислить способомъ, изложеннымъ Бріо и Буке въ ихъ трактатѣ, въ третьей главѣ шестой книги. Вычисливъ рядъ для выраженія (107) и взявъ междупредѣльный интегралъ, найдемъ, что интегралъ (106) можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$2\Sigma q^{(3h\pm1)^2}+\frac{8}{3}\Sigma\Psi(3n+1)q^{3n+1}-\frac{4}{3}\Sigma\{\Phi(3n+1)-\Psi(3n+1)\}q^{3n+1}$$

$$-\frac{2}{3}\{1+6\Sigma\Sigma(q^{3b(3p+1)}-q^{3b(3p+2)})\}\Sigma\Sigma\{q^{(3p+1)(3b+1)}-q^{(3p+2)(3b+2)}\}$$

$$=2\Sigma q^{(3h\pm1)^2}+4\Sigma\Psi(3n+1)q^{3n+1}-2\Sigma\Phi(3n+1)q^{3n+1}. \qquad (108)$$

Выраженія (105) и (108) равны между собою; приравняемъ же коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ q въ этихъ выраженіяхъ. Называя черезъ p всякое положительное число, а также нуль, получаемъ

$$24\left[\Sigma M(4p)+\Sigma M(4p+3)\right]=4\Psi(3n+1)-2\Phi(3n+1), \qquad (109)$$

полагая $M(0)=-\frac{1}{12}$. Въ обѣихъ суммахъ равенства (109) p должно удовлетворять неравенству $9p<3n+1$. Въ первой суммѣ p связано съ n слѣдующимъ равенствомъ:

$$9p+(3h\pm 1)^2=3n+1;$$

во второй же суммѣ p связано съ n равенствомъ:

$$9\left(p+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}(6h\pm 1)^2=3n+1.$$

Два послѣднія равенства могутъ быть написаны такъ:

$$4p=\frac{12n+4-(6h\pm 2)^2}{9},\ 4p+3=\frac{12n+4-(6h\pm 1)^2}{9}.$$

Поэтому равенство (109) можно замѣнить равенствомъ:

$$12\sum M\left(\frac{12n+4-h^2}{9}\right)=2\Psi(3n+1)-\Phi(3n+1), \qquad (110)$$

гдѣ h всякое положительное число, удовлетворяющее условіямъ: $h^2\leqq 12n+4$, $h^2\equiv 12n+4\ (mod\ 9)$.

Формулы (110), (95), (96), (101) и (102) даны Гирстеромъ въ 1-й тетради 21 тома Математическихъ Анналъ, издаваемыхъ нынѣ Клейномъ и Майеромъ, на 49 страницѣ. Другихъ формулъ третьей ступени Гирстеръ не даетъ.

§ 41. Мы видѣли, что формулы Кронекера тѣсно связаны съ задачею о числѣ разложеній даннаго числа на 3 квадрата; мы даже выводили нѣкоторыя формулы съ помощью равенствъ, рѣшающихъ эту задачу. Предъидущія формулы даютъ рѣшеніе не только задачи о трехъ квадратахъ, но рѣшаютъ вопросъ о числѣ рѣшеній уравненія

$$x^2+2^m y^2+2^n z^2=p$$

при малыхъ значеніяхъ m и n. Въ предъидущемъ равенствѣ p число положительное, а m и n положительныя числа или нули.

Для рѣшенія такого рода вопросовъ мы имѣемъ уже четыре равенства:

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=1+6\Sigma(-1)^n q^{n^2}+8\Sigma q^{3n^2}+12\Sigma\{2F(n)-G(n)\}q^n, \tag{111}$$

$$\frac{2Kk}{\pi}\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}=8\Sigma F(8n+3)q^{2n+\frac{3}{4}}, \tag{112}$$

$$\frac{2Kk}{\pi}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=4\Sigma F(4n+2)q^{n+\frac{1}{2}}, \tag{113}$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}+1\right)\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}=4\Sigma F(4n+1)q^{n+\frac{1}{4}}. \tag{114}$$

Кромѣ этого имѣемъ извѣстную формулу:

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2Kkk'}{\pi}}=2\Sigma(-1)^{r-1}(2r-1)q^{(r-\frac{1}{2})^2}. \tag{115}$$

Съ помощью формулъ (57)—(63) можно (111) написать такъ:

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=1-6\Sigma q^{n^2}+8\Sigma F(8n+3)\{q^{8n+3}+q^{4(8n+3)}+q^{16(8n+3)}+\dots\}$$

$$+12\Sigma F(4n+1)\{q^{4n+1}+q^{4(4n+1)}+q^{16(4n+1)}+\dots\}$$

$$+12\Sigma F(4n+2)\{q^{4n+2}+q^{4(4n+2)}+q^{16(4n+2)}+\dots\}. \tag{116}$$

Такъ какъ три нечетные квадрата въ суммѣ даютъ $8n+3$, два нечетные и одинъ четный $4n+2$, одинъ нечетный и два четные $4n+1$, то изъ (116) легко вывести

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}=1-2\Sigma q^{(2n-1)^2}-6\Sigma q^{4n^2}$$

$$+8\Sigma F(8n+3)\{-q^{8n+3}+q^{4(8n+3)}+q^{16(8n+3)}+\dots\}$$

$$+4\Sigma F(4n+1)\{q^{4n+1}+3q^{4(4n+1)}+3q^{16(4n+1)}+\dots\}$$

$$+4\Sigma F(4n+2)\{-q^{4n+2}+3q^{4(4n+2)}+3q^{16(4n+2)}+\dots\}. \tag{117}$$

Замѣна q черезъ $-q$ измѣняетъ

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}, \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} \text{ въ } \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}, \sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \sqrt{\frac{2Kki}{\pi}};$$

а потому изъ предъидущихъ формулъ выводимъ

$$\frac{2Kk'}{\pi}\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = 1 - 6\Sigma(-1)^n q^{n^2}$$

$$+ 8\Sigma F(8n+3)\{-q^{8n+3} + q^{4(8n+3)} + q^{16(8n+3)} + \ldots\}$$

$$+ 12\Sigma F(4n+1)\{-q^{4n+1} + q^{4(4n+1)} + q^{16(4n+1)} + \ldots\}$$

$$+ 12\Sigma F(4n+2)\{q^{4n+2} + q^{4(4n+2)} + q^{16(4n+2)} + \ldots\}, \quad (118)$$

$$\frac{2Kk'}{\pi}\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2\Sigma q^{(2n-1)^2} - 6\Sigma q^{4n^2}$$

$$+ 8\Sigma F(8n+3)\{q^{8n+3} + q^{4(8n+3)} + q^{16(8n+3)} + \ldots\}$$

$$+ 4\Sigma F(4n+1)\{-q^{4n+1} + 3q^{4(4n+1)} + 3q^{16(4n+1)} + \ldots\}$$

$$+ 4\Sigma F(4n+2)\{-q^{4n+2} + 3q^{4(4n+2)} + 3q^{16(4n+2)} + \ldots\}, \quad (119)$$

$$\frac{2Kk}{\pi}\sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = 4\Sigma(-1)^n F(4n+2) q^{n+\frac{1}{2}}, \quad (120)$$

$$\left(\frac{2Kk'}{\pi} + 1\right)\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} = 4\Sigma(-1)^n F(4n+1) q^{n+\frac{1}{4}}. \quad (121)$$

Всѣ эти формулы даютъ возможность опредѣлить число рѣшеній уравненій:

$$x^2+y^2+2z^2=n,\quad x^2+2y^2+2z^2=n,\quad x^2+y^2+4z^2=n,$$

$$x^2+y^2+8z^2=n,\quad x^2+y^2+16z^2=n,\quad x^2+4y^2+4z^2=n,$$

$$x^2+8y^2+8z^2=n,\quad x^2+16y^2+16z^2=n,\quad x^2+4y^2+16z^2=n$$

и нѣкоторыхъ другихъ.

Для опредѣленія числа рѣшеній какъ для приведенныхъ примѣровъ, такъ и для другихъ, которые не рѣшаются съ помощью

равенствъ (111)—(121), а требуютъ вывода другихъ рядовъ, формулы Ландена укажутъ на тѣ ряды, которые могутъ рѣшить задачу; впрочемъ иногда будетъ выгоднѣе прибѣгать къ нѣкоторымъ элементарнымъ соображеніямъ прежде, чѣмъ примѣнять формулы Ландена. Такъ, задача о числѣ рѣшеній уравненія $x^2+y^2+2z^2=n$ зависитъ или отъ опредѣленія ряда для $\vartheta_3{}^3(0,q)(1+k)$, или отъ ряда для $\frac{1}{4}\vartheta_3{}^3(0)(1+k')(1+\sqrt{k'})$; уравненіе $x^2+2y^2+2z^2=n$ связано съ выраженіемъ $\frac{1}{2}\vartheta_3{}^3(0)(1+k')$, $x^2+4y^2+16z^2=n$ съ $\frac{1}{2}\vartheta_3{}^3(0)(1+\sqrt{k}+\sqrt{k'}+\sqrt{kk'})$, $x^2+y^2+4z^2=n$ съ $\vartheta_3{}^3(0)(1+\sqrt{k'})$, $x^2+y^2+8z^2=n$ съ $\vartheta_3{}^3(0)(1+k)(1+\sqrt{k'})$, $x^2+y^2+16z^2=n$ съ $\vartheta_3{}^3(0)(1+\sqrt{k})^2(1+\sqrt{k'})$ и такъ далѣе.

Не станемъ выводить на самомъ дѣлѣ теоремы о числѣ рѣшеній вышеупомянутыхъ уравненій, такъ какъ способъ вывода достаточно выясненъ въ 1-ой главѣ. Замѣтимъ только, что предъидущихъ формулъ достаточно иногда бываетъ для опредѣленія числа рѣшеній уравненія $ax^2+by^2+cz^2=n$ и въ томъ случаѣ, если a, b и c не степени двухъ. Такъ, на страницѣ 359 тома 14 своего журнала Ліувилль объявляетъ, что число всѣхъ рѣшеній уравненія $x^2+2y^2+3z^2=6\mu\pm1=m$ есть $F(6m)$, при чемъ x, y и z могутъ быть положительными, отрицательными, нулями. Дѣйствительно, каждому рѣшенію уравненія $x^2+2y^2+3z^2=6\mu\pm1$ соотвѣтствуютъ четыре рѣшенія уравненія $x_1{}^2+y_1{}^2+4z_1{}^2=6(6\mu\pm1)$, которыя опредѣляются изъ равенствъ:

$$\pm x_1=x\pm2y\pm3z,\ \pm y_1=x\pm2y\mp3z,\ \pm z_1=x\mp y;$$

въ этомъ легко убѣдиться. Наоборотъ, изъ каждаго рѣшенія уравненія $x_1{}^2+y_1{}^2+4z_1{}^2=6(6\mu\pm1)$ можно вывести съ помощью тѣхъ же равенствъ только одно рѣшеніе уравненія $x^2+2y^2+3z^2=6\mu\pm1$, если разсматривать только положительныя и нулевыя рѣшенія. Отсюда заключаемъ, что уравненіе $x^2+2y^2+3z^2=6\mu\pm1$ имѣетъ въ четыре раза менѣе рѣшеній, чѣмъ $x_1{}^2+y_1{}^2+4z_1{}^2=6(6\mu\pm1)$; по формулѣ же (113) число всѣхъ рѣшеній послѣдняго уравненія равно $4F(6m)$.

Формулы (111)—(121) [1]) можно выводить всѣ непосредственно способомъ Эрмита, какъ мы это и сдѣлали для (111). Этотъ непосредственный выводъ всего легче производить по нижеизложенному способу, употребленному Эрмитомъ для вывода (111), (112), (113), (114) и (117) формулъ. Способъ состоитъ въ томъ, что выбираются двѣ эллиптическія функціи, дающія въ произведеніи единицу, напримѣръ $sin\ am\frac{2Kx}{\pi}$ и $1 : sin\ am\frac{2Kx}{\pi}$. Одну изъ этихъ функцій умножаютъ на Якобіеву функцію. Далѣе опредѣляютъ коэффиціентъ въ тригонометрическомъ разложеніи, полученномъ отъ перемноженія рядовъ; одинъ рядъ изображаетъ одну изъ выбранныхъ эллиптическихъ функцій, другой—произведеніе Якобіевой функціи на другую эллиптическую функцію. Этимъ задача и рѣшена, ибо нахожденіе коэффиціента дѣлается способомъ Фурье; слѣдовательно, съ одной стороны, получается рядъ, въ которомъ показатели при q пропорціональны формулѣ $ac—b^2$; съ другой стороны, двѣ обратныя эллиптическія функціи сокращаются, и мы получаемъ коэффиціентъ тригонометрическаго разложенія Якобіевой функціи, умноженный на частныя значенія трехъ Якобіевыхъ функцій. Частныя значенія трехъ Якобіевыхъ функцій получаются потому, что эллиптическая функція при разложеніи въ тригонометрическій рядъ умножается на двѣ Якобіевы функціи съ аргументомъ нуль, если эллиптическая функція не имѣетъ многократныхъ безконечностей; произведеніе же эллиптической функціи на Якобіеву функцію умножается на частное значеніе одной Якобіевой функціи.

Какъ примѣръ, выведемъ такимъ образомъ формулу (113). Возьмемъ два ряда:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}k sin\ am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_2(x)=4\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}sin 2nx(q^{-\frac{1}{4}}+q^{-\frac{9}{4}}+\ldots+q^{-\frac{1}{4}(2n-1)^2}),$$

$$\frac{2K}{\pi}cos x : sin\ am\frac{2Kx}{\pi}=cotg x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\{sin\ 2nx+sin(2n-2)x\}.$$

[1]) За исключеніемъ, конечно, (115).

Перемножимъ эти равенства почленно и возьмемъ опредѣленный интегралъ:

$$\frac{2Kk}{\pi}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\int_0^\pi \vartheta_2(x)\cos x\,dx$$

$$=\frac{2Kk}{\pi}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}q^{\frac{1}{4}}=4\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\left(q^{-\frac{1}{4}}+\ldots+q^{-\frac{1}{4}(2n-1)^2}\right)$$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\left(\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}+\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)\left(q^{-\frac{1}{4}}+q^{-\frac{9}{4}}+\ldots+q^{-\frac{1}{4}(2n-1)^2}\right).$$

Раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на $q^{\frac{1}{4}}$, мы въ правой сторонѣ равенства получимъ члены вида $q^{\frac{1}{4}(ac-b^2)}$, гдѣ $ac-b^2$ четно, $a^2>4b^2$, $c>a$, a и c положительны. Рядъ очень знакомыхъ разсужденій приведетъ насъ къ формулѣ (113).

Умѣя выводить непосредственно формулы (111)—(121), мы въ нѣкоторомъ родѣ получаемъ орудіе для вывода различныхъ ариѳметическихъ свойствъ; эти свойства будутъ тѣмъ болѣе отличаться отъ извѣстныхъ уже свойствъ, чѣмъ болѣе мы будемъ видоизмѣнять первоначальный способъ, рекомендованный Эрмитомъ. Одно изъ такихъ видоизмѣненій мы употребили въ §§ 34, 35 и отчасти въ 40; въ этихъ параграфахъ модули q въ различныхъ функціяхъ, входящихъ подъ опредѣленный интегралъ, были различны; въ статьяхъ Эрмита всѣ составныя части интегрируемаго произведенія всегда имѣютъ одинъ и тотъ же модуль q.

Замѣтимъ еще, что формуламъ (111)—(121) можно придать иной видъ, если функціи $F(n)$ и $G(n)$ замѣнить тѣми ихъ величинами, которыя далъ Леженъ-Дирикле на страницѣ 272 своего учебника; въ такомъ случаѣ задача о числѣ рѣшеній даннаго уравненія получаетъ нѣсколько большую законченность, такъ какъ отвѣтъ не будетъ зависѣть отъ знанія числа формъ извѣстнаго характера и съ извѣстнымъ опредѣлителемъ.

§ 42. Закончимъ эту главу рѣшеніемъ задачи, предложенной Дирикле на страницѣ 407 тома III журнала Крелля: *пусть n первоначальное число вида* $4N+3$; *опредѣлить v изъ сравненія*

$$1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots \frac{n-1}{2} \equiv (-1)^v \quad (mod\ n).$$

Изъ теоремы Вильсона слѣдуетъ, что $1.\ 2.\ 3 \ldots (n-1)+1$ дѣлится на n, т.-е. $1.\ 2.\ 3 \ldots (n-1)+1 \equiv 0 \quad (mod\ n)$. Но $n-1$, $n-2$, $n-3 \ldots \frac{n+1}{2}$ можно замѣнить въ сравненіи величинами -1, -2, $-3 \ldots -\frac{n-1}{2}$. Если n вида $4N+3$, то такихъ замѣняемыхъ чиселъ нечетное число; слѣдовательно

$$\left(1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots \frac{n-1}{2}\right)^2 \equiv 1 \quad (mod\ n).$$

Спрашивается, въ какихъ случаяхъ $1.\ 2.\ 3 \ldots \frac{n-1}{2}$ сравнимо съ $+1$ и въ какихъ съ -1, иначе, въ какихъ случаяхъ разсматриваемое произведеніе квадратичный вычетъ и въ какихъ невычетъ по модулю n.

Пусть между числами $1,\ 2,\ 3 \ldots \frac{n-1}{2}$ вычетовъ A, а невычетовъ B; если B четно, то произведеніе вычетъ, иначе невычетъ. Итакъ $v=B$. Но Дирикле въ своемъ учебникѣ даетъ

$$F(n)=A-B=\frac{n-1}{2}-2v.$$

Итакъ

$$v=\frac{n-1}{4}-\frac{1}{2}F(n). \tag{122}$$

Сложимъ теперь равенства (52) и (53) и въ результатѣ сдѣлаемъ $n=m\equiv 3 \ (mod\ 4)$. Полагая n числомъ первоначальнымъ, имѣемъ $\Psi(n)=n-1$; а потому

$$v=\frac{1}{4}\Psi(n)-\frac{1}{2}F(n)=F(n-2^2)+F(n-4^2)+F(n-6^2)+\ldots.$$

Между формами съ опредѣлителемъ $-n+4\xi^2$ и съ однимъ нечетнымъ крайнимъ коэффиціентомъ нѣтъ формъ вида $2bx^2+2bxy+cy^2$; слѣдовательно всякой приведенной формѣ $ax^2+2bxy+cy^2$, въ которой $b>0$, соотвѣтствуетъ форма $ax^2-2bxy+cy^2$, ей неэквивалентная; а потому

$$v=P(n-2^2)+P(n-4^2)+P(n-6^2)+\ldots,$$

гдѣ $P(p)$ обозначаетъ число приведенныхъ формъ съ среднимъ коэффиціентомъ нулемъ и съ опредѣлителемъ $-p$. Но число такихъ формъ съ опредѣлителями 2^2-n, 4^2-n, $6^2-n\ldots$ равно числу разложеній $n-2^2$, $n-4^2$, $n-6^2\ldots$ на два множителя a и c, изъ которыхъ a менѣе c.

Пусть $n-4\xi^2=p^\alpha q^\beta s^\gamma\ldots$, гдѣ $p, q, s\ldots$ первоначальныя числа. Число дѣлителей $n-4\xi^2$ есть $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$; число дѣлителей, меньшихъ $\sqrt{n-4\xi^2}$, равно $\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$ Такъ какъ $n-4\xi^2\equiv 3 \pmod 4$, то $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ не могутъ быть четны всѣ безъ исключенія. Если число нечетныхъ чиселъ между $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ будетъ 2, 3, 4, 5, 6…, то $\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$ будетъ четно. Слѣдовательно должно обратить вниманіе только на такія $n-4\xi^2$, которыя равны r^2p^{2i+1}, гдѣ p первоначально, а r не дѣлится на p. Если i нечетно, то $\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$ четно; а потому надо обращать вниманіе только на тѣ случаи, когда i четно. Если $n-4\xi^2=r^2p^{4i+1}$, то $P(n-4\xi^2)$ нечетно. Отсюда теорема, данная Кронекеромъ въ 3 томѣ второй серіи журнала Ліувилля, страница 269: *v равно числу такихъ выраженій $n-2^2$, $n-4^2$, $n-6^2\ldots$, которыя вида r^2p^{4i+1}, гдѣ p число первоначальное, а r вообще составное, не дѣлящееся на p.*

Такимъ образомъ рѣшеніе задачи сводится къ разложенію на первоначальные множители нѣкоторыхъ чиселъ, меньшихъ n, и число которыхъ менѣе $\sqrt{n}$.

Изъ этого примѣра мы видимъ, что формулы Кронекера могутъ имѣть довольно разнообразное приложеніе.

ГЛАВА IV.

Числовыя теоремы Ліувилля, относящіяся до общихъ свойствъ аналитическихъ и всякихъ числовыхъ функцій.

§ 43. Тригонометрическимъ рядамъ, выражающимъ эллиптическія функціи, можно придать нѣсколько иной видъ, чѣмъ имъ придаютъ обыкновенно, если расположить эти ряды по степенямъ модуля q. Въ такомъ случаѣ коэффиціентъ при нѣкоторой степени q будетъ тригонометрическая функція, зависящая отъ различныхъ дѣлителей показателя степени q или нѣкотораго корня изъ q. Такимъ образомъ

$$\frac{2Kk}{\pi} \sin am \frac{2Kx}{\pi} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{q^{2n-1}}\sum_{2n-1=d\delta} \sin dx\right\}, \tag{1}$$

$$\frac{2Kk}{\pi} \cos am \frac{2Kx}{\pi} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{q^{2n-1}}\sum_{2n-1=d\delta}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \cos dx\right\}, \tag{2}$$

$$\frac{2K}{\pi}\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi} = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^n\sum_{n=d(2\delta-1)}(-1)^{\delta-1}\cos 2dx\right\}, \tag{3}$$

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\sin^2 am\frac{2Kx}{\pi} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^n\sum_{n=d(2\delta-1)} d(1-\cos 2dx)\right\}. \tag{4}$$

Въ двухъ первыхъ равенствахъ вторыя суммы распространяются на всѣ положительныя, цѣлыя рѣшенія уравненія $d\delta=2n-1$, въ которомъ $2n-1$ данное, а d и δ неизвѣстныя; въ двухъ послѣднихъ равенствахъ тѣ же суммы распространяются на всѣ цѣлыя, положительныя рѣшенія уравненія $d(2\delta-1)=n$, въ которомъ n данное, а d и δ искомыя.

Многія изъ эллиптическихъ функцій можно или непосредственно представить черезъ тригонометрическій рядъ, или разсматривать ихъ, какъ нѣкоторыя функціи другихъ эллиптическихъ функцій; такія функціи представляются двумя или болѣе способами черезъ тригонометрическіе ряды; вслѣдствіе этого мы можемъ получать равенства, состоящія исключительно изъ тригонометрическихъ рядовъ, съ которыми производятся различныя дѣйствія. Коэффиціенты при различныхъ степеняхъ q въ такихъ равенствахъ составляютъ равенства отдѣльно другъ отъ друга. Такимъ образомъ мы получаемъ теоремы, относящіяся до тригонометрическихъ функцій; въ эти теоремы входятъ суммы, распространенныя на всевозможныя цѣлыя, положительныя рѣшенія нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ уравненій (при способѣ писанія Ліувилля рѣшенія подвергаются нѣкоторымъ ограниченіямъ).

Большинство аналитическихъ функцій выражаются между нѣкоторыми предѣлами черезъ тригонометрическіе ряды. Подставляя въ тригонометрическое равенство, о которомъ только что говорили, вмѣсто перемѣннаго приличныя частныя значенія и суммируя, мы можемъ теорему, выведенную для тригонометрическихъ функцій, распространить на всѣ такія функціи, которыя при нѣкоторыхъ условіяхъ выражаются черезъ сходящіеся ряды той тригонометрической функціи, для которой теорема найдена.

Такъ какъ, однако, въ такихъ теоремахъ аргументы функцій всегда цѣлыя числа, а всякую аналитическую или прерывную функцію, имѣющую при цѣлыхъ значеніяхъ аргумента опредѣленныя, конечныя значенія, можно замѣнить другою аналитическою функціею, равною первой для разсматриваемыхъ значеній аргумента, то такія теоремы распространяются и на числовыя функціи извѣстнаго характера, и на такія аналитическія, которыя не изображаются въ требуемыхъ предѣлахъ тригонометрическими рядами. Единственныя условія примѣнимости теоремы къ данной аналити-

ческой или числовой функціи состоятъ въ томъ, чтобы во 1) функція при разсматриваемыхъ аргументахъ имѣла опредѣленныя, конечныя значенія и во 2) удовлетворяла нѣкоторымъ ограничивающимъ условіямъ, вытекающимъ изъ того обстоятельства, что теорема вѣрна не для всякихъ тригонометрическихъ функцій (напримѣръ, если теорема доказана только для косинусовъ, а не для синусовъ, то функція должна быть четна).

Замѣтимъ, что сказанное выше вѣрно и для нѣкоторыхъ другихъ неэллиптическихъ функцій, обыкновенно изучаемыхъ съ эллиптическими функціями; мы говоримъ о логариѳмахъ Якобіевыхъ функцій и ихъ производныхъ. Въ третьей главѣ уже было замѣчено о родственности рядовъ, которыми изображаются эти послѣднія функціи, тѣмъ рядамъ, которыми изображаются въ извѣстныхъ предѣлахъ эллиптическія функціи. Въ 4-мъ примѣрѣ этой главы мы именно употребимъ ряды, выражающіе $lg\ \vartheta_3(x)$ и $lg\ \vartheta(x)$; поэтому привожу здѣсь ряды для этихъ функцій въ томъ преобразованномъ видѣ, въ какомъ они намъ понадобятся.

$$lg\ \vartheta(x) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ q^n \sum_{n=d(2\delta-1)} \frac{1}{d} \cos 2dx \right\}; \tag{5}$$

$$lg\ \vartheta_3(x) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-q)^n \sum_{n=d(2\delta-1)} \frac{1}{d} \cos 2dx \right\}. \tag{6}$$

Въ послѣднихъ суммахъ равенствъ (5) и (6) суммированіе должно распространять на всѣ положительныя, цѣлыя рѣшенія уравненія $n=d(2\delta-1)$, въ которомъ n данное число, а d и δ неизвѣстныя.

Указавъ, какимъ образомъ можно выводить извѣстнаго рода теоремы изъ рядовъ, изображающихъ эллиптическія функціи, логариѳмы Якобіевыхъ функцій и производныя этихъ логариѳмовъ, пояснимъ сказанное четырьмя примѣрами.

§ 44. Примѣръ 1. Изъ равенства (1) легко выводимъ

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2} \sin^2 am \frac{2Kx}{\pi} = 8\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ q^n \sum \left[\cos(d'-d'')x - \cos(d'+d'')x \right] \right\}, \tag{7}$$

гдѣ послѣдняя сумма распространяется на всѣ нечетныя, положительныя рѣшенія уравненія съ четырьмя неизвѣстными (d', d'', δ' и δ'')

$$d'\delta' + d''\delta'' = 2n.$$

Изъ равенствъ (4) и (7), сравненіемъ коэффиціентовъ при нечетныхъ степеняхъ q, выводимъ

$$\Sigma\{cos(d'-d'')x - cos(d'+d'')x\} = \Sigma d(1 - cos\, 2dx). \quad (8)$$

Вторая сумма распространяется на всѣ положительныя, цѣлыя рѣшенія уравненія

$$d\delta = 2n - 1;$$

первая же сумма распространяется на всѣ положительныя, нечетныя рѣшенія уравненія

$$d'\delta' + d''\delta'' = 4n - 2.$$

Пусть $f(y)$ такая аналитическая четная функція, которая не обращается въ безконечность между предѣлами $-h$ и $+h$ и имѣетъ между этими предѣлами опредѣленныя значенія; тогда

$$f(y) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 cos\frac{y\pi}{h} + A_2 cos\frac{2y\pi}{h} + \ldots + A_m cos\frac{my\pi}{h} + \ldots, \quad (9)$$

$$A_m = \frac{1}{h}\int_{-h}^{+h} f(y)\, cos\frac{m\pi y}{h}\, dy.$$

Въ равенствѣ (9) дѣлаемъ постепенно y равнымъ 0, $2d$, $d'-d''$ и $d'+d''$, а въ равенствѣ (8)

$$x = \frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}, \frac{3\pi}{h}, \frac{4\pi}{h}, \ldots \frac{m\pi}{h}, \ldots$$

Обѣ части равенства, полученнаго отъ подстановки $\frac{\pi}{h}$, умножимъ на A_1; обѣ части равенства, полученнаго отъ подстановки $\frac{2\pi}{h}$,

умножимъ на A_2; вообще обѣ части равенства, полученнаго отъ подстановки $\frac{m\pi}{h}$, умножимъ на A_m. Если равенства, такимъ образомъ полученныя, сложимъ и примемъ въ разсчетъ равенство (9), то, очевидно, получимъ

$$\Sigma\{f(d'-d'')-f(d'+d'')\}=\Sigma d\{f(0)-f(2d)\}. \quad (10)$$

Равенство (10) вѣрно до тѣхъ поръ, пока аргументы $d'-d''$, $d'+d''$ и $2d$ имѣютъ абсолютныя величины, не превышающія h.

Положимъ теперь, что $f(y)$ есть такая четная, аналитическая или числовая функція, которая равна опредѣленной, конечной величинѣ для всякаго аргумента, равнаго одному изъ выраженій $d'-d''$, $d'+d''$ и $2d$, входящему въ равенство (10), а также для аргумента нуль. Въ такомъ случаѣ всегда можно найти такую аналитическую функцію $f_1(y)$, которая бы равнялась $f(y)$ для всякаго аргумента, входящаго въ равенство (10), и которая изображалась бы рядомъ по косинусамъ въ предѣлахъ между $-h$ и $+h$; h же можно выбрать такъ, чтобы оно было больше каждаго изъ аргументовъ, входящихъ въ (10). Тогда равенство (10) вѣрно для $f_1(y)$, а слѣдовательно вѣрно и для $f(y)$.

Теорема 1. *Если d, δ, d', δ', d'' и δ'' нечетныя, положительныя числа, удовлетворяющія равенствамъ*

$$d\delta=2n-1, \quad d'\delta'+d''\delta''=4n-2,$$

и если $f(x)$ такая четная, аналитическая или числовая функція, которая имѣетъ опредѣленныя и конечныя значенія для цѣлыхъ значеній x, входящихъ въ то равенство, о которомъ сейчасъ будетъ сказано, то эта функція удовлетворяетъ равенству

$$\Sigma\{f(d'-d'')-f(d'+d'')\}=\Sigma d\{f(0)-f(2d)\}. \quad (10)$$

Изъ тѣхъ же (4) и (7) равенствъ выводимъ, приравнивая коэффиціенты при четныхъ степеняхъ q,

$$2^{\alpha-1}\Sigma d\{f(0)-f(2^\alpha d)\}=\Sigma\{f(d'-d'')-f(d'+d'')\}, \quad (11)$$

гдѣ d, d', d'', δ, δ' и δ'' нечетныя, положительныя числа, удовлетворяющія равенствамъ

$$d\delta=2n-1,\quad d'\delta'+d''\delta''=2^{\alpha}(2n-1);$$

n и α данныя положительныя, цѣлыя числа; $\alpha>1$.

Чтобы понять разъ навсегда важность такихъ числовыхъ теоремъ, прервемъ на время послѣдовательное изложеніе и вмѣстѣ съ Ліувиллемъ разсмотримъ различныя примѣненія формулы (10) (эти примѣненія изложены Ліувиллемъ на страницахъ 145—150 третьяго тома Journal Liouville, série 2).

Положимъ, что $f(x)=x^2$; тогда равенство (10) даетъ

$$\Sigma d'd''=\Sigma d^3. \tag{12}$$

Пусть сумма дѣлителей числа n будетъ $\zeta_1(n)$, а сумма кубовъ этихъ дѣлителей $\zeta_3(n)$; тогда, если m нечетное число,

$$\zeta_3(m)=\zeta_1(1)\zeta_1(2m-1)+\zeta_1(3)\zeta_1(2m-3)+\ldots+\zeta_1(2m-1)\zeta_1(1). \tag{12'}$$

1) Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что число разложеній $16n+8$ на восемь нечетныхъ квадратовъ равно суммѣ кубовъ дѣлителей $2n+1$. Это слѣдуетъ изъ того, что число разложеній $8n+4$ на четыре нечетные квадрата равно суммѣ дѣлителей $2n+1$.

2) Пусть m число первоначальное вида $8\mu+3$. Равенство (12') можно тогда изобразить такъ:

$$\frac{1}{2}\{\zeta_3(m)-\zeta_1(m)^2\}=\zeta_1(1)\zeta_1(2m-1)+\zeta_1(3)\zeta_1(2m-3)+\ldots\ldots$$

$$+\zeta_1(m+2)\zeta_1(m-2).$$

Число $2(8\mu+3)$ не разлагается на два квадрата; поэтому p и $2m-p$ не могутъ быть одновременно квадратами. Если $p=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$, то ($p$ далѣе нечетное число)

$$\zeta_1(p)=(1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha})(1+b+b^2+\ldots+b^{\beta})\ldots\ldots$$

Если α, β, γ... всѣ четны, то $\zeta_1(p)$ нечетно; если же хотя одинъ изъ α, β, γ... нечетенъ, то $\zeta_1(p)$ четно. Слѣдовательно, такъ какъ p и $2m-p$ не могутъ быть разомъ квадратами, то $\zeta_1(p)\zeta_1(2m-p)$ четное число. Но

$$\zeta_3(m)=1+(8\mu+3)^3,\quad \zeta_1(m)^2=(8\mu+3)^2+2(8\mu+3)+1;$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{2}\{\zeta_3(m)-\zeta_1(m)^2\}=2(8\mu+3)(16\mu^2+10\mu+1)$$

$=$*четно нечетному числу.*

Отсюда заключаемъ, что между числами $\zeta_1(p)\zeta_1(2m-p)$, въ которыхъ p менѣе m, нечетное число четно нечетныхъ чиселъ. Но чтобы

$$(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)(1+c+\ldots+c^\gamma)\ldots\ldots$$

не дѣлилось на 4, а только на 2, должно, чтобы только одинъ изъ показателей α, β, γ... былъ нечетенъ. Итакъ, если $\zeta_1(p)\zeta_1(2m-p)$ четно нечетно, то одно изъ чиселъ p и $2m-p$ должно быть квадратомъ, а другое квадратомъ, умноженнымъ на первоначальный множитель въ нечетной степени; при этомъ нечетный этотъ множитель вида $4\lambda+1$ и входитъ въ степени, показатель которой сравнимъ съ 1 по модулю 4, потому что иначе выраженіе $1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{\alpha-1}+a^\alpha$, въ которомъ a разсматриваемое первоначальное число, дѣлится на 4. Отсюда теорема: *удвоенное первоначальное число вида* $8\mu+3$ *всегда выражается черезъ сумму нечетнаго квадрата и произведенія другаго нечетнаго квадрата на первоначальное число вида* $8\nu+5$ ($8\nu+5$, потому что $16\mu+6-(2n+1)^2$ должно быть вида $8n+5$).

Полагая $f(x)=x^4$, $f(x)=x^6$, выводимъ другія теоремы, не столь впрочемъ изящныя.

Наконецъ положимъ $f(x)=\cos xt$, гдѣ t какое нибудь постоянное. Тогда равенство (10) даетъ

$$\Sigma\{\sin d't \sin d''t\}=\Sigma d \sin^2 dt. \tag{13}$$

Положимъ $t=\frac{\pi}{2}$; тогда получимъ

$$\Sigma\{\Sigma(-1)^{\frac{d'-1}{2}}\cdot\Sigma(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\}=\zeta_1(2n+1), \tag{14}$$

гдѣ суммы по порядку распространяются на всѣ нечетныя, положительныя рѣшенія уравненій: $m'+m''=4n+2$, $m'=d'\delta'$, $m''=d''\delta''$.

Но $\Sigma(-1)^{\frac{d'-1}{2}}$ есть число разложеній нѣкотораго четно нечетнаго числа на два нечетные квадрата; слѣдовательно (14) даетъ слѣдующую теорему Якоби: *число разложеній* $8n+4$ *на сумму четырехъ нечетныхъ квадратовъ равно суммѣ дѣлителей числа* $2n+1$.

Положимъ въ (13) $t=\frac{\pi}{3}$:

$$\sum\left\{\sum sin\frac{d'\pi}{3}\cdot\sum sin\frac{d''\pi}{3}\right\}=\sum d\,sin^2\frac{d\pi}{3}. \tag{15}$$

Но по страницѣ 94

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\sum sin\frac{d'\pi}{3}=2\sum\left(\frac{d'}{3}\right)$$

есть число рѣшеній неопредѣленнаго уравненія

$$x^2+3y^2=2n'+1=d'\delta'.$$

Такъ какъ уравненіе $x^2+3y^2=4n_1+2$ не имѣетъ рѣшеній, то формула

$$\frac{16}{3}\sum d\,sin^2\frac{d\pi}{3}$$

выразитъ число всѣхъ рѣшеній уравненія

$$x^2+y^2+3(z^2+t^2)=4n+2=2d\delta.$$

Отсюда теорема: *число всѣхъ рѣшеній уравненія* $x^2+y^2+3(z^2+t^2)=4n+2$ *равно учетверенной суммѣ нечетныхъ дѣлителей* $4n+2$, *первыхъ съ* 3.

§ 45. Примѣръ 2. Въ равенствѣ (1) замѣнимъ x черезъ $\frac{\pi}{2}-x$:

$$\frac{2Kk}{\pi}\frac{cos\,am\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\,am\frac{2Kx}{\pi}}=4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{q^{2n-1}}\sum_{2n-1=d\delta}(-1)^{\frac{d-1}{2}}cos\,dx\right\}.$$

Перемножая почленно послѣднее равенство и (1), получаемъ

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\frac{\sin am\frac{2Kx}{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$=8\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^n\Sigma(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\left[\sin(d'+d'')x+\sin(d'-d'')x\right]\right\}. \qquad (16)$$

Послѣдняя сумма распространяется на всѣ нечетныя, положительныя рѣшенія d', δ', d'' и δ'' уравненія $2n=d'\delta'+d''\delta''$, гдѣ n произвольное цѣлое, положительное число, постоянное для послѣдней суммы.

Вычтемъ почленно равенство (5) изъ (6):

$$lg\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}=lg\sqrt{k'}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{2n-1}\sum_{2n-1=d\delta}\frac{1}{d}\cos 2dx\right\}.$$

Дифференцируемъ послѣднее равенство:

$$\frac{2Kk^2}{\pi}\frac{\sin am\frac{2Kx}{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}}=8\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{2n-1}\sum_{2n-1=d\delta}\sin 2dx\right\}.$$

Помножимъ послѣднее равенство почленно на равенство:

$$\frac{2K}{\pi}=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left\{q^{2^{\alpha}(2n-1)}\sum_{2n-1=d\delta}(-1)^{\frac{d-1}{2}}\right\}.$$

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\frac{\sin am\frac{2Kx}{\pi}\cos am\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}}=8\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{2n-1}\;\Sigma\sin 2dx\right\}$$

$$+32\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^n\,\Sigma\varphi(m_2)\sin 2d_1x\right\}, \qquad (17)$$

гдѣ $\varphi(m_2)$ есть избытокъ числа дѣлителей m_2 вида $4N+1$ надъ числомъ дѣлителей вида $4N+3$. Послѣдняя сумма въ равенствѣ (17) берется слѣдующимъ образомъ: число n всячески раскладывается по формулѣ

$$n=m_1+2^{\alpha}m_2,$$

въ которой m_1 и m_2 обозначаютъ нечетныя, положительныя числа, а α или нуль, или положительное, цѣлое число; далѣе m_1 и m_2 разлагаются всячески по формуламъ:

$$m_1=d_1\delta_1,\ m_2=d_2\delta_2;$$

разсматриваемая сумма распространяется на всѣ m_2, такъ получаемыя, и на всѣ d_1, соотвѣтствующія данному m_2.

Сравненіе коэффиціентовъ при нечетныхъ степеняхъ q въ (16) и (17) дастъ равенство:

$$\sum_{2m=d'\delta'+d''\delta''}(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\{sin\,(d'+d'')\,x+sin(d'-d'')x\}=\sum_{m=d\delta}sin\,2dx$$

$$+4\sum_{m=d_1\delta_1+2^{\alpha}m_2}\varphi(m_2)sin2d_1x, \tag{18}$$

въ которомъ m, m_2, d_1, δ_1, d', δ', d'' и δ'' нечетныя, положительныя числа, $\alpha>0$.

Пусть $F(x)$ нечетная, аналитическая функція, не обращающаяся въ безконечность между предѣлами $-h$ и $+h$ и имѣющая для каждаго x между этими предѣлами опредѣленное значеніе; въ такомъ случаѣ

$$F(x)=A_1sin\frac{\pi x}{h}+A_2sin\frac{2\pi x}{h}+\ldots+A_nsin\frac{n\pi x}{h}+\ldots, \tag{19}$$

$$A_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{+h}F(x)\,sin\,\frac{n\pi x}{h}\,dx.$$

Въ равенствѣ (19) замѣняемъ x разными $d'+d''$, $d'-d''$, $2d$ и $2d_1$; въ равенствѣ же (18) полагаемъ послѣдовательно

$$x=\frac{\pi}{h}, \frac{2\pi}{h}, \frac{3\pi}{h}, \ldots \frac{n\pi}{h}, \ldots\ldots$$

Результаты, полученные отъ предъидущихъ подстановокъ изъ (18), суммируемъ, предварительно умноживъ на $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, \ldots$ Очевидно, что такимъ образомъ мы получимъ равенство:

$$\Sigma(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\{F(d'+d'')+F(d'-d'')\}=\Sigma F(2d)+4\Sigma\varphi(m_2)F(2d_1), (20)$$

въ которомъ три суммы распространяются на всевозможныя рѣшенія слѣдующихъ уравненій, которыя выписываемъ въ томъ же порядкѣ, въ какомъ стоятъ суммы въ равенствѣ (20):

$$d'\delta'+d''\delta''=2m,\ d\delta=m,\ d_1\delta_1+2^{\alpha}m_2=m;$$

въ послѣднихъ уравненіяхъ m (данное) и искомыя d', δ', d'', δ'', d, δ, d_1, δ_1 и m_2 всѣ нечетны и положительны, а искомое α какое нибудь цѣлое, положительное число.

Замѣчая опять, что всякую функцію, имѣющую опредѣленныя, конечныя значенія для нѣкоторыхъ значеній перемѣннаго, можно всегда замѣнить функціею, непрерывною и конечною въ извѣстныхъ предѣлахъ и равною съ первою функціею для разсматриваемыхъ значеній перемѣннаго, заключаемъ слѣдующее: *равенство* (20) *вѣрно для всякой функціи* $F(x)$, *имѣющей опредѣленныя, конечныя значенія для* x, *равнаго тѣмъ* $d'+d''$, $d'-d''$, $2d$ *и* $2d_1$, *которыя входятъ въ* (20), *если только*

$$F(-x)=-F(x).$$

Слѣдствіе. Положимъ $F(x)=x$ и назовемъ черезъ $\zeta_1(m)$ сумму всѣхъ дѣлителей m; тогда получимъ

$$\sum_{2m=m'+m''}\zeta_1(m')\varphi(m'')=\zeta_1(m)+4\sum_{m=m_1+2^{\alpha}m_2}\zeta_1(m_1)\varphi(m_2).$$

Если число нечетныхъ, положительныхъ рѣшеній уравненія

$$x^2+y^2+z^2+t^2+2(u^2+v^2)=16n+8$$

есть A, а число нечетныхъ, положительныхъ рѣшенiй уравненiя

$$x^2+y^2+z^2+t^2+2^\alpha(u^2+v^2)=8n+4,$$

въ которомъ $\alpha>1$ *и перемѣнное, есть B, то*

$$A=4B+\zeta_1(2n+1).$$

§ 46. Примѣръ 3. Будемъ по прежнему называть черезъ $m, m_1, m_2, d, \delta, d', \delta', d'', \delta'', d'''$ и δ''' нечетныя, положительныя числа, черезъ α какое нибудь цѣлое число, большее нуля.

Простое возвышенiе въ кубъ даетъ намъ

$$\frac{8K^3k^3}{\pi^3}sin^3am\frac{2Kx}{\pi}=-16\sum_{m=1}^{\infty}\{q^{\frac{m}{2}}\Sigma[sin(d'+d''+d''')x$$

$$+sin(d'-d''-d''')x-sin(d'-d''+d''')x-sin(d'+d''-d''')x]\},\ (21)$$

гдѣ вторая сумма распространяется на всѣ рѣшенiя уравненiя

$$d'\delta'+d''\delta''+d'''\delta'''=m.$$

Продифференцировавъ же два раза равенство (1), имѣемъ

$$\frac{8K^3k}{\pi^3}(1+k^2)sin\,am\frac{2Kx}{\pi}-\frac{16K^3k^3}{\pi^3}sin^3am\frac{2Kx}{\pi}=4\sum_{m=1}^{\infty}\{q^{\frac{m}{2}}\Sigma d^2 sin\,dx\};\ (22)$$

послѣдняя сумма распространяется на всѣ рѣшенiя уравненiя $m=d\delta$.

Изъ формулы страницы 73 слѣдуетъ

$$\frac{4K^2}{\pi^2}=1+8\Sigma\zeta_1(m)\{q^m+3q^{2m}+3q^{4m}+3q^{8m}+3q^{16m}+\ldots\},$$

$$\frac{4K^2k'^2}{\pi^2}=1+8\Sigma\zeta_1(m)\{-q^m+3q^{2m}+3q^{4m}+3q^{8m}+3q^{16m}+\ldots\},$$

$$\frac{4K^2}{\pi^2}(1+k^2)=1+24\Sigma\zeta_1(m)\{q^m+q^{2m}+q^{4m}+q^{8m}+\ldots\},\ (23)$$

$$\frac{4K^2}{\pi^2}(1+k^2)=1+24\sum_m\sum_\alpha \zeta_1(m)q^{2^{\alpha-1}m}, \tag{24}$$

гдѣ α можетъ имѣть различныя цѣлыя значенія отъ 1 до ∞.

Перемножимъ (24) и (1) равенства почленно:

$$\frac{8K^3k}{\pi^3}(1+k^2)\sin am\frac{2Kx}{\pi}$$

$$=4\sum_{m=1}^{\infty}\{q^{\frac{m}{2}}\Sigma \sin dx\}+96\sum_{m=1}^{\infty}\{q^{\frac{m}{2}}\Sigma\zeta_1(m_2)\sin d_1x\}; \tag{25}$$

здѣсь во второй суммѣ $m=d\delta$, а въ четвертой $m=d_1\delta_1+2^\alpha m_2$.

Изъ равенствъ (21), (22) и (25) выводимъ

$$8\Sigma\{\sin(d'+d''+d''')x-\sin(d''+d'''-d')x-\sin(d'+d'''-d'')x$$
$$-\sin(d'+d''-d''')x\}=\Sigma(d^2-1)\sin dx-24\Sigma\zeta_1(m_2)\sin d_1x. \tag{26}$$

Повторяя тѣ же разсужденія, что и въ примѣрахъ 1 и 2, получимъ теорему:

Если $F(-x)=-F(x)$ и если m, m_2', d', δ'.... нечетныя положительныя числа, то

$$8\Sigma\{F(d'+d''+d''')-F(d''+d'''-d')-F(d'+d'''-d'')$$
$$-F(d'+d''-d''')\}=\Sigma(d^2-1)F(d)-24\Sigma\zeta_1(m_2)F(d_1), \tag{27}$$

гдѣ суммы по порядку распространяются на всѣ рѣшенія уравненій:

$$m=d'\delta'+d''\delta''+d'''\delta''',\ m=d\delta,\ m=d_1\delta_1+2^\alpha m_2,$$

при чемъ α есть перемѣнное, положительное цѣлое.

Слѣдствіе. Положимъ въ (27) $F(x)=x^3$ и будемъ обозначать черезъ $\zeta_1(m)$ сумму всѣхъ дѣлителей числа m, черезъ $\zeta_3(m)$ сумму кубовъ всѣхъ дѣлителей m и черезъ $\zeta_5(m)$ сумму пятыхъ степеней всѣхъ дѣлителей m. Тогда

$$192\Sigma\zeta_1(m')\zeta_1(m'')\zeta_1(m''')+24\Sigma\zeta_3(m_1)\zeta_1(m_2)=\zeta_5(m)-\zeta_3(m),$$

полагая $m=m'+m''+m'''=m_1+2^\alpha m_2$.

Если m нечетное число и G число разложенiй 4m на сумму двѣнадцати нечетныхъ квадратовъ, а H число разложенiй 8m на двѣнадцать нечетныхъ квадратовъ, слѣдуя формулѣ

$$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2+r^2+s^2+2^{\alpha+1}(p^2+d^2+h^2+o^2),$$ [1])

то существуетъ равенство

$$8G+H=\frac{1}{24}\{\zeta_5(m)-\zeta_3(m)\}.$$

§ 47. Примѣръ 4. Въ предъидущихъ примѣрахъ не входили въ коэффицiенты разсматриваемыхъ суммъ дополнительные дѣлители δ. Сообразимъ, какимъ образомъ могутъ войти въ эти суммы дополнительные дѣлители въ первой степени. Замѣтимъ, что члены $q^n:d$ входятъ въ разложенiя логариѳмовъ Якобiевыхъ функцiй ((5) и (6) формулы), а также въ ряды, изображающiе логариѳмы эллиптическихъ функцiй. Если теперь членъ $\frac{1}{d}q^n$ дифференцировать относительно q, то получимъ

$$\frac{n}{d}q^{n-1}=\delta q^{n-1}.$$

Пользуясь этимъ замѣчанiемъ, докажемъ одну теорему Лiувилля (Journal Liouville, tome 3, série 2).

Теорема. *Если $f(-x)=f(x)$, то*

$$2\Sigma\{f(d'-2^\alpha d'')-f(d'+2^\alpha d'')\}=\Sigma(\delta-d)f(d), \tag{28}$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ нечетныя, положительныя рѣшенiя d', δ', d'' и δ'' уравненiя

$$d'\delta'+2^\alpha d''\delta''=m$$

(m данное нечетное число, α перемѣнное цѣлое, большее нуля), а вторая сумма на всѣ нечетныя же положительныя рѣшенiя уравненiя

$$d\delta=m.$$

[1]) Что число разложенiй $16n+8$ на восемь нечетныхъ квадратовъ равно $\zeta_3(2n+1)$, доказано въ первомъ примѣрѣ.

Доказательство.

$$lg\vartheta_3\left(\frac{x}{2}\right)-lg\vartheta\left(\frac{x}{2}\right)=4\sum_{m=1}^{\infty}\left\{q^m\sum_{m=d\delta}\frac{1}{d}\cos dx\right\},\tag{29}$$

гдѣ m нечетно. Оперируемъ надъ этимъ равенствомъ посредствомъ дѣйствія

$$q\frac{d}{dq}+\frac{d^2}{dx^2};$$

тогда получимъ

$$\left(q\frac{d}{dq}+\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(lg\vartheta_3\left(\frac{x}{2},q\right)-lg\vartheta\left(\frac{x}{2},q\right)\right)=4\Sigma\{q^m\Sigma(\delta-d)\cos dx\}.\tag{30}$$

Но легко вывести:

$$q\frac{d\vartheta_3\left(\frac{x}{2},q\right)}{dq}+\frac{d^2\vartheta_3\left(\frac{x}{2},q\right)}{dx^2}=0,\; q\frac{d\vartheta\left(\frac{x}{2},q\right)}{dq}+\frac{d^2\vartheta\left(\frac{x}{2},q\right)}{dx^2}=0;$$

слѣдовательно

$$\frac{1}{\vartheta^2\left(\frac{x}{2}\right)}\left\{\frac{d\vartheta\left(\frac{x}{2}\right)}{dx}\right\}^2-\frac{1}{\vartheta_3{}^2\left(\frac{x}{2}\right)}\left\{\frac{d\vartheta_3\left(\frac{x}{2}\right)}{dx}\right\}^2=4\Sigma\{q^m\Sigma(\delta-d)\cos dx\}.\tag{31}$$

Дифференцируемъ теперь относительно x равенство (29):

$$\frac{1}{\vartheta_3\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{d\vartheta_3\left(\frac{x}{2}\right)}{dx}-\frac{1}{\vartheta\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{d\vartheta\left(\frac{x}{2}\right)}{dx}=-4\Sigma\{q^m\Sigma\sin dx\}.\tag{32}$$

Изъ тѣхъ же равенствъ (5) и (6) выводимъ

$$\frac{1}{\vartheta_3\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{d\vartheta_3\left(\frac{x}{2}\right)}{dx}+\frac{1}{\vartheta\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{d\vartheta\left(\frac{x}{2}\right)}{dx}=4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left\{q^{2^\alpha m}\sum_{m=d\delta}\sin 2^\alpha dx\right\}.\tag{33}$$

Перемножая почленно равенства (32) и (33) и сравнивая результатъ съ равенствомъ (31), получаемъ

$$2\sum_{m=d'\delta'+2^{\alpha}d''\delta''}\left\{cos(d'-2^{\alpha}d'')x-cos(d'+2^{\alpha}d'')x\right\}=\sum_{m=d\delta}(\delta-d)cos\ dx. \quad (34)$$

Изъ равенства (34) рядомъ знакомыхъ разсужденій выводится равенство (28).

§ 48. Излишне продолжать выводъ различныхъ формулъ; будетъ умѣстнѣе сдѣлать нѣкоторыя замѣчанія о характерѣ тѣхъ числовыхъ теоремъ, которыя выведутся вышеописаннымъ способомъ изъ рядовъ, представляющихъ эллиптическія функціи, логариѳмы Якобіевыхъ функцій и ихъ производныя. Всѣ тригонометрическіе ряды изображающіе только-что упомянутыя функціи, имѣютъ то общее, что каждая тригонометрическая функція умножается въ нихъ на раціональную дробь отъ q или отъ нѣкотораго корня изъ q; при этомъ въ тригонометрической функціи число, умножающее перемѣнное, обыкновенно пропорціонально степени q въ числителѣ раціональной дроби; также знаменатель дроби обыкновенно вида $1\pm q^r$, гдѣ r тоже пропорціонально степени q въ числителѣ. Если теперь такой рядъ расположить по степенямъ q, то каждая степень q умножится на нѣкоторую алгебраическую сумму простыхъ тригонометрическихъ функцій; эти суммы производятся по дѣлителямъ чиселъ, пропорціональныхъ показателямъ степени q. Отсюда такія функціи, какъ

$$\Sigma sin\ dx,\ \Sigma cos\ dx,\ \Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}cos\ dx,\ \Sigma d^2 cos\ dx,\ \Sigma\delta cos\ dx \quad \text{и т. п.}$$

Если теперь перемножимъ нѣсколько такихъ рядовъ, то получаемъ суммы такого рода, какъ

$$\Sigma sin(d'+d''+d''')x,\ \Sigma d cos(d+2^{\alpha}d'),\ \Sigma(\delta-d)cos\ dx,$$

въ которыхъ суммированіе производится для всѣхъ извѣстнаго характера цѣлыхъ, положительныхъ (здѣсь нечетныхъ) рѣшеній нѣкоторыхъ уравненій; для приведенныхъ суммъ эти уравненія по порядку суть

$$d'\delta'+d''\delta''+d'''\delta'''=m,\ d\delta+2^\alpha d'\delta'=m,\ d\delta=m.$$

Отъ послѣднихъ суммъ очень просто переходимъ къ суммамъ

$$\Sigma F(d'+d''+d'''),\ \Sigma df(d+2^\alpha d'),\ \Sigma(\delta-d)f(d)$$

и т. п., въ которыхъ $F(x)$ и $f(x)$ изображаютъ произвольныя функціи, первая—нечетную, вторая —четную. Уравненія, которыя даютъ аргументы функцій въ суммахъ, составляются вообще такъ: данное число разлагается различными способами, но по извѣстному закону, на нѣсколько слагаемыхъ (въ нѣкоторыхъ случаяхъ не разлагается, т. е. слагаемое, какъ бы, одно), и каждое слагаемое разлагается на два множителя; изъ этихъ двухъ множителей аргументъ функціи всегда содержитъ только одинъ множитель. Законы разложенія числа сначала на слагаемыя, а потомъ на множители разнообразны.

Но въ теоріи эллиптическихъ функцій встрѣчаются и другіе тригонометрическіе ряды, совсѣмъ инаго характера: 1) ряды, выражающіе Якобіевы функціи, 2) Эрмитовскіе ряды. Разсмотримъ, чѣмъ будутъ отличаться теоремы, если ихъ выводить съ помощью этихъ рядовъ другаго характера.

Въ Якобіевыхъ функціяхъ аргументы тригонометрическихъ функцій слѣдуютъ простой ариѳметической прогрессіи въ то время, какъ показатели модуля q слѣдуютъ ариѳметической прогрессіи второй степени. Если теперь перемножить ряды, изъ которыхъ одинъ изображаетъ Якобіеву функцію, а другой или эллиптическую функцію, или другую функцію § 43, то показатель q въ произведеніи можно будетъ представить формулою (ограничиваемся Якобіевыми функціями въ тѣсномъ смыслѣ)

$$aM^2+bd\delta,$$

въ которой a и b нѣкоторыя положительныя постоянныя числа, а M, d и δ перемѣнныя цѣлыя числа, также положительныя или нули. Въ то же время аргументы синуса или косинуса въ произведеніи будутъ изображаться формулою

$$(\rho M+\sigma d)x,$$

въ которой ρ и σ нѣкоторыя постоянныя числа, положительныя, отрицательныя или 0. Такъ, напримѣръ, при перемноженіи равенствъ:

$$\frac{2Kk}{\pi} sin\ am \frac{2Kx}{\pi} = 4\sum_d\sum_\delta q^{\frac{1}{2}d\delta} sin\ dx,$$

$$\vartheta_3(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} cos 2nx,$$

въ которыхъ d и δ нечетныя положительныя числа, а n всякое цѣлое число, получимъ

$$\frac{2Kk}{\pi} sin\ am \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_3(x) = 4\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\ \sum\sum_{d,\delta=1}^{+\infty} q^{n^2+\frac{1}{2}d\delta} sin(d+2n)x. \qquad (35)$$

Располагая такую сумму по восходящимъ степенямъ q, мы у каждой степени получимъ коэффиціентомъ сумму тригонометрическихъ функцій, у которыхъ аргументы вида:

$$(\rho M + \sigma d)x; \qquad (36)$$

эта сумма распространяется на всѣ рѣшенія извѣстнаго характера неопредѣленнаго уравненія вида

$$\mu M^2 + \nu d\delta = n, \qquad (37)$$

въ которомъ μ, ν и n нѣкоторыя постоянныя цѣлыя числа, положительныя или нули; число n пропорціонально степени q. Замѣтимъ, что число M можно считать и отрицательнымъ, но d и δ не могутъ быть отрицательны. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ (равенство (35)) имѣемъ

$$\frac{2Kk}{\pi} sin\ am \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_3(x) = 4\sum_{r=1}^{\infty}\left\{q^{r-\frac{1}{2}} \Sigma sin(d+2n)x\right\}, \qquad (38)$$

гдѣ послѣдняя сумма распространяется на всѣ нечетныя положительныя рѣшенія d и δ и всякія цѣлыя рѣшенія n (положительныя, отрицательныя и 0) уравненія

$$d\delta + 2n^2 = 2r - 1. \qquad (38')$$

Понятно, что такого рода суммы, распространенныя на рѣшенія извѣстнаго характера неопредѣленнаго уравненія (37), будутъ

входить и въ тѣ теоремы, которыя выведутся изъ разсматриваемыхъ рядовъ съ помощью соображеній, разъясненныхъ въ предъидущихъ параграфахъ; понятно также, что аргументы произвольныхъ функцій будутъ пропорціональны формулѣ (36).

Если перемножимъ двѣ Якобіевы функціи, то аргументы косинусовъ или синусовъ будутъ пропорціональны формулѣ

$$n+\xi n', \tag{39}$$

гдѣ ξ числовой коэффиціентъ, а n и n' нѣкоторыя перемѣнныя цѣлыя числа. Если произведеніе расположимъ по степенямъ q, то коэффиціентомъ при нѣкоторой степени q будетъ сумма тригонометрическихъ функцій; эта сумма будетъ распространяться на всѣ рѣшенія извѣстнаго характера уравненія

$$\eta n^2+\zeta n'^2=N, \tag{40}$$

гдѣ N данное цѣлое число, положительное или нуль, а η и ζ тоже цѣлыя положительныя числа, постоянныя для извѣстной задачи. Очевидно, что и въ числовой теоремѣ, выведенной при помощи перемноженія двухъ Якобіевыхъ функцій, будутъ играть роль (и понятно какую) формулы (39) и (40).

Перейдемъ теперь къ Эрмитовскимъ рядамъ, выражающимъ непосредственно произведеніе эллиптической функціи на Якобіеву функцію. Для большей ясности дальнѣйшаго изложенія разсмотримъ Эрмитовскіе ряды, употребленные нами въ выводахъ предъидущей главы, а также выведемъ одинъ рядъ, который приводится для примѣровъ, такъ какъ примѣры я предпочитаю брать изъ тѣхъ, которые предложены Ліувиллемъ.

Замѣтивъ, что $4n^2-m^2=(2n-m)(2n+m)=d\delta$ и что $d+\delta=4n$, мы можемъ ряду (3) главы 3-ей придать видъ:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\vartheta_2(x)k\,sin\,am\frac{2Kx}{\pi}=2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{n+\frac{3}{4}}\Sigma\,sin\frac{d+\delta}{2}x\right\}, \tag{41}$$

гдѣ послѣдняя сумма распространяется на всѣ положительныя цѣлыя значенія d и δ, удовлетворяющія уравненію

$$4n+3=d\delta. \tag{41'}$$

Замѣтивъ, что

$$n^2+n+\frac{1}{4}-a^2=\frac{1}{4}(2n+1+2a)(2n+1-2a)=\frac{1}{4}d\delta,$$

что $n+a=\frac{1}{2}(d-1)$ и что $2n+1=\frac{1}{2}(d+\delta)$, мы можемъ равенство (26) главы 3-ей представить такъ:

$$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}\vartheta_3(x)\cos\, am\frac{2Kx}{\pi}=2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{n+\frac{1}{4}}\Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d+\delta}{2}x\right\}; \quad (42)$$

послѣдняя сумма опять распространяется на всевозможныя цѣлыя положительныя рѣшенія уравненія

$$d\delta=4n+1. \quad (42')$$

Если по прежнему

$$\vartheta_3(0,q^2)=\sqrt{\frac{2L}{\pi}},\ \vartheta_2(0,q^2)=\sqrt{\frac{2Ll}{\pi}},$$

то равенства (36) и (44″) главы 3-ей можно написать такъ:

$$\sqrt{\frac{L\sqrt{l^3}}{\pi}}\sin\, am\frac{2Lx}{\pi}\vartheta_2(x,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{2n+1}\Sigma\sin(d+\delta)x\right\}, \quad (43)$$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi\sqrt{k'}}}\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_1(2x,q^2)=2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{n+\frac{1}{2}}\Sigma\sin(d+\delta)x\right\}; \quad (44)$$

внутреннія суммы берутся по всѣмъ значеніямъ d и δ, цѣлымъ и положительнымъ, удовлетворяющимъ уравненію

$$2n+1=d\delta. \quad (45)$$

Выведемъ теперь Эрмитовскій рядъ для

$$\sin\, am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x).$$

Для этого перемножаемъ почленно равенства:

$$\frac{2Kk}{\pi}\sin am\frac{2Kx}{\pi}=4\sum_{r,\,b=1}^{+\infty}\sum q^{\frac{1}{2}(2r-1)(2b-1)}\sin(2r-1)x,$$

$$\vartheta_3(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{n^2}\cos 2nx.$$

Получимъ

$$\frac{2Kk}{\pi}\sin am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x)$$

$$=2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{r,\,b=1}^{+\infty}\sum q^{n^2+\frac{1}{2}(2r-1)(2b-1)}\{\sin(2r+2n-1)x+\sin(2r-2n-1)x\}.$$

Опредѣлимъ коэффиціентъ при $\sin(2n+1)x$:

$$4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sqrt{q^{2r-1}}}{1-q^{2r-1}}\{q^{(r-n-1)^2}-q^{(r+n)^2}\}$$

$$=4\sum_{r=1}^{\infty}q^{\frac{1}{4}(2r-1)^2+\frac{1}{4}(2n+1)^2}\frac{q^{-(r-\frac{1}{2})(2n+1)}-q^{(r-\frac{1}{2})(2n+1)}}{\sqrt{q^{-2r+1}}-\sqrt{q^{2r-1}}}$$

$$=4\sum_{r=1}^{\infty}q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}\{q^{\frac{1}{4}(2r-1)^2}+q^{-1}[q^{\frac{1}{4}(2r+1)^2}+q^{\frac{1}{4}(2r-3)^2}]$$

$$+q^{-4}[q^{\frac{1}{4}(2r+3)^2}+q^{\frac{1}{4}(2r-5)^2}]+\ldots\ldots+q^{-n^2}[q^{\frac{1}{4}(2r+2n-1)^2}+q^{\frac{1}{4}(2r-2n-1)^2}]\}$$

$$=2\vartheta_2(0,q)q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}\{1+2q^{-1}+2q^{-4}+\ldots+2q^{-n^2}\}.$$

Итакъ имѣемъ

$$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}\,sin\;am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x)$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}\{1+2q^{-1}+\ldots.+2q^{-n^2}\}\,sin(2n+1)x.$$

Расположимъ этотъ рядъ по степенямъ q. Разсужденія, подобныя предъидущимъ, дадутъ намъ

$$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}\,sin\;am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{n+\frac{1}{4}}\sum_{4n+1=d\delta}sin\frac{d+\delta}{2}x\right\}. \qquad (46)$$

Изъ всѣхъ предъидущихъ формулъ видимъ, что въ подобныхъ рядахъ сумма отъ тригонометрическихъ функцій распространяется на рѣшенія уравненія $d\delta=n$; это также, какъ и въ рядахъ, выражающихъ эллиптическія функціи. Но аргументъ тригонометрической функціи совсѣмъ другой, чѣмъ аргументъ въ рядахъ § 43; здѣсь онъ пропорціоналенъ суммѣ двухъ дополнительныхъ дѣлителей.

Если помножить Эрмитовскій рядъ на рядъ, изображающій Якобіеву функцію или при неопредѣленномъ аргументѣ, или при частномъ значеніи аргумента, то показатели q будутъ вида $\zeta n^2+\eta d\delta$, гдѣ ζ и η положительныя числовыя величины; аргументы же тригонометрическихъ функцій будутъ пропорціональны или

$$d+\delta+\rho n,\text{ или } d+\delta, \qquad (47)$$

гдѣ ρ числовая постоянная величина; первое будетъ въ томъ случаѣ, когда аргументъ Якобіевой функціи неопредѣленъ, а послѣднее, когда берется частное значеніе Якобіевой функціи. Слѣдовательно аргументы функцій въ тѣхъ теоремахъ, которыя выводятся такимъ перемноженіемъ рядовъ, будутъ пропорціональны формуламъ (47); суммы же произвольныхъ функцій будутъ распространяться на всѣ рѣшенія извѣстнаго характера уравненія

$$\mu n^2+\lambda d\delta=N, \qquad (48)$$

гдѣ μ, λ и N данныя, а n, d и δ неизвѣстныя.

Положимъ, что нѣкоторый Эрмитовскій рядъ умножается на рядъ, принадлежащій къ классу § 43, и положимъ, что рядомъ извѣстныхъ разсужденій мы вывели, пользуясь предъидущимъ произведеніемъ, нѣкоторую ариѳметическую теорему. Въ такомъ случаѣ въ нашей теоремѣ будутъ встрѣчаться суммы, которыя будутъ распространяться на рѣшенія извѣстнаго характера уравненія

$$\zeta d\delta + \eta d'\delta' = n; \tag{49}$$

такое суммированіе будетъ производиться надъ функціями; аргументы этихъ функцій будутъ пропорціональны выраженію

$$\mu(d+\delta)+\lambda d'. \tag{50}$$

Въ предъидущихъ формулахъ n данное число, положительное цѣлое или нуль, ζ, η, μ и λ постоянныя цѣлыя числовыя величины, при чемъ ζ и η непремѣнно положительны.

Можно было бы продолжать подобныя разсужденія, разсматривая, что будетъ, если перемножимъ два Эрмитовскіе ряда, или если будемъ перемножать три, четыре или болѣе рядовъ разнаго вида; но изъ предъидущаго достаточно выяснились главнѣйшія отличительныя свойства ариѳметическихъ теоремъ, зависящія отъ свойствъ рядовъ, употребленныхъ при выводѣ теоремъ.

Прежде чѣмъ перейдемъ къ примѣрамъ, замѣтимъ мимоходомъ, что аргументы тригонометрическихъ функцій въ разложеніяхъ

$$\frac{1}{\vartheta(x)}, \frac{1}{\vartheta_1(x)}, \frac{1}{\vartheta_2(x)}, \frac{1}{\vartheta_3(x)}$$

будутъ пропорціональны разностямъ двухъ дополнительныхъ дѣлителей показателя q или $\sqrt[4]{q}$; а именно:

$$\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta(x)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{\frac{1}{4}(2n-1)^2} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{n+\frac{1}{4}}\sum_{4n+1=d\delta}^{d>\delta}(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d-\delta}{2}x\right\}, \tag{51}$$

$$\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_3(x)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{\frac{1}{4}(2n-1)^2} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{n+\frac{1}{4}}\sum_{4n+1=d\delta}^{d>\delta}(-1)^{\frac{d+\delta-2}{4}}\cos\frac{d-\delta}{2}x\right\}, \tag{52}$$

$$\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(x)} = \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{2n}\sum_{2n=d\delta}^{d>\delta}(-1)^{\delta}\sin(d-\delta)x\right\}, \qquad (53)$$

$$\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(x)} = \frac{1}{\cos x} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{2n}\sum_{2n=d\delta}^{d>\delta}(-1)^{\frac{d+\delta+1}{2}}\cos(d-\delta)x\right\}. \qquad (54)$$

Въ двухъ послѣднихъ равенствахъ $2n$ всегда разлагается на два множителя различной четности.

Переходимъ къ примѣрамъ.

§ 49. Примѣръ 5. Возьмемъ равенство, стоящее въ началѣ 2-го примѣра, и тригонометрическій рядъ для $\vartheta_3(x)$ и перемножимъ эти равенства:

$$\frac{2K\sqrt{k}}{\pi}\,\vartheta_2(x) = 4\sum_{m=1}^{\infty}\left\{q^{\frac{1}{2}m}\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos(d-2n)x\right\}. \qquad (55)$$

Въ равенствѣ (55) m нечетное число, n можетъ быть положительнымъ, нулемъ, отрицательнымъ, четнымъ или нечетнымъ, d и δ нечетны и положительны; послѣдняя сумма распространяется на всѣ рѣшенія, удовлетворяющія предъидущимъ условіямъ, уравненія

$$d\delta + 2n^2 = m. \qquad (55')$$

Съ другой стороны имѣемъ (страницы 82 и 85), обозначая черезъ m_1, d' и δ' нечетныя положительныя числа,

$$\vartheta_2(x) = 2\sum_{m_1=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}m_1^2}\cos m_1 x,$$

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt{k} = 2\sum_{d'\delta'=1}^{\infty}(-1)^{\frac{d'-1}{2}}q^{\frac{1}{4}d'\delta'};$$

$$\frac{2K}{\pi}\sqrt{k}\,\vartheta_2(x) = 4\sum_{m=1}^{\infty}\left\{q^{\frac{1}{2}m}\Sigma(-1)^{\frac{d'-1}{2}}\cos m_1 x\right\}. \qquad (56)$$

Послѣдняя сумма распространяется на всѣ рѣшенія указаннаго уже характера уравненія

$$m_1^2+d'\delta'=2m. \qquad (56')$$

Сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ q въ равенствахъ (55) и (56) даетъ

$$\Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}cos(d-2n)x=\Sigma(-1)^{\frac{d'-1}{2}}cos\, m_1x. \qquad (57)$$

Теорема. *Если m, m_1, d, δ, d' и δ' нечетныя, положительныя числа, а n какое нибудь цѣлое число, если эти величины при m постоянномъ удовлетворяютъ двумъ равенствамъ:*

$$d\delta+2n^2=m,\ d'\delta'+m_1^2=2m,$$

если $f(-x)=f(x)$, гдѣ $f(x)$ при цѣлыхъ, разсматриваемыхъ значеніяхъ x имѣетъ опредѣленныя, конечныя значенія, то существуетъ равенство

$$\Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}f(d-2n)=\Sigma(-1)^{\frac{d'-1}{2}}f(m_1). \qquad (58)$$

§ 50. Примѣръ 6. Умножимъ (46) на $\vartheta_2(0)$:

$$\frac{2Kk}{\pi}sin\,am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{n+\frac{1}{2}}\sum sin\frac{d+\delta}{2}x\right\}; \qquad (59)$$

послѣдняя сумма должна распространяться на всѣ нечетныя, положительныя рѣшенія уравненія

$$m^2+d\delta=4n+2. \qquad (59')$$

Сравнимъ (59) съ (38):

$$\Sigma sin(d'+2n')x=\Sigma sin\frac{d+\delta}{2}x. \qquad (60)$$

Знакомыя умозаключенія дадутъ намъ теорему:
Пусть $F(-x)=-F(x)$ и $F(0)=0$. Возьмемъ какое нибудь нечетное число $2n+1$ и будемъ отыскивать всевозможныя рѣшенія уравненій:

$$d'\delta' + 2n'^2 = 2n+1,\ d\delta + m^2 = 4n+2,$$

полагая m, d, δ, d' *и* δ' *нечетными, положительными числами, а* n' *или четнымъ, или нечетнымъ, или положительнымъ, или отрицательнымъ, или нулемъ. Тогда имѣемъ*

$$\Sigma F(d'+2n') = \Sigma F\left(\frac{d+\delta}{2}\right), \tag{61}$$

гдѣ суммы распространяются на всѣ значенія d', n', d *и* δ, *удовлетворяющія вышенаписаннымъ уравненіямъ и ограничивающимъ условіямъ.*

§ 51. Примѣръ 7. Перемножимъ ряды (1), (46) и рядъ, выражающій $\vartheta_2(0)$; тогда получимъ

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2} \sin^2 am \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_3(x)$$

$$= 8\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \left\{ q^{2^{\alpha-2}m} \sum \left\{ \cos\left(\frac{d+\delta}{2} - d_1\right)x - \cos\left(\frac{d+\delta}{2} + d_1\right)x \right\} \right\}. \tag{62}$$

Послѣдняя сумма распространяется на всѣ рѣшенія извѣстнаго характера уравненія

$$m_1^2 + d\delta + 2d_1\delta_1 = 2^\alpha m, \tag{62'}$$

въ которомъ α и m данныя и m_1, d, δ, d_1 и δ_1 искомыя; въ уравненіи (62′) $\alpha \geqq 2$ и цѣлое число, m, m_1, d, δ, d_1 и δ_1 нечетныя и положительныя цѣлыя числа. Очевидно, что $d\delta$ вида $4N+1$, иначе $2^\alpha m$ не дѣлилось бы на 4, а только на 2.

Съ другой стороны, перемножая рядъ (4) и рядъ, выражающій $\vartheta_3(x)$ (страница 228), можемъ результатъ написать такъ:

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2} \sin^2 am \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_3(x)$$

$$= 8\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ q^n \sum 2^{\alpha'-1} d_2 \left[\cos 2n'x - \cos(2n' + 2^{\alpha'} d_2)x \right] \right\}; \tag{63}$$

послѣдняя сумма распространяется на рѣшенія уравненія

$$n'^2+2^{\alpha'-1}d_2\delta_2=n=2^{\alpha-1}m, \qquad (63')$$

при чемъ n данное положительное число, α' перемѣнное цѣлое число, большее нуля, n' перемѣнное цѣлое число, d_2 и δ_2 перемѣнныя нечетныя положительныя цѣлыя числа. Сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ q въ равенствахъ (62) и (63) даетъ намъ

$$\sum\left\{\cos\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1\right)x-\cos\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1\right)x\right\}$$

$$=\sum 2^{\alpha'-1}d_2\left[\cos 2n'x-\cos(2n'+2^{\alpha'}d_2)x\right]. \qquad (64)$$

Теорема. *Пусть m, m_1, d, δ, d_1, δ_1, d_2 и δ_2 нечетныя положительныя цѣлыя числа, а n' какое нибудь цѣлое число; пусть α и α' цѣлыя числа, большія нуля. Если $f(x)$ четная функція, то имѣемъ равенство*

$$\sum\left\{f\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1\right)-f\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1\right)\right\}$$

$$=\sum 2^{\alpha'-1}d_2\left\{f(2n')-f(2^{\alpha'}d_2+2n')\right\}, \qquad (65)$$

гдѣ суммы распространяются на всѣ рѣшенія уравненій:

$$2^{\alpha+1}m=m_1^2+d\delta+2d_1\delta_1,\quad 2^{\alpha-1}m=n'^2+2^{\alpha'-1}d_2\delta_2;$$

m и α постоянныя, а m_1, d, δ, d_1, δ_1, n', α', d_2 и δ_2 перемѣнныя.

Слѣдствіе. Положимъ, что $f(0)=1$ и $f(x)=0$, если x цѣлое число, отличающееся отъ нуля.

Такъ какъ d, δ и d_1 положительны, то $f\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1\right)=0$ всегда, а $f\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1\right)$ не равно нулю только въ томъ случаѣ, когда $d_1=\frac{1}{2}(d+\delta)$; но въ такомъ случаѣ

$$2^{\alpha+1}m-m_1^2=d(\delta+\delta_1)+\delta\delta_1=\frac{d+\delta}{2}\left(\frac{d+\delta}{2}+2\delta_1\right)-\left(\frac{d-\delta}{2}\right)^2.$$

Легко сообразить, что $\frac{1}{2}(d+\delta)$ число нечетное, а $\frac{1}{2}(d-\delta)$ число четное. Если

$$\left(\frac{d+\delta}{2}\right)^2 > (d-\delta)^2,$$

то на

$$\frac{d+\delta}{2}\left(\frac{d+\delta}{2}+2\delta_1\right)-\left(\frac{d-\delta}{2}\right)^2$$

можно смотрѣть, какъ на минусъ-опредѣлитель нѣкоторой приведенной формы съ двумя нечетными крайними коэффиціентами; этотъ минусъ-опредѣлитель вида $4n+3$. Если же

$$\left(\frac{d+\delta}{2}\right)^2 < (d-\delta)^2; d > \delta,$$

то пишемъ, замѣчая, что тогда $d > 3\delta$,

$$2^{\alpha+1}m - m_1^{\;2} = \frac{d+\delta}{2}(2\delta+2\delta_1)-\delta^2,$$

и мы имѣемъ въ этомъ выраженіи минусъ-опредѣлитель приведенной формы съ однимъ четнымъ крайнимъ коэффиціентомъ, а другимъ нечетнымъ. Если наконецъ

$$\left(\frac{d+\delta}{2}\right)^2 < (d-\delta)^2,\ d < \delta,$$

то пишемъ

$$2^{\alpha+1}m - m_1^{\;2} = \frac{d+\delta}{2}(2d+2\delta_1)-d^2.$$

Во всякомъ случаѣ ясно, что въ первой части равенства (65) имѣемъ дѣло съ суммою

$$F(4n-1^2)+F(4n-3^2)+F(4n-5^2)+\ldots,$$

гдѣ $F(n)$ извѣстная Кронекерова функція, опредѣляющая, сколько классовъ формъ съ опредѣлителемъ $-n$ и съ однимъ, по крайней мѣрѣ, крайнимъ коэффиціентомъ нечетнымъ.

Во второй же части равенства (65) мы, во первыхъ, должны положить $n'=0$; тогда получимъ

$$\Sigma 2^{\alpha-1} d_2, \quad m=d_2 \delta_2;$$

очевидно, что это то, что мы въ третьей главѣ обозначали черезъ $2^{\alpha-1}\Phi(m)$ (страница 154). Во вторыхъ полагаемъ

$$n'=-2^{\alpha'-1}d_2, \; 2^{\alpha-1}m=2^{\alpha'-1}d_2(\delta_2+2^{\alpha'-1}d_2).$$

Очевидно, что

$$2^{\alpha'-1}d_2<\sqrt{2^{\alpha-1}m};$$

а слѣдовательно $\Sigma 2^{\alpha'-1}d_2$ обозначаетъ сумму всѣхъ дѣлителей $n=2^{\alpha-1}m$, меньшихъ $\sqrt{n}$ и различной четности съ дополнительнымъ дѣлителемъ; назовемъ эту функцію черезъ $\Psi_1(n)$; тогда

$$F(4n-1^2)+F(4n-3^2)+F(4n-5^2)+\ldots=2^{\alpha-1}\Phi(m)-\Psi_1(n). \quad (66)$$

Равенство (66) есть прямое слѣдствіе основныхъ Кронекеровыхъ равенствъ, отмѣченныхъ нами въ предъидущей главѣ нумерами (49)—(56). Это равенство легко получается и непосредственно способомъ Эрмита, какъ это и сдѣлалъ Эрмитъ на 35 страницѣ седьмаго тома (2 серіи) журнала Ліувилля. Для этого должно сначала найти способомъ Фурье постоянный членъ произведенія двухъ рядовъ, изображающихъ

$$\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} \sin am \frac{2Kx}{\pi} \vartheta_3(x) \text{ и } \frac{2Kk}{\pi} \sin am \frac{2Kx}{\pi},$$

а потомъ тѣмъ же способомъ Фурье найти постоянный членъ произведенія двухъ рядовъ, изображающихъ

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2} \sin^2 am \frac{2Kx}{\pi} \text{ и } \vartheta_3(x).$$

Такая возможность выводить изъ формулъ Ліувилля формулы Кронекера не должна насъ удивлять. Легко видѣть дѣйствительно, что при выводѣ равенства (66) мы дѣлали съ нѣкоторыми формулами въ суммѣ то же, что сдѣлали бы съ ними для вывода Кронекерова тождества. Вообще, для вывода какого нибудь изъ

восьми Кронекеровыхъ равенствъ, мы отыскиваемъ двумя способами постоянный членъ произведенія эллиптической функціи 2-ой степени на Якобіеву функцію. Одинъ способъ состоитъ въ перемноженіи эллиптической функціи 2-й степени на Якобіеву функцію, другой—въ перемноженіи эллиптической функціи 1-ой степени на Эрмитовскій рядъ. Но такими же перемноженіями мы занимаемся и при выводѣ нѣкоторыхъ формулъ Ліувилля и получаемъ при этомъ равенства между тригонометрическими суммами; это— равенства между всякими коэффиціентами при одинаковыхъ степеняхъ q въ двухъ рядахъ, представляющихъ одну и ту же функцію; назовемъ ради краткости такое равенство *Ліувиллевскимъ тригонометрическимъ*. Функція, входящая въ это равенство, будетъ косинусъ. Итакъ въ Ліувиллевскомъ тригонометрическомъ равенствѣ мы имѣемъ равенство коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ q; въ Кронекеровой же формулѣ мы имѣемъ равенство коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ q въ постоянныхъ членахъ тѣхъ же двухъ произведеній, изъ которыхъ мы вывели Ліувиллевское тригонометрическое равенство; слѣдовательно Кронекерову формулу можно получить, если изъ Ліувиллевскаго тригонометрическаго равенства отобрать тѣ члены, въ которыхъ аргументъ косинуса равенъ нулю. Послѣднее можно сдѣлать нѣсколько болѣе сложнымъ способомъ: вывести сначала теорему о четной функціи $f(x)$ и въ этой теоремѣ положить $f(0)=1$ и $f(x)=0$ при x не равномъ нулю.

Очевидно, что всѣ Кронекеровы формулы, а также и формулы, подобныя Кронекеровымъ, выведутся изъ формулъ Ліувилля.

Примѣръ 8. Найдемъ теорему, содержащую какъ частныя формулы (49), (50) и (52) третьей главы. Страницы 148 — 153 подсказываютъ намъ, какіе ряды мы для этого должны взять.

Прежде всего перемножаемъ три слѣдующіе ряда:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\vartheta_2(x)k\,sinam\frac{2Kx}{\pi} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{n+\frac{3}{4}}\sum_{4n+3=d\delta} sin\,\frac{d+\delta}{2}x\right\},$$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2},$$

$$\frac{2Kk}{\pi}\sin am\frac{2Kx}{\pi}\cos x=2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{q^{n+\frac{1}{2}}\sum_{2n+1=d\delta}\left[\sin(d+1)x+\sin(d-1)x\right]\right\}.$$

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\sin^2 am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_2(x)\cos x$$

$$=2\sum\left\{q^{n^2+\frac{1}{4}d\delta+\frac{1}{2}d_1\delta_1}\sum\left[\cos\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1-1\right)x-\cos\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1+1\right)x\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1+1\right)x-\cos\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1-1\right)x\right]\right\}. \quad (67)$$

Перемножимъ теперь ряды:

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\sin^2 am\frac{2Kx}{\pi}=8\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^n\sum_{n=d(2\delta-1)}d(1-\cos 2dx)\right\},$$

$$\vartheta_2(x)\cos x=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{\frac{1}{4}(2n-1)^2}\left[\cos 2nx+\cos 2(n-1)x\right]\right\}.$$

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2}\sin^2 am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_2(x)\cos x$$

$$=8\sum\left\{q^{d(2\delta-1)+\frac{1}{4}(2n-1)^2}\sum d\left[\cos 2nx+\cos 2(n-1)x\right]\right\}$$

$$-4\sum\left\{q^{d(2\delta-1)+\frac{1}{4}(2n-1)^2}\sum d\left[\cos 2(n+d)x\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos 2(n-d)x+\cos 2(n+d-1)x+\cos 2(n-d-1)x\right]\right\}. \quad (68)$$

Сравнивая равенства (67) и (68) и разсуждая также, какъ въ предъидущихъ примѣрахъ, мы легко выводимъ слѣдующее равенство:

$$\sum\left\{f\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1-1\right)-f\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1+1\right)+f\left(\frac{d+\delta}{2}-d_1+1\right)\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{d+\delta}{2}+d_1-1\right)\right\}=4\Sigma d_2\{f(2n')+f(2n'-2)\}-2\Sigma d_2\{f(2n'+2d_2)$$

$$+f(2n'-2d_2)+f(2n'+2d_2-2)+f(2n'-2d_2-2)\},f(-x)=f(x). \quad (69)$$

Пусть N постоянное цѣлое положительное число. Первая сумма берется для всѣхъ рѣшеній уравненія

$$4n^2+d\delta+2d_1\delta_1=N, \qquad (69')$$

гдѣ n какое либо цѣлое число, d, δ, d_1 и δ_1 нечетныя положительныя числа, изъ которыхъ d и δ таковы, что $d+\delta$ дѣлится на 4; слѣдовательно N вида $4h+1$. Двѣ же другія суммы распространяются на всѣ рѣшенія уравненія

$$4d_2\delta_2+(2n'-1)^2=N=4h+1, \qquad (69'')$$

гдѣ δ_2 нечетное положительное число, d_2 и n' положительныя четныя или нечетныя числа.

Слѣдствіе. Положимъ, что $f(0)=1$, а $f(x)=0$ при x не равномъ нулю.

Въ первой суммѣ равенства (69) мы должны разсмотрѣть случаи:

$$d_1=\frac{d+\delta}{2}+1,\ d_1=\frac{d+\delta}{2}-1.$$

Пусть

$$\frac{d+\delta}{2}=2p,\ \left(\frac{d-\delta}{2}\right)^2=(2a-1)^2,$$

гдѣ a положительное цѣлое число, при чемъ $2a-1<2p$. Пусть $\delta_1=2b+1$; тогда изъ равенства (69′) легко выводимъ

для случая $d_1=2p+1$ $\quad h-n^2=p^2+p+b(2p+1)-a^2+a$,

для случая $d_1=2p-1$ $\quad h-n^2=p^2+p-1+b(2p-1)-a^2+a$.

Въ этихъ выраженіяхъ мы узнаемъ показатели въ равенствѣ (5) страницы 150; слѣдовательно въ первой части равенства (69) мы имѣемъ дѣло съ выраженіемъ:

$$4\{F(h)+2F(h-1^2)+2F(h-2^2)+2F(h-3^2)+\ldots\}+R,$$

гдѣ $F(h)$ есть то, что мы подъ нимъ подразумѣвали въ 3-ей главѣ, а R равенъ $-2\varphi(m)$, если $h=m$, нечетному числу, $-4\varphi(m)$, если $h=2m$, и 0, если h дѣлится на 4.

Во второй части равенства (69) должно разсмотрѣть слѣдующіе три случая:

$$n'=1,\ n'=d_2,\ n'=d_2+1.$$

1) $n'=1$; тогда $h=d_2\delta_2$, гдѣ δ_2 непремѣнно нечетно. Будемъ употреблять обозначенія главы 3-й (страница 154). Если h нечетно, то (m означаетъ нечетное число)

$$4\Sigma d_2=4\Phi(h)=4\Phi(m).$$

Если $h=4N+2=2m$, то

$$4\Sigma d_2=8\Phi(m).$$

Если $h=2^\alpha m$, гдѣ $\alpha>1$, то

$$4\Sigma d_2=2^{\alpha+2}\Phi(m)=8\left\{\Phi\left(\frac{h}{4}\right)+\mathrm{X}\left(\frac{h}{4}\right)\right\}.$$

Итакъ мы получаемъ совершенно то же, что въ началѣ страницы 154.

2) $n'=d_2$; тогда $h=d_2(d_2+\delta_2-1)$; слѣдовательно

$$-2\Sigma d_2 f(2n'-2d_2)$$

равняется минусъ двойной суммѣ дѣлителей h, не большихъ $\sqrt{h}$ и одинаковой четности съ дополнительнымъ дѣлителемъ.

3) $n'=d_2+1$; тогда $h=d_2(d_2+\delta_2+1)$. Слѣдовательно

$$-2\Sigma d_2 f(2n'-2d_2-2)$$

равняется минусъ двойной суммѣ дѣлителей h, меньшихъ $\sqrt{h}$ и одинаковой четности съ дополнительнымъ дѣлителемъ.

Легко теперь сообразить, что двѣ суммы, разобранныя подъ нумерами 2-ымъ и 3-имъ, дадутъ для случаевъ $h=m$ и $h=4n$ выраженія

$$-2\Phi(m)+2\Psi(m) \text{ и } -4\Phi(n)+4\Psi(n),$$

а для случая $h=2m$ нуль. Такимъ образомъ мы вывели вновь (11), (12) и (13) равенства § 29.

§ 52. До сихъ поръ мы разсматривали теоремы Ліувилля, относящіяся къ функціямъ четнымъ или нечетнымъ съ одною перемѣнною; Ліувилль далъ еще рядъ теоремъ совершенно такого же характера, какъ разсмотрѣнныя нами, но относящіяся къ функціямъ со многими перемѣнными. Теоремы о функціяхъ съ одною перемѣнною суть частные случаи подобныхъ же теоремъ для функцій со многими перемѣнными. Для вывода такихъ теоремъ со многими перемѣнными можно избрать четыре пути, изъ которыхъ три связаны съ теоріею эллиптическихъ функцій, а четвертый состоитъ изъ элементарныхъ алгебраическихъ соображеній, иногда очень сложныхъ. Наше дѣло разсмотрѣть только три первые способа.

Прежде всего теорія эллиптическихъ и Якобіевыхъ функцій содержитъ довольно большой рядъ равенствъ, заключающихъ нѣсколько перемѣнныхъ; это формулы сложенія аргументовъ, такъ называемыя формулы о пяти и двухъ буквахъ и тому подобныя формулы. Ясно, что такія равенства могутъ дать теоремы, подобныя разсмотрѣннымъ нами въ началѣ этой главы.

Дѣйствительно, такія равенства можно всегда замѣнить равенствомъ двухъ алгебраическихъ суммъ произведеній такихъ выраженій, которыя изображаются черезъ тригонометрическіе ряды; а потому мы легко получимъ равенство двухъ алгебраическихъ суммъ произведеній тригонометрическихъ рядовъ. (Понятно, иногда алгебраическая сумма будетъ состоять изъ одного слагаемаго, а также можетъ случиться, что одна изъ частей равенства будетъ нуль.) Отбирая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ модуля q, получимъ равенство между тригонометрическими функціями со многими перемѣнными. Это равенство иногда, если состоитъ изъ неоднородныхъ членовъ, распадается на нѣсколько равенствъ, которыя можно получить, замѣняя нѣкоторыя изъ перемѣнныхъ $u, v, t\ldots$ черезъ $-u, -v, -t, \ldots$ Напримѣръ, если въ рядъ входятъ и произведенія двухъ косинусовъ, и произведенія двухъ синусовъ, то равенство распадается на два равенства: въ одномъ

будутъ произведенія только косинусовъ, въ другомъ—произведенія только синусовъ.

Каждая аналитическая функція со многими перемѣнными между извѣстными предѣлами для перемѣнныхъ можетъ быть выражена въ видѣ тригонометрическаго ряда, если только не обращается въ безконечность и не претерпѣваетъ перерыва для значеній перемѣнныхъ, заключающихся между предѣлами. Для полученія такого ряда стоитъ измѣнять только одно перемѣнное, не измѣняя всѣхъ остальныхъ; тогда функція изобразится въ видѣ тригонометрическаго ряда, у котораго коэффиціенты будутъ нѣкоторыя функціи тѣхъ перемѣнныхъ, которыя мы на время не измѣняли. Измѣняя одно перемѣнное въ этихъ коэффиціентахъ при неизмѣненіи другихъ, мы въ свою очередь коэффиціенты представимъ въ видѣ тригонометрическихъ рядовъ, коэффиціенты которыхъ уже содержатъ на два перемѣнныхъ менѣе, чѣмъ данная функція. Продолжая такъ дѣйствовать, мы выразимъ функцію со многими перемѣнными въ видѣ вообще безконечной суммы, у которой члены суть произведенія синусовъ и косинусовъ отъ аргументовъ вида:

$$\frac{n\pi x}{h}, \quad \frac{n_1\pi y}{h_1}, \quad \frac{n_2\pi z}{h_2}, \ldots$$

гдѣ $x, y, z \ldots$ перемѣнныя данной функціи, $n, n_1, n_2 \ldots$ цѣлыя числа, измѣняющіяся отъ перехода отъ одного члена къ другому, $h, h_1, h_2 \ldots$ обозначаютъ вмѣстѣ съ $-h, -h_1, -h_2 \ldots$ предѣлы, между которыми данная функція равна тригонометрическому ряду.

Мы получили выше равенство для нѣкоторыхъ тригонометрическихъ функцій съ перемѣнными $u, v, t \ldots$ [1]); эти равенства состоятъ изъ однородныхъ тригонометрическихъ произведеній, т. е., напримѣръ, перемѣнная u во всѣхъ членахъ входитъ аргументомъ косинусовъ, перемѣнная v во всѣхъ членахъ—аргументомъ синусовъ и т. д. Подставляемъ вмѣсто u послѣдовательно $\frac{\pi}{h}$, $\frac{2\pi}{h}$, $\frac{3\pi}{h} \ldots$, вмѣсто v послѣдовательно $\frac{\pi}{h_1}$, $\frac{2\pi}{h_1}$, $\frac{3\pi}{h_1} \ldots$ и т. д.;

[1]) Иногда будемъ имѣть нѣсколько равенствъ одного характера; см. 11 примѣръ.

получимъ рядъ новыхъ равенствъ. Назовемъ собраніе этихъ равенствъ черезъ (A). Въ рядѣ, выражающемъ функцію, замѣняемъ $x, y, z \dots$ такими цѣлыми числами, чтобы аргументы тригонометрическихъ функцій въ этомъ рядѣ были тождественны съ аргументами, встрѣчающимися въ (A) (предполагается конечно, что тригонометрическія функціи въ рядѣ тѣ же, что и въ выведенной уже тригонометрической теоремѣ); такую подстановку придется сдѣлать нѣсколько разъ. Получимъ нѣсколько равенствъ; назовемъ собраніе этихъ равенствъ черезъ (B). Обѣ части равенствъ (A) умножимъ на коэффиціенты, общіе всѣмъ рядамъ (B), и сложимъ; получимъ равенство (C); это равенство (C), состоящее изъ тригонометрическихъ рядовъ, изобразимъ такъ, чтобы во второй его части стоялъ нуль. Обѣ части равенствъ (B) умножаемъ на коэффиціенты, общіе равенствамъ (A), и складываемъ; получимъ равенство (D), вторая часть котораго обращается на основаніи равенства (C) въ нуль. Первая же часть равенства (D) содержитъ функцію общаго вида; а потому эта первая часть, приравненная нулю, даетъ теорему Ліувилля. Аргументы функцій въ этой теоремѣ цѣлыя числа; поэтому теорема распространяется и на числовыя функціи, и на такія аналитическія, которыя при нецѣлыхъ значеніяхъ аргумента (или при такихъ цѣлыхъ значеніяхъ аргумента, которыя не входятъ въ разсматриваемое нами равенство) обращаются въ безконечность, или прерываются, или неопредѣленны.

Другой способъ вывода теоремъ Ліувилля состоитъ въ томъ, что функціи, изучаемыя въ теоріи эллиптическихъ функцій, употребляются только для вывода такихъ теоремъ съ одною перемѣнною, которыя суть частные случаи нѣкоторыхъ теоремъ Ліувилля [1]) со многими перемѣнными. При выводѣ теоремы Ліувилля съ функціями одной перемѣнной получается равенство между суммами косинусовъ или синусовъ; эти косинусы или синусы должны взаимно уничтожаться, ибо содержатъ неопредѣленное x. Аргументы у такихъ сокращающихся членовъ должны или быть равными, или

[1]) Въ этомъ параграфѣ, а также во многихъ другихъ мѣстахъ, подъ названіемъ теоремъ Ліувилля подразумѣваются не только тѣ теоремы, которыя были выведены Ліувиллемъ, но всѣ вообще теоремы извѣстнаго характера.

имѣть абсолютныя величины равныя, но знаки обратные. Но аргументы состоятъ изъ x, умноженнаго на линейныя функціи рѣшеній нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ уравненій 2-ой степени; такимъ образомъ мы имѣемъ линейныя равенства, связывающія или различныя рѣшенія одного и того же неопредѣленнаго уравненія 2-ой степени, или рѣшенія двухъ различныхъ уравненій 2-ой степени. Но можетъ оказаться, что рѣшенія этихъ неопредѣленныхъ уравненій 2-й степени при извѣстной группировкѣ могутъ быть связаны еще другими линейными равенствами, кромѣ тѣхъ, которыя слѣдуютъ изъ выведеннаго тригонометрическаго равенства. Эти новыя линейныя равенства дадутъ аргументы тригонометрическихъ функцій, на которыя можно умножить сокращающіеся члены. Итакъ прежде мы имѣли суммы между косинусами и синусами съ однимъ неопредѣленнымъ x; теперь, умножая сокращающіеся члены, получимъ суммы между произведеніями косинусовъ и синусовъ, при чемъ къ x присоединятся новыя неопредѣленныя y, z, t....; въ обоихъ случаяхъ суммы распространяются на всѣ рѣшенія извѣстнаго характера тѣхъ же неопредѣленныхъ уравненій 2-й степени.

Дальнѣйшій путь вывода тождественъ съ тѣмъ, который описанъ при изложеніи перваго способа.

Очевидно, этотъ второй способъ можно различнымъ образомъ видоизмѣнять. Такъ, можетъ случиться, что имѣются уже равенства съ 2, 3 и т. д. перемѣнными и изъ нихъ выводятся равенства съ еще большимъ числомъ перемѣнныхъ. Понятно, способъ вывода остается тотъ же.

Вообще равенства, данныя Ліувиллемъ и относящіяся до общихъ свойствъ функцій, состоятъ изъ суммъ функцій съ одною или многими перемѣнными; эти суммы распространяются на различныя рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій 2-ой степени; сущность этихъ теоремъ состоитъ въ томъ, что или между различными рѣшеніями одного и того же уравненія 2-ой степени, или между рѣшеніями двухъ неопредѣленныхъ уравненій существуютъ линейныя соотношенія. Въ большинствѣ этихъ теоремъ линейныхъ соотношеній столько, что извѣстная система рѣшеній неопредѣленнаго уравненія 2-й степени вполнѣ опредѣляется или черезъ другую систему рѣшеній того же уравненія, или черезъ нѣкоторую систему

рѣшеній другаго уравненія 2-й степени. Послѣ этого ясно, что легко было бы въ выводѣ такихъ теоремъ совсѣмъ устранить употребленіе теоріи эллиптическихъ функцій; но эта теорія или упрощаетъ доказательства, или помогаетъ открывать новыя теоремы, о которыхъ иначе трудно было бы догадаться.

Наконецъ третій способъ вывода теоремъ Ліувилля имѣетъ только то отношеніе къ функціямъ, изучаемымъ теоріею эллиптическихъ функцій, что ряды, играющіе роль въ такихъ выводахъ, заключаютъ, какъ частные случаи, ряды теоріи эллиптическихъ функцій. Эти новые ряды опять тригонометрическіе, содержатъ также неопредѣленное q; но степени q умножаются на тригонометрическія функціи отъ нѣсколькихъ неопредѣленныхъ и ихъ кратныхъ (напримѣръ, члены имѣютъ видъ $q^m cos\, m_1 y \,cos\, m_2 x$, гдѣ y и x неопредѣленныя). Еще большую связь этотъ способъ имѣетъ съ теоріею эллиптическихъ функцій вслѣдствіе слѣдующаго обстоятельства. Для преобразованія рядовъ, изучаемыхъ въ теоріи эллиптическихъ функцій, въ другіе могутъ употребляться разныя алгебраическія вычисленія; тѣ же алгебраическія вычисленія съ небольшими измѣненіями могутъ быть повторены и въ томъ случаѣ, когда введемъ въ ряды, слѣдуя опредѣленному закону, нѣкоторыя тригонометрическія функціи отъ новыхъ перемѣнныхъ; такое усложненіе рядовъ можетъ иногда даже повести къ упрощенію вычисленій.

Для ясности всего изложеннаго въ этомъ параграфѣ мы считаемъ не лишнимъ привести семь примѣровъ. Въ двухъ изъ этихъ примѣровъ употребленъ первый способъ вывода, въ двухъ другихъ—второй способъ вывода, въ трехъ остальныхъ—третій способъ; третій способъ вывода употребленъ еще въ началѣ одного изъ примѣровъ, конецъ котораго рѣшенъ вторымъ способомъ.

§ 53. Примѣръ 9. Изъ формулъ сложенія аргументовъ эллиптическихъ функцій выводятся слѣдующія двѣ формулы, которыя можно найти на 113 страницѣ 2-го изданія учебника Дюрежа:

$$sin\, am \frac{2K(x+y)}{\pi} + sin\, am \frac{2K(x-y)}{\pi}$$

$$= \frac{2 sin\, am \frac{2Kx}{\pi} cos\, am \frac{2Ky}{\pi} \Delta\, am \frac{2Ky}{\pi}}{1 - k^2 sin^2 am \frac{2Kx}{\pi} sin^2 am \frac{2Ky}{\pi}},$$

$$sin\ am\frac{2K(x+y)}{\pi}-sin\ am\frac{2K(x-y)}{\pi}$$

$$=\frac{2sin\ am\frac{2Ky}{\pi}\ cos\ am\frac{2Kx}{\pi}\ \Delta\ am\frac{2Kx}{\pi}}{1-k^2sin^2am\frac{2Kx}{\pi}\ sin^2am\frac{2Ky}{\pi}}.$$

Изъ этихъ равенствъ выводимъ

$$\frac{16K^4k^3}{\pi^4}\left\{sn\frac{2K}{\pi}(x+y)+sn\frac{2K}{\pi}(x-y)\right\}sn\frac{2Ky}{\pi}cs\frac{2Kx}{\pi}\Delta\frac{2Kx}{\pi}$$

$$=\frac{16K^4k^3}{\pi^4}\left\{sn\frac{2K}{\pi}(x+y)-sn\frac{2K}{\pi}(x-y)\right\}sn\frac{2Kx}{\pi}cs\frac{2Ky}{\pi}\Delta\frac{2Ky}{\pi}. \quad (70)$$

Вторая часть равенства получается изъ первой перемѣною x въ y и y въ x.

Воспользуемся теперь равенствомъ (1) и другимъ равенствомъ, получаемымъ дифференцированіемъ (1):

$$\frac{4K^2k}{\pi^2}cos\ am\frac{2Kx}{\pi}\Delta\ am\frac{2Kx}{\pi}=4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{n-\frac{1}{2}}\sum_{2n-1=d\delta}d\ cos\ dx\right\}. \quad (71)$$

Вмѣсто равенства (70) получаемъ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{n-\frac{1}{2}}\Sigma d''[sin\ d(x+y)+sin\ d(x-y)]sin\ d'y\ cos\ d''x\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^{n-\frac{1}{2}}\Sigma d''[sin\ d(x+y)-sin\ d(x-y)]sin\ d'x\ cos\ d''y\right\}.$$

Внутреннія суммы берутся такъ: нѣкоторое нечетное, положительное число разлагается всячески на сумму трехъ нечетныхъ чиселъ; а каждое изъ этихъ нечетныхъ чиселъ разлагается на два положительные множителя: d и δ, d' и δ', d'' и δ''; суммы берутся для всѣхъ чиселъ d, d' и d'', такимъ образомъ полученныхъ.

Сравненіе коэффиціентовъ у одинаковыхъ степеней q въ послѣднемъ равенствѣ даетъ

$$\Sigma d'' \sin dx \cos dy \sin d'y \cos d''x = \Sigma d'' \sin dy \cos dx \sin d'x \cos d''y. \quad (72)$$

Равенство (72) можно представить иначе такъ:

$$\Sigma d'' \{\sin(d+d'')x + \sin(d-d'')x\} \{\sin(d+d')y - \sin(d-d')y\}$$

$$= \Sigma d'' \{\sin(d+d')x - \sin(d-d')x\} \{\sin(d+d'')y + \sin(d-d'')y\}. \quad (72')$$

Возьмемъ теперь нѣкоторую функцію двухъ перемѣнныхъ $F(x,y)$, нечетную относительно x и y, т. е. такую, что

$$F(0,y)=0, \quad F(x,0)=0, \quad F(-x,y)=-F(x,y), \quad F(x,-y)=-F(x,y).$$

Пусть эта функція непрерывна и не обращается въ безконечность между предѣлами для x: $-h$ и $+h$, а для y между $-g$ и $+g$; тогда разсужденія, о которыхъ говорится на страницѣ 245, убѣдятъ насъ, что $F(x,y)$ можно выразить въ видѣ двойной безконечной суммы такъ:

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{n,p} \sin\frac{n\pi x}{h} \sin\frac{p\pi y}{g}. \quad (73)$$

Намъ не за чѣмъ опредѣлять коэффиціенты $A_{n,p}$.

Въ равенствѣ (72') полагаемъ $x=\frac{n\pi}{h}$ и $y=\frac{p\pi}{g}$, при чемъ n и p получаютъ всевозможныя цѣлыя значенія отъ 1 до ∞; потомъ умножаемъ обѣ части равенства на $A_{n,p}$ и суммируемъ по n и p между предѣлами 1 и ∞. Въ равенствѣ же (73) подставляемъ вмѣсто x и y слѣдующія восемь системъ величинъ:

1) $x=d+d''$, $y=d+d'$; 2) $x=d-d''$, $y=d+d'$;
3) $x=d+d''$, $y=d-d'$; 4) $x=d-d''$, $y=d-d'$;
5) $x=d+d'$, $y=d+d''$; 6) $x=d+d'$, $y=d-d''$;
7) $x=d-d'$, $y=d+d''$; 8) $x=d-d'$, $y=d-d''$;

при этомъ d, d' и d'' послѣдовательно придаемъ всѣ тѣ значенія, которыя онѣ имѣютъ въ равенствѣ (72). Очевидно, такимъ образомъ получимъ формулу:

$$\sum_{2n-1=d\delta+d'\delta'+d''\delta''} d''\{F(d+d'',\ d+d')+F(d-d'',\ d+d')-F(d+d'',\ d-d')$$

$$-F(d-d'',\ d-d')\}=\sum_{2n-1=d\delta+d'\delta'+d''\delta''} d''\{F(d+d',\ d+d'')+F(d+d',\ d-d'')$$

$$-F(d-d',\ d+d'')-F(d-d',\ d-d'')\}. \qquad (74)$$

Равенство (74) дано Ліувиллемъ на страницѣ 335 тома 3-го журнала, издававшагося имъ въ то время (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2 série). Въ томѣ 3-мъ Ліувилль помѣстилъ шесть статей, относящихся къ предмету этой главы; формула (74) находится въ шестой статьѣ.

Примѣръ 10. Воспользуемся извѣстною формулою

$$cos\ am(u+v)=cos\ amu\ cos\ amv-sin\ amu\ sin\ amv\ \Delta\ am(u+v),$$

$$u=\frac{2Kx}{\pi},\ v=\frac{2Ky}{\pi}$$

для вывода двухъ ариѳметическихъ теоремъ. Для этого умножимъ обѣ части равенства на $\frac{8K^3k^2}{\pi^3}$. Пользуясь формулами (1), (2), (3) этой главы и (4) формулою 1-ой главы, а также замѣтивъ, что

$$\frac{4K^2k}{\pi^2}=4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2r-1)\sqrt{q^{2r-1}}}{1-q^{2r-1}}=4\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\sqrt{q^{2r-1}}\sum_{2r-1=d\delta} d\ \right\}$$

(формула эта получится изъ (4) этой главы, если положить $x=\frac{\pi}{2}$ и замѣнить q черезъ $\sqrt{q}$), легко выводимъ формулу:

$$\sum_{2n=d\delta+d'\delta'}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d'\cos d(x+y)=\sum_{2n=d\delta+d'\delta'}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{\delta'-1}{2}}\cos dx\cos d'y$$

$$+4\sum_{2n=d\delta+d'\delta'+2d''\delta''}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{\delta'-1}{2}+\frac{\delta''-1}{2}}\cos dx\cos d'y-\sum_{2n=d\delta+d'\delta'}\sin dx\sin d'y$$

$$-4\sum_{2n=d\delta+d'\delta'+2d''\delta''}(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\sin dx\sin d'y\cos 2d''(x+y).$$

Въ послѣдней формулѣ d, δ, d', δ' и δ'' нечетныя положительныя числа, а n и d'' какія нибудь цѣлыя положительныя числа; n постоянное число.

Мѣняя знакъ у x, получимъ другое подобное же равенство. Складывая и вычитая оба равенства, получимъ послѣ нѣкоторыхъ простыхъ дѣйствій, переходя отъ тригонометрическихъ функцій къ произвольнымъ такъ, какъ это показано въ 9-омъ примѣрѣ,

$$\sum_{2n=d\delta+d'\delta'}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left\{d'f(d,d)-(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}}f(d,d')\right\}$$

$$=4\sum_{2n=d\delta+d'\delta'+2d''\delta''}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}+\frac{\delta'-1}{2}+\frac{\delta''-1}{2}}f(d,d')+\sum_{2n=d\delta+d'\delta'+2d''\delta''}(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\{f(d-2d'',d'-2d'')$$

$$-f(d-2d'',d'+2d'')-f(d+2d'',d'-2d'')+f(d+2d'',d'+2d'')\}, \quad (75)$$

$$\sum_{2n=d\delta+d'\delta'}\left\{(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d'f_1(d,d)-f_1(d,d')\right\}$$

$$=\sum_{2n=d\delta+d'\delta'+2d''\delta''}(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\{f_1(d-2d'',d'-2d'')+f_1(d-2d'',d'+2d'')$$

$$+f_1(d+2d'',d'-2d'')+f_1(d+2d'',d'+2d'')\}. \quad (76)$$

Въ равенствахъ (75) и (76) функціи $f(x,y)$ и $f_1(x,y)$ обладаютъ слѣдующими свойствами:

$$f(-x,y)=f(x,y),\ f(x,-y)=f(x,y);$$
$$f_1(-x,y)=-f_1(x,y),\ f_1(x,-y)=-f_1(x,y).$$

§ 54. Примѣръ 11. На страницѣ 235 мы вывели формулу (60):

$$2\Sigma sin(d'+2n')x=\Sigma sin\frac{d+\delta}{2}x, \quad (77)$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ нечетныя положительныя значенія d', δ' и на всякія цѣлыя значенія n', удовлетворяющія уравненію

$$2n+1=2n'^2+d'\delta'; \qquad (77')$$

n постоянное. Вторая сумма распространяется на всѣ нечетныя положительныя значенія d и δ и на всякое положительное или отрицательное нечетное m, удовлетворяющія уравненію

$$4n+2=m^2+d\delta. \qquad (77'')$$

Вторая сумма равенства (77) отличается отъ первой тѣмъ, что во второй суммѣ множитель икса непремѣнно положителенъ, а въ первой этотъ множитель или положителенъ, или отрицателенъ; поэтому члены второй суммы не могутъ сокращаться другъ съ другомъ, а каждый синусъ второй суммы сократится съ какимъ нибудь синусомъ первой суммы. Итакъ для всякаго $\frac{d+\delta}{2}$ мы имѣемъ соотвѣтствующее $d'+2n'$, такое, что

$$\frac{d+\delta}{2}=d'+2n'. \qquad (78)$$

Возьмемъ еще равенство (57):

$$2\Sigma(-1)^{\frac{d'-1}{2}}cos(d'-2n')x=\Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}cos\, mx; \qquad (79)$$

суммы въ этомъ равенствѣ подчиняются тому же закону, что въ равенствѣ (77). Равенство (79) показываетъ, что для нѣкоторыхъ значеній m, d' и n' должно существовать равенство $m=d'-2n'$ или $\delta'-2n'$, для нѣкоторыхъ другихъ $m=-d'+2n'$ или $-\delta'+2n'$.

Положимъ, что

$$m=\pm(\delta'-2n'),\ \frac{d+\delta}{2}=d'+2n';$$

тогда имѣемъ

$$4n+2=m^2+d\delta=(\delta'-2n')^2+(d'+2n')^2-\left(\frac{d-\delta}{2}\right)^2$$

$$=\delta'^2+d'^2-4n'\delta'+4n'd'+8n'^2-\left(\frac{d-\delta}{2}\right)^2.$$

Легко теперь вычислить, что для полученія изъ предъидущаго равенства формулы (77′) должно положить

$$\left(\frac{d-\delta}{2}\right)^2=(2n'+d'-\delta')^2.$$

Предъидущія разсужденія дадутъ намъ тѣ линейныя равенства, посредствомъ которыхъ можно отъ уравненія (77″) перейти къ уравненію (77′). Разсмотримъ внимательнѣе эти линейныя соотношенія. Возьмемъ сначала систему:

$$d'+2n'=\frac{d+\delta}{2},\ m=\delta'-2n',\ 2n'+d'-\delta'=\frac{d-\delta}{2}. \quad (80)$$

Разрѣшимъ уравненія (80) сначала относительно d, δ и m, а потомъ относительно d', δ' и n':

$$d=4n'+2d'-\delta',\ \delta=\delta',\ m=\delta'-2n'; \quad (81)$$

$$\delta=\delta',\ 2n'=\delta-m,\ d'=m+\frac{d-\delta}{2}. \quad (82)$$

Равенства (81) показываютъ, что каждымъ d', δ' и n' найдутся соотвѣтственныя d, δ и m, если только

$$4n'+2d'-\delta'>0. \quad (83)$$

Равенства (82) показываютъ, что отъ уравненія (77′) можно перейти къ уравненію (77″), если только $m+\frac{d-\delta}{2}$ положительно, ибо $\frac{d-\delta}{2}$ непремѣнно четно.

Но если $m+\frac{d-\delta}{2}$ отрицательно, то беремъ

$$d'+2n'=\frac{d+\delta}{2},\ m=-\delta'+2n',\ \frac{d-\delta}{2}=-2n'-d'+\delta'; \quad (84)$$

$$d=\delta',\ m=2n'-\delta',\ \delta=4n'+2d'-\delta'; \quad (85)$$

$$\delta'=d,\ 2n'=m+d,\ d'=-m-\frac{d-\delta}{2}. \quad (86)$$

Равенства (85) и (86) показываютъ, что единственный случай, когда мы не имѣемъ линейной связи между рѣшеніями уравненій (77′) и (77″), будетъ тогда, когда

$$4n'+2d'-\delta'<0. \qquad (87)$$

Ограничивающее условіе (87) существуетъ только для перехода отъ (77″) къ (77′), но не для перехода отъ (77′) къ (77″); т.-е., какъ мы отчасти предвидѣли, для всякаго m, d и δ существуютъ соотвѣтственныя n', d' и δ', но не для всякаго n', d' и δ' существуютъ соотвѣтственныя m, d и δ.

При условіи (87) члены первыхъ суммъ равенствъ (77) и (79) (въ (79) лучше d' замѣнить черезъ δ') должны сокращаться съ другими членами тѣхъ же суммъ. Пусть d', δ', n' и d_1', δ_1' и n_1' два рѣшенія уравненія (77′). Возьмемъ симметричныя равенства:

$$d'+2n'=-d_1'-2n_1',\ \delta'-2n'=\delta_1'-2n_1',$$
$$2n'+d'-\delta'=2n_1'+d_1'-\delta_1'. \qquad (88)$$

Замѣтимъ, что послѣднее равенство получится изъ уравненія

$$2x^2+(2x+\delta_1'-2n_1')(-2x-d_1'-2n_1')=2n_1'^2+d_1'\delta_1',$$

если изъ него опредѣлить x и приравнять n' одному изъ полученныхъ корней. Изъ (88) имѣемъ

$$d_1'=d',\ 2n_1'=-2n'-2d',\ \delta_1'=-4n'-2d'+\delta'. \qquad (89)$$

Изъ равенствъ (89) видимъ, что равенства (88) всегда возможны, если только

$$4n'+2d'-\delta'<0,\ 4n_1'+2d_1'-\delta_1'<0;$$

отсюда заключаемъ, что (88)—именно тѣ равенства, которыя мы искали и которыя опредѣляютъ однообразно тѣ пары членовъ первыхъ суммъ равенствъ (77) и (79), которыя взаимно уничтожаются, ибо легко убѣдиться, что члены будутъ абсолютно равны, но съ обратными знаками.

Изъ равенствъ (80), (84) и (88) убѣждаемся, что каждый членъ первой суммы (77) можно помножить на тригонометрическія функціи перемѣнныхъ $(\delta'-2n')y$ и $(2n'+d'-\delta')z$, а каждый членъ второй суммы на такія же функціи аргументовъ my и $\frac{d-\delta}{2}z$. Однако же такіе множители должны обладать тѣмъ свойствомъ, что они не мѣняютъ знаки при одновременномъ измѣненіи знаковъ у y и z. Такіе множители суть

$$1)\ \cos(\delta'-2n')y\quad \cos(2n'+d'-\delta')z,\quad \cos my \cos\frac{d-\delta}{2}z,$$

$$2)\ \sin(\delta'-2n')y\quad \sin(2n'+d'-\delta')z,\quad \sin my \sin\frac{d-\delta}{2}z.$$

Такимъ образомъ равенство (77) можемъ замѣнить двумя слѣдующими равенствами:

$$2\Sigma \sin(d'+2n')x \cos(\delta'-2n')y \cos(2n'+d'-\delta')z$$

$$=\Sigma \sin\frac{d+\delta}{2}x \cos my \cos\frac{d-\delta}{2}z, \qquad (90)$$

$$2\Sigma \sin(d'+2n')x \sin(\delta'-2n')y \sin(2n'+d'-\delta')z$$

$$=\Sigma \sin\frac{d+\delta}{2}x \sin my \sin\frac{d-\delta}{2}z. \qquad (91)$$

Считаемъ совершенно излишнимъ повторять, какимъ образомъ изъ формулъ (90) и (91) выводится формула:

$$2\Sigma f(d'+2n',\ \delta'-2n',\ 2n'+d'-\delta')=\Sigma f\left(\frac{d+\delta}{2},\ m,\ \frac{d-\delta}{2}\right), \qquad (92)$$

гдѣ $f(x, y, z)$ аналитическая или числовая функція, опредѣленная и конечная для всѣхъ цѣлыхъ значеній x, y и z, которыя входятъ въ формулу (92); эта функція удовлетворяетъ условіямъ:

$$f(-x, y, z)=-f(x, y, z),\quad f(x, -y, -z)=f(x, y, z). \qquad (92')$$

Равенство (92) дано Ліувиллемъ на страницѣ 42 тома 7-аго Journal de Mathématiques pures et appliquées, въ его отвѣтѣ Эрмиту (2 серія журнала).

§ 55. Примѣръ 12. Въ теоріи эллиптическихъ функцій извѣстенъ очень элементарный способъ Якоби, съ помощію котораго отъ равенства (1) этой главы переходятъ къ равенству (4). Эти простыя вычисленія можно повторить съ другими болѣе сложными рядами слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} A&=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{e^{yi}\sqrt{q^{2r-1}}}{1-q^{2r-1}e^{2yi}}+\frac{e^{-yi}\sqrt{q^{2r-1}}}{1-q^{2r-1}e^{-2yi}}\right\}\sin(2r-1)x,\\ B&=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{e^{yi}\sqrt{q^{2r-1}}}{1-q^{2r-1}e^{2yi}}-\frac{e^{-yi}\sqrt{q^{2r-1}}}{1-q^{2r-1}e^{-2yi}}\right\}\cos(2r-1)x. \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

Опредѣлимъ A^2+B^2. При опредѣленіи получатся трехъ родовъ члены, которые группируемъ въ три суммы, при чемъ черезъ d и d' называемъ нечетныя положительныя числа:

1) $$\sum_d\sum_{d'}\frac{e^{2yi}\sqrt{q^{d+d'}}}{(1-q^d e^{2yi})(1-q^{d'}e^{2yi})}(\sin dx \sin d'x+\cos dx \cos d'x)$$

$$=\sum_d\sum_{d'}\frac{e^{2yi}\sqrt{q^{d+d'}}}{(1-q^d e^{2yi})(1-q^{d'}e^{2yi})}\cos(d-d')x,$$

2) $$\sum_d\sum_{d'}\frac{e^{-2yi}\sqrt{q^{d+d'}}}{(1-q^d e^{-2yi})(1-q^{d'}e^{-2yi})}\cos(d-d')x,$$

3) $$-2\sum_d\sum_{d'}\frac{\sqrt{q^{d+d'}}}{(1-q^d e^{2yi})(1-q^{d'}e^{-2yi})}\cos(d+d')x.$$

$d+d'$ и $d-d'$ четны; отберемъ же всѣ члены съ $\cos 2nx$. Первая сумма даетъ коэффиціентъ при $\cos 2nx$:

$$2q^n e^{2yi}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{q^d}{(1-q^d e^{2yi})(1-q^{2n+d}e^{2yi})}$$

$$=\frac{2q^n e^{2yi}}{1-q^{2n}}\sum_{d=1}^{\infty}\left[\frac{q^d}{1-q^d e^{2yi}}-\frac{q^{2n+d}}{1-q^{2n+d}e^{2yi}}\right]$$

$$=\frac{2q^n e^{2yi}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}e^{2yi}}. \qquad (94)$$

Вторая сумма даетъ

$$\frac{2q^n e^{-2yi}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}e^{-2yi}}. \tag{95}$$

Третья сумма даетъ конечную сумму:

$$-\sum_{r=1}^{r=n}\frac{2q^n}{(1-q^{2r-1}e^{2yi})(1-q^{2n-2r+1}e^{-2yi})}$$

$$=-\frac{2q^n}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\left[1+\frac{q^{2r-1}e^{2yi}}{1-q^{2r-1}e^{2yi}}+\frac{q^{2r-1}e^{-2yi}}{1-q^{2r-1}e^{-2yi}}\right]=-\frac{2nq^n}{1-q^{2n}}$$

$$-\frac{2q^n e^{2yi}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}e^{2yi}}-\frac{2q^n e^{-2yi}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}e^{-2yi}}. \tag{96}$$

Сопоставляя равенства (94), (95) и (96), видимъ, что коэффиціентъ при $cos 2nx$, если n не нуль, есть

$$-\frac{2nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Если же n нуль, то третьей суммы не будетъ.

Такимъ образомъ можемъ написать

$$A^2+B^2=2f(y)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}cos 2nx, \tag{97}$$

$$f(y)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{2r-1}e^{2yi}}{(1-q^{2r-1}e^{2yi})^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{q^{2r-1}e^{-2yi}}{(1-q^{2r-1}e^{-2yi})^2}. \tag{97'}$$

A, B и A^2+B^2 можно представить въ иномъ видѣ:

$$A=2\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\sqrt{q^{2r-1}}\sum_{2r-1=d\delta}cos\,\delta y\ sin\,dx\right\}, \tag{98}$$

$$B=2i\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\sqrt{q^{2r-1}}\sum_{2r-1=d\delta}\sin\delta y\cos dx\right\};\tag{98}$$

$$A^2+B^2=4\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^n\sum_{2n=d\delta+d'\delta'}\left[\cos\delta y\cos\delta' y\sin dx\sin d'x\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\delta y\sin\delta' y\cos dx\cos d'x\right]\right\}.\tag{99}$$

Замѣна x черезъ y и y черезъ x измѣняетъ въ (99) только знакъ; а потому

$$f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\cos 2ny.$$

Итакъ имѣемъ тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{q^n\sum_{2n=d\delta+d'\delta'}\left[\cos(d-d')x\cos(\delta+\delta')y-\cos(d+d')x\cos(\delta-\delta')y\right]\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left\{\cos 2ny-\cos 2nx\right\}.\tag{100}$$

Пусть $n=2^\alpha m$, гдѣ m нечетно, а $\alpha=0, 1, 2, 3\ldots$ Тогда коэффиціентъ при q^n во второй части равенства (100), очевидно, представится такъ:

$$2^\alpha\sum_{m=d\delta}d\left\{\cos 2^{\alpha+1}dy-\cos 2^{\alpha+1}dx\right\}.$$

Поэтому имѣемъ равенство:

$$\sum_{2n=d'\delta'+d''\delta''}\left\{\cos(d'-d'')x\cos(\delta'+\delta'')y-\cos(d'+d'')x\cos(\delta'-\delta'')y\right\}$$

$$=2^\alpha\sum_{m=d\delta}d(\cos 2^{\alpha+1}dy-\cos 2^{\alpha+1}dx).\tag{101}$$

Теорема. *Если m, d, δ, d', δ', d'', δ'' нечетныя положительныя числа, а α цѣлое, не отрицательное число, если $f(x, y)$ есть функція конечная и опредѣленная для всѣхъ разсматриваемыхъ нами цѣлыхъ значеній x и y, если эта функція удовлетворяетъ условіямъ:*

$$f(-x, y)=f(x,-y)=f(-x,-y)=f(x, y),$$

то существуетъ равенство:

$$\Sigma\{f(d'-d'', \delta'+\delta'')-f(d'+d'', \delta'-\delta'')\}$$
$$=2^\alpha\Sigma d\{f(0,2^{\alpha+1}d)-f(2^{\alpha+1}d,0)\}, \tag{102}$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ рѣшенія d', δ', d'', δ'' при данномъ m уравненія

$$2^{\alpha+1}m=d'\delta'+d''\delta'', \tag{102'}$$

а вторая сумма на всѣ рѣшенія d и δ уравненія

$$m=d\delta. \tag{102''}$$

Это равенство (102) содержитъ въ себѣ два равенства, данныя Ліувиллемъ на страницахъ 151 и 199 третьяго тома Journal de Mathématiques pures et appliquées (2 серія); оно составляетъ предметъ двухъ статей Ліувилля, 1-ой и 2-й.

Примѣръ 13. Считаю не лишнимъ указать на другой, очень простой примѣръ обобщенія выводовъ, встрѣчающихся въ теоріи эллиптическихъ функцій. На этотъ разъ это обобщеніе будетъ касаться вывода Эрмитовскаго ряда. Это обобщеніе дастъ намъ нѣсколько очень интересныхъ теоремъ. Дѣло въ томъ, что особенность характера Эрмитовскаго ряда зависитъ отъ того, что при перемноженіи двухъ рядовъ выдѣляется множителемъ нѣкоторое частное значеніе Якобіевой функціи; оказывается, что такой же множитель является и при замѣнѣ двухъ рядовъ нѣкоторыми болѣе общими рядами, но этотъ общій множитель не есть уже частное значеніе Якобіевой функціи, а та же функція съ неопредѣленнымъ аргументомъ.

Означая черезъ m нѣкоторое нечетное число, помножимъ рядъ A формулъ (93) или (98) на

$$C=2\sum_{m=1}^{\infty}q^{\frac{1}{4}m^2}\cos mx\cos my=\sum_{m=1}^{\infty}q^{\frac{1}{4}m^2}\cos mx(e^{myi}+e^{-myi}), \quad (103)$$

рядъ же B тѣхъ же формулъ на

$$D=2i\sum_{m=1}^{\infty}q^{\frac{1}{4}m^2}\sin mx\sin my=\sum_{m=1}^{\infty}q^{\frac{1}{4}m^2}\sin mx(e^{myi}-e^{-myi}). \quad (104)$$

Будемъ перемноженіе дѣлать двумя способами и будемъ опредѣлять величину $AC-BD$.

Первымъ способомъ получаемъ

$$AC-BD=2\sum_{g=0}^{\infty}\left\{q^{g+\frac{3}{4}}\sum\sin(d+m)x\cos(\delta-m)y\right\}, \quad (105)$$

гдѣ вторая сумма распространяется на всѣ такія рѣшенія уравненія

$$m^2+2d\delta=4g+3, \quad (105')$$

для которыхъ d и δ нечетны и положительны, а m нечетенъ, положителенъ или отрицателенъ.

При опредѣленіи $AC-BD$ другимъ способомъ мы будемъ шагъ за шагомъ слѣдовать выводамъ страницы 149.

$$AC-BD$$

$$=\sum\sum q^{\frac{1}{4}m^2}\sin(2r-1-m)x\left\{\frac{\sqrt{q^{2r-1}}e^{(m+1)yi}}{1-q^{2r-1}e^{2yi}}+\frac{\sqrt{q^{2r-1}}e^{-(m+1)yi}}{1-q^{2r-1}e^{-2yi}}\right\}$$

$$+\sum\sum q^{\frac{1}{4}m^2}\sin(2r-1+m)x\left\{\frac{\sqrt{q^{2r-1}}e^{-(m-1)yi}}{1-q^{2r-1}e^{2yi}}+\frac{\sqrt{q^{2r-1}}e^{(m-1)yi}}{1-q^{2r-1}e^{-2yi}}\right\}.$$

Опредѣлимъ коэффиціентъ при $\sin 2nx$ во второй части предъидущаго равенства. Легко представить этотъ коэффиціентъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum_{r=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2r-1)^2+n^2} \left\{ \frac{e^{(2r-1)yi}(q^{-n(2r-1)}e^{-2nyi}-q^{n(2r-1)}e^{2nyi})}{\sqrt{q^{-2r+1}}e^{-yi}-\sqrt{q^{2r-1}}e^{yi}} \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-(2r-1)yi}(q^{-n(2r-1)}e^{2nyi}-q^{n(2r-1)}e^{-2ny})}{\sqrt{q^{-2r+1}}e^{yi}-\sqrt{q^{2r-1}}e^{-yi}} \right\}.$$

Производя дѣленіе въ предъидущихъ двухъ дробяхъ, мы приводимъ, послѣ очень простой группировки членовъ, коэффиціентъ къ слѣдующему виду:

$$2\sum_{r=1}^{\infty} q^{n^2} \left\{ q^{-\frac{1}{4}}\left[q^{(r-1)^2} \cos(2r-2)y + q^{r^2} \cos 2ry\right]\right.$$

$$+ q^{-\frac{9}{4}}\left[q^{(r-2)^2} \cos(2r-4)y + q^{(r+1)^2} \cos(2r+2)y\right] + \dots$$

$$\left. + q^{-(n-\frac{1}{2})^2}\left[q^{(r-n)^2} \cos 2(r-n)y + q^{(r+n-1)^2} \cos 2(r+n-1)y\right]\right\}$$

$$= 2q^{n^2}\vartheta_3(y)\left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \dots + q^{-\frac{1}{4}(2n-1)^2}\right].$$

Такимъ образомъ имѣемъ

$$AC-BD = 2\vartheta_3(y)\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \sin 2nx \left[q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \dots + q^{-(n-\frac{1}{2})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\, \vartheta_3(y)\vartheta_2(x).\, k \sin am \frac{2Kx}{\pi}. \tag{106}$$

Предъидущее равенство можно представить въ иномъ видѣ, если перемножить $\vartheta_3(y)$ и Эрмитовъ рядъ:

$$AC-BD = \sum_{g=0}^{\infty}\left\{ q^{g+\frac{3}{4}} \sum \sin\left(\frac{d+\delta}{2}\right)x \cos 2ny \right\}; \tag{107}$$

послѣдняя сумма распространяется на всѣ такія рѣшенія уравненія

$$4n^2+d\delta=4g+3, \qquad (107')$$

для которыхъ d и δ нечетны и положительны, а n какое бы то ни было цѣлое число.

Приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ q въ равенствахъ (105) и (107), получаемъ

$$\sum sin \frac{d_1+\delta_1}{2} x \cos 2ny = 2\sum sin\,(d+m)x \cos(\delta-m)y\,. \qquad (108)$$

Теорема. *Если d, δ, d_1 и δ_1 нечетныя, положительныя числа, m какое нибудь нечетное число, n какое нибудь цѣлое число, и если функція $f(x, y)$ обладаетъ свойствами:*

$$f(-x, y)=-f(x, y),\ f(0, y)=0,\ f(x, -y)=f(x, y),$$

то существуетъ равенство

$$2\sum f(d+m, \delta-m)=\sum f\left(\frac{d_1+\delta_1}{2}, 2n\right), \qquad (109)$$

въ которомъ суммы распространяются на всѣ рѣшенія уравненій:

$$m^2+2d\delta=4g+3,\ 4n^2+d_1\delta_1=4g+3; \qquad (109')$$

$4g+3$ постоянное, положительное число.

Примѣръ 14. Изъ равенствъ (105) и (106) можно необычайно просто вывести еще другую теорему; для этого умножимъ обѣ части обоихъ равенствъ на $\vartheta_3(0)$:

$$2\sum_{g=0}^{\infty}\Big[q^{g+\frac{3}{4}}\sum_{4g+3=m^2+4n^2+2d\delta} sin\,(d+m)x \cos(\delta-m)y\Big]=\frac{Kk}{\pi} sin\,am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(y)\vartheta_2(x)$$

$$=2\vartheta_3(y)\vartheta_2(x)\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sqrt{q^{\overline{2n-1}}}\sum_{2n-1=d\delta} sin\,dx\Big]$$

$$=2\sum_{g=0}^{\infty}\Big[q^{g+\frac{3}{4}}\sum_{4g+3=m^2+4n^2+2d\delta} sin\,(d+m)x \cos 2ny\Big].$$

При выводѣ употреблялось равенство (1) этой главы.

Приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ q, получаемъ

$$\Sigma \sin(d+m)x\,\{\cos(\delta-m)y-\cos 2ny\}=0. \tag{110}$$

Теорема. *Если d и δ нечетныя, положительныя числа, m какое либо нечетное число, n какое либо цѣлое число, если*

$$f(-x,y)=-f(x,y),\ f(0,y)=0,\ f(x,-y)=f(x,y),$$

то существуетъ равенство

$$\Sigma\{f(d+m,\delta-m)-f(d+m,2n)\}=0, \tag{111}$$

въ которомъ сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m^2+4n^2+2d\delta=4g+3; \tag{111'}$$

$4g+3$ *положительное, постоянное число.*

§ 56. Примѣръ 15. Возьмемъ два ряда:

$$E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}\cos 2nx\cos 2ny,\quad F=i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}\sin 2nx\sin 2ny\,. \tag{112}$$

Поступая также, какъ въ 13-омъ примѣрѣ, легко получаемъ

$$AE-BF=2\sum_{n=1}^{\infty}\Big[q^{n-\frac{1}{2}}\sum_{2n-1=2n'^2+d'\delta'}\cos(\delta'-2n')y\sin(d'+2n')x\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\vartheta_2(y)\sqrt{\frac{2Kk}{\pi}}\sin am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_3(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[q^{n-\frac{1}{2}}\sum_{4n-2=m^2+d\delta}\cos my\sin\frac{d+\delta}{2}x\Big], \tag{113}$$

гдѣ d', δ', d и δ нечетны и положительны, m нечетно, положительно или отрицательно, n' какое нибудь цѣлое число, $2n-1$ положительное число, постоянное для внутреннихъ суммъ.

Изъ равенства (113) слѣдуетъ

$$2\sum_{2n-1=2n'^2+d'\delta'} \sin(d'+2n')x \cos(\delta'-2n')y = \sum_{4n-2=m^2+d\delta} \sin\frac{d+\delta}{2}x \cos my\ . \quad (114)$$

Равенство (114) (а слѣдовательно и (113)) можно было бы вывести изъ равенства (90), полагая $z=0$.

Помножимъ вторую и третью части равенства (113) на $\vartheta_2(0)$:

$$2\sum_{g=0}^{\infty}\Big[q^{g+\frac{3}{4}}\sum_{4g+3=m^2+4n^2+2d\delta} \sin(d+2n)x\cos(\delta-2n)y\Big]=\frac{Kk}{\pi}\sin am\frac{2Kx}{\pi}\vartheta_2(y)\vartheta_3(x)$$

$$=2\vartheta_2(y)\vartheta_3(x)\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sqrt{q^{2n-1}}\sum_{2n-1=d\delta}\sin dx\Big]$$

$$=2\sum_{g=0}^{\infty}\Big[q^{g+\frac{3}{4}}\sum_{4g+3=m^2+4n^2+2d\delta}\sin(d+2n)x\cos my\Big].$$

Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ

$$\sum_{4g+3=m^2+4n^2+2d\delta}\sin(d-2n)x\,\{\cos(\delta+2n)y-\cos my\}=0\ . \quad (115)$$

Въ равенствѣ (115) d и δ нечетны и положительны, m какое нибудь нечетное число, n какое нибудь цѣлое число, $4g+3$ постоянное, положительное число.

Изъ равенства (115) мы выведемъ одну общую теорему Ліувилля, содержащую функцію съ четырьмя перемѣнными. Дѣло въ томъ, что въ равенствѣ (115) члены должны попарно сокращаться, ибо содержатъ неопредѣленныя x и y. При сокращеніи члена $\sin(d-2n)x\cos(\delta+2n)y$ съ какимъ нибудь членомъ, ему равнымъ, но имѣющимъ противоположный знакъ, можетъ быть четыре случая; также при сокращеніи члена $\sin(d-2n)x\cos my$ можетъ быть четыре случая. Но можетъ быть такъ, что выраженіе

$$\sin(d-2n)x\,\{\cos(\delta+2n)y-\cos my\} \quad (116)$$

сократится цѣликомъ съ выраженіемъ

$$\sin(d'-2n')x\ \{\cos(\delta'+2n')y-\cos m'y\}, \qquad (117)$$

въ которомъ d', δ', n' и m' обозначаютъ нѣкоторую другую систему рѣшеній уравненія

$$m^2+4n^2+2d\delta=4g+3;$$

при этомъ можетъ быть 16 случаевъ, изъ которыхъ не всѣ однако возможны. Не вдаваясь въ подробности, докажемъ, что для каждой системы d', δ', m', $2n'$ можно найти такую систему d, δ, m, $2n$, что формулы (116) и (117) будутъ имѣть равныя абсолютныя величины, но противоположные знаки. Такія соотвѣтственныя системы опредѣлятся изъ одной изъ системъ равенствъ:

I	II	III
$d-2n=-d'+2n'$	$d-2n=d'-2n'$	$d-2n=d'-2n'$
$\delta+2n=\delta'+2n'$	$\delta+2n=m'$	$\delta+2n=-m'$
$m=m'$	$m=\delta'+2n'$	$m=-(\delta'+2n')$.

Назовемъ $d+m$ черезъ z (можно и другую линейную функцію d, δ, n и m назвать черезъ z) и опредѣлимъ d, δ, $2n$ и m черезъ d', δ', $2n'$, m' и z. Подставляя полученныя такимъ образомъ выраженія d, δ, $2n$ и m въ равенство

$$m^2+4n^2+2d\delta=m'^2+4n'^2+2d'\delta',$$

найдемъ для каждаго изъ трехъ нашихъ случаевъ квадратное уравненіе; изъ двухъ корней такого уравненія мы возьмемъ только одинъ. Такимъ образомъ получимъ для каждой изъ трехъ предъидущихъ системъ равенствъ одно дополняющее равенство:

I	II	III
$d+m=d'+m'$	$d+m=d'+m'$	$d+m=-d'-m'$.

Изъ трехъ системъ I, II и III получимъ

I	II	III
$m=m'$	$m=\delta'+2n'$	$m=-\delta'-2n'$
$d=d'$	$d=d'+m'-\delta'-2n'$	$d=\delta'+2n'-d'-m'$
$2n=2d'-2n'$	$2n=m'-\delta'$	$2n=\delta'+4n'-2d'-m'$
$\delta=\delta'+4n'-2d'$	$\delta=\delta'$	$\delta=2d'-\delta'-4n'$.

Разсматривая внимательно предъидущія три системы, видимъ, что изъ первой системы всегда опредѣлятся d, δ, $2n$ и m надлежащимъ образомъ, если соблюдено условіе

$$\delta'+4n'>2d';$$

единственное условіе для второй системы будетъ

$$d'+m'>\delta'+2n';$$

условія для третьей системы будутъ

$$\delta'+4n'<2d',\quad d'+m'<\delta'+2n'.$$

Итакъ каждой системѣ d', δ', $2n'$ и m' найдется соотвѣтственная система d, δ, $2n$, m. Можетъ только возникнуть вопросъ, не будутъ ли одной системѣ d, δ, $2n$, m соотвѣтствовать двѣ системы d', δ', $2n'$, m'. Это недоумѣніе разрѣшится, если опредѣлимъ изъ I, II и III d', δ', $2n'$ и m' черезъ d, δ, $2n$ и m. Тогда окажется, что изъ системы I опредѣляются только такія d, δ, $2n$, m, которыя удовлетворяютъ условію

$$\delta+4n>2d;$$

для системы II будемъ имѣть

$$d+m>\delta+2n;$$

для системы же III будемъ имѣть

$$\delta+4n<2d,\quad d+m<\delta+2n.$$

Итакъ нами доказано, что выраженія (116) и (117) сокращаются попарно цѣликомъ.

Замѣтимъ теперь, что системамъ I, II и III можно придать слѣдующій видъ:

I	II
$d-2n=-(d'-2n')$	$d-2n=d'-2n'$
$\delta+2n-m=\delta'+2n'-m'$	$\delta+2n-m=-(\delta'+2n'-m')$
$\delta+2n+m=\delta'+2n'+m'$	$\delta+2n+m=\delta'+2n'+m'$
$d+m=d'+m'$	$d+m=d'+m'$

III

$$d-2n=d'-2n'$$
$$\delta+2n-m=\delta'+2n'-m'$$
$$\delta+2n+m=-(\delta'+2n'+m')$$
$$d+m=-(d'+m').$$

Замѣтимъ еще, что четыре равенства:

$$d-2n=-(d'-2n'),\ \delta+2n-m=-(\delta'+2n'-m'),$$
$$\delta+2n+m=-(\delta'+2n'+m'),\ d+m=-(d'+m'),$$

изъ которыхъ послѣднее выводится изъ равенства

$$m^2+4n^2+2d\delta=m'^2+4n'^2+2d'\delta'$$

на основаніи первыхъ трехъ, несовмѣстимы, ибо приводятъ къ условію $d=-d'$. Сообразивъ все это, можно вывести слѣдующую теорему.

Теорема. *Если* d *и* δ *нечетныя положительныя числа,* m *какое нибудь нечетное число,* n *какое нибудь цѣлое число, и если* $f(x, y, z, t)$ *обладаетъ свойствами:*

$$f(-x, y, z, t)=f(x,-y, z, t)=f(x, y,-z,-t)=-f(x, y, z, t),$$
$$f(x, 0, z, t)=0,\quad f(x, y, 0,-t)=-f(x, y, 0, t),$$
$$f(x, y,-z, 0)=-f(x, y, z, 0),\ f(x, y, 0, 0)=0,$$

то существуетъ равенство

$$\Sigma f(d-2n,\ \delta+2n-m,\ \delta+2n+m,\ d+m)=0, \tag{118}$$

въ которомъ сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m^2+4n^2+2d\delta=4g+3;$$

$4g+3$ *постоянное, положительное число.*

Дѣйствительно, для каждаго

$$f(d-2n,\ \delta+2n-m,\ \delta+2n+m,\ d+m)$$

съ помощію одной изъ трехъ системъ I, II, III найдется такое

$$f(d'-2n',\ \delta'+2n'-m',\ \delta'+2n'+m',\ d'+m'),$$

которое ему равно абсолютно, но съ обратнымъ знакомъ.

Равенство (118) составляетъ предметъ 13-й и 14-й статей Ліувилля объ общихъ числовыхъ равенствахъ, содержащихъ произвольныя функціи; эти двѣ статьи помѣщены въ 9-мъ томѣ журнала Ліувилля (2 серія). Ліувилль въ этихъ статьяхъ сначала выводитъ двѣ частныя формулы, которыя получатся изъ (118) отбрасываніемъ попеременно аргументовъ $\delta+2n+m$ и $d+m$, и уже въ концѣ 14-й статьи говоритъ объ общей формулѣ (118).

§ 57. Во всѣхъ предъидущихъ примѣрахъ функціи, къ которымъ относились теоремы Ліувилля или четны, или нечетны; но, очевидно, можетъ случиться, что одна и та же теорема вѣрна и для четныхъ, и для нечетныхъ функцій. Предъидущіе методы, очевидно, и въ этомъ случаѣ остаются пригодными; однако для доказательства такихъ теоремъ иногда возможенъ и другой пріемъ, болѣе простой, также основанный на теоріи эллиптическихъ функцій. Во 2-ой главѣ мы занимались равенствами между двумя и болѣе двойными суммами. Сравненіе коэффиціентовъ одинаковыхъ степеней въ этихъ суммахъ, очевидно, приведетъ къ равенствамъ, въ большинствѣ случаевъ состоящимъ изъ суммъ различныхъ степеней —1. Эти столь простыя числовыя равенства можно представить въ такомъ видѣ, чтобы въ нихъ входили самаго общаго вида функціи; эти разсужденія, которыми вводится такая функція, имѣютъ очень много общаго съ разсужденіями примѣра 15-го.

Общія разсужденія могутъ дать только очень отдаленное понятіе объ этомъ способѣ вывода теоремъ; поэтому считаю лучшимъ замѣнить ихъ доказательствомъ одной теоремы Ліувилля, данной этимъ послѣднимъ въ своемъ журналѣ въ апрѣлѣ 1870 года. Теорема эта была доказана академикомъ Золотаревымъ въ Bulletin de l'Académie de St. Pétersbourg, tome 16, № 2, стр. 86. Мы нѣсколько измѣнимъ начало доказательства Золотарева, ибо желательно указать на связь способа Золотарева съ теоремами 2-ой главы.

Теорема Ліувилля. *Пусть m число вида $4l+1$; обозначимъ черезъ i и i_1 нѣкоторыя нечетныя положительныя числа, черезъ ω, s, ω_1 и s_1 какія нибудь цѣлыя числа. Пусть функція* $F(x)$

имѣетъ опредѣленныя, конечныя значенія при всѣхъ разсматриваемыхъ цѣлыхъ значеніяхъ аргументовъ. Тогда

$$\Sigma(-1)^{s+\frac{1}{8}(i^2-1)}F(\omega)=\Sigma(-1)^{s_1}F(\omega_1), \tag{119}$$

гдѣ суммы по порядку распространяются на всѣ рѣшенія i, s, ω, i_1, s_1, ω_1 *при данномъ* m *уравненій:*

$$i^2+\omega^2+16s^2=m,\ i_1^{\ 2}+\omega_1^{\ 2}+8s_1^{\ 2}=m. \tag{119'}$$

Доказательство. На основаніи равенства (15) главы 2-ой (стр. 141) можемъ написать

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^{s+\frac{1}{8}(i^2-1)+\frac{1}{8}(N-1)}q^{N-1}$$

$$=\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{s_1=-\infty}^{\infty}(-1)^{s_1+\frac{1}{8}(N'-1)}q^{N'-1}, \tag{120}$$

полагая

$$N=i^2+16s^2,\ N'=i_1^{\ 2}+8s_1^{\ 2}. \tag{120'}$$

Равенство (120) представимъ въ сокращенномъ видѣ:

$$\sum_N(-1)^{\frac{1}{8}(N-1)}A_Nq^{N-1}=\sum_{N'}(-1)^{\frac{1}{8}(N'-1)}A'_{N'}q^{N'-1}. \tag{121}$$

Очевидно, что

$$A_N=\Sigma(-1)^{s+\frac{1}{8}(i^2-1)},\ A'_{N'}=\Sigma(-1)^{s_1}, \tag{122}$$

гдѣ суммы по порядку распространяются на всѣ рѣшенія указаннаго въ теоремѣ характера уравненій:

$$i^2+16s^2=N,\ i_1^{\ 2}+8s_1^{\ 2}=N'. \tag{122'}$$

Разсмотримъ теперь двѣ суммы:

$$\Sigma(-1)^{s+\frac{1}{8}(i^2-1)}F(\omega)=\sum_N A_NF(\omega),\ \Sigma(-1)^{s_1}F(\omega_1)=\sum_{N'}A'_{N'}F(\omega_1), \tag{123}$$

которыя распространяются на всевозможныя рѣшенія уравненій (119′).

При разсмотрѣніи (123) можетъ быть три случая.

1) Пусть $\omega_1=\omega$; тогда

$$F(\omega_1)=F(\omega),\ (-1)^{\frac{1}{8}(N-1)}=(-1)^{\frac{1}{8}(N'-1)},\ N'=N=i^2+16s^2=i_1{}^2+8s_1{}^2.$$

Въ такомъ случаѣ равенство (121) даетъ

$$A'_{N'}=A_N,$$

ибо коэффиціенты одинаковыхъ степеней q этого равенства должны равняться между собою. Итакъ въ этомъ случаѣ

$$A'_{N'}F(\omega_1)=A_N\,F(\omega).$$

2) Пусть для нѣкотораго ω_1 нельзя найти равнаго ему ω. Въ такомъ случаѣ $m-\omega_1{}^2=N'$ можетъ выразиться формою $i_1{}^2+8s_1{}^2$, но не можетъ выразиться формою i^2+16s^2. Поэтому въ первой части равенства (121) q не войдетъ въ степени $N'-1$; а потому въ этомъ случаѣ $A'_{N'}=0$. Отсюда видимъ, что членъ $A'_{N'}F(\omega_1)$ уничтожается самъ собою.

3) Члены, содержащіе такое ω, что ему нельзя найти равнаго ω_1, также уничтожаются сами собою въ первой изъ суммъ (123).

Слѣдовательно

$$\Sigma A'_{N'}F(\omega_1)=\Sigma A_N\,F(\omega), \tag{124}$$

что и требовалось доказать.

Изъ самаго изложенія предъидущаго доказательства ясно, что каждая теорема Якоби, принадлежащая къ классу теоремъ, разсмотрѣнныхъ во 2-ой главѣ, дастъ теорему, подобную предъидущей. Очевидно также, что самый способъ вывода можно значительно обобщить; но цѣль этой статьи не состоитъ въ такого рода изслѣдованіяхъ: предполагается только представить въ возможно полномъ видѣ тѣ главнѣйшія приложенія теоріи эллиптическихъ функцій, которыя сдѣланы до сихъ поръ различными изслѣдователями.

ГЛАВА V.

Теорія Гауссовыхъ цѣлыхъ чиселъ. Свойства уравненія, отъ котораго зависитъ дѣленіе цѣлой лемнискаты на Гауссово нечетное первоначальное число. Примѣненіе этихъ свойствъ къ выводу законовъ взаимности вычетовъ четвертой и восьмой степеней, а также къ доказательству одной теоремы Гаусса.

§ 58. Хотя болѣе полустолѣтія прошло съ тѣхъ поръ, какъ Гауссъ (въ 1831 году) во второй части своей Theoria Residuorum Biquadraticorum ввелъ въ теорію чиселъ мнимыя цѣлыя числа, однако эта теорія такъ мало распространена въ математической литературѣ, что я, желая быть понятымъ, долженъ посвятить нѣсколько словъ главнымъ чертамъ этой теоріи. Замѣчу, что теорія Гаусса была значительно обобщена сначала Куммеромъ, а потомъ Золотаревымъ. Я однако не буду излагать эту теорію въ обобщенномъ видѣ, а ограничусь изложеніемъ ея въ тѣхъ рамкахъ, въ какихъ она дана Гауссомъ, во 1) потому, что для цѣлей этого сочиненія нѣтъ необходимости прибѣгать къ болѣе общей теоріи, во 2) потому, что такое болѣе общее изложеніе затруднитъ пониманіе излагаемаго.

Гауссовымъ цѣлымъ числомъ называется выраженіе $a+bi$, если a и b цѣлыя числа и если i обозначаетъ квадратный корень изъ -1. Число $a-bi$ называется сопряженнымъ $a+bi$. Произведеніе двухъ сопряженныхъ чиселъ $a+bi$ и $a-bi$, цѣлыхъ или дробныхъ, называется *нормою* числа $a+bi$. Норма дѣйствительнаго числа есть квадратъ этого числа. Ради краткости, будемъ обозначать норму числа m черезъ $N(m)$.

Числа 1, i, -1, $-i$ и вообще i^ρ, гдѣ ρ цѣлое число, суть единицы въ Гауссовой теоріи.

Произведеніе нѣсколькихъ Гауссовыхъ цѣлыхъ чиселъ есть опять Гауссово цѣлое число. Если число можно представить въ видѣ произведенія нѣсколькихъ цѣлыхъ Гауссовыхъ чиселъ, то такое число называется составнымъ; въ случаѣ же невозможности представить цѣлое число въ видѣ произведенія нѣсколькихъ Гауссовыхъ чиселъ, мы въ этомъ неразлагаемомъ числѣ имѣемъ первоначальное число. При разложеніи на первоначальные множители, числа i^ρ не принимаются за отдѣльные множители.

Если два числа m и m_1 при дѣленіи на третье цѣлое число n даютъ цѣлыя числа, то n называется общимъ дѣлителемъ m и m_1. Вся теорія Гауссовыхъ чиселъ можетъ быть, также какъ и теорія обыкновенныхъ цѣлыхъ чиселъ, основана на способѣ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ.

Пусть m и m_1 два цѣлыя Гауссовы числа; легко доказать, что всегда можно найти третье цѣлое число q такое, что

$$N(m-m_1 q)\leqq \frac{1}{2}N(m_1).$$

Дѣйствительно,

$$N(m-m_1 q)=N(m_1)N\left(\frac{m}{m_1}-q\right).$$

Очевидно, всегда можно сдѣлать такъ, что дѣйствительныя части $\frac{m}{m_1}$ и q, а также коэффиціенты при i въ $\frac{m}{m_1}$ и q различались бы между собою на величины, абсолютно не большія $\frac{1}{2}$; но въ такомъ случаѣ $N\left(\frac{m}{m_1}-q\right)\leqq\frac{1}{2}$.

На основаніи предъидущаго можно найти общій наибольшій дѣлитель для m и m_1. Для этого составляемъ рядъ равенствъ:

$$m=m_1 q+m_2,\ m_1=m_2 q_1+m_3, \dots m_h=m_{h+1} q_h, \qquad (1)$$

гдѣ $q, q_1 \dots q_h$ такія цѣлыя числа, что

$$N(m_2) \leqq \frac{1}{2} N(m_1), \quad N(m_3) \leqq \frac{1}{2} N(m_2), \ldots . \qquad (2)$$

Повторяя тѣ же разсужденія, которыя обыкновенно дѣлаются при выводѣ общаго наибольшаго дѣлителя обыкновенныхъ цѣлыхъ чиселъ, видимъ, что m_{h+1} есть общій наибольшій дѣлитель m и m_1. Если $m_{h+1}=i^\rho$, то числа m и m_1 *числа, первыя между собою.*

Пусть m и m_1 *числа, первыя между собою; если mn дѣлится на m_1, то и n дѣлится на m_1.*

Дѣйствительно, въ равенствахъ (1) $m_{h+1}=i^\rho$; слѣдовательно $mn=m_1nq+m_2n, \quad m_1n=m_2nq_1+m_3n, \ldots . \; m_{h-1}n=m_hnq_{h-1}+i^\rho n.$ Такъ какъ mn и m_1nq дѣлятся на m_1, то на m_1 также дѣлится и m_2n; точно также видимъ, что на m_1 дѣлятся и m_3n, и $m_4n, \ldots .$ и $i^\rho n$.

Изъ предъидущаго слѣдствіе: *если числа $m, m_1, m_2 \ldots .$ не дѣлятся на первоначальное число n, то на это n не дѣлится и произведеніе $mm_1m_2 \ldots .$*

Первоначальныя числа въ Гауссовой теоріи распадаются на двѣ категоріи. Во первыхъ, всѣ положительныя первоначальныя числа вида $4n+3$ должны быть приняты и въ теоріи Гаусса за первоначальныя. Дѣйствительно, если бы такое число дѣлилось на $a+bi$, то оно дѣлилось бы и на $a-bi$. Положимъ, что число $a+bi$ первоначально; тогда и $a-bi$ первоначально. Вслѣдствіе предъидущей теоремы, если $4n+3$ дѣлится на $a+bi$, то на $a+bi$ дѣлится также $(4n+3):(a-bi)$; слѣдовательно первоначальное число $4n+3$ дѣлится на число a^2+b^2, которое не можетъ быть вида $4N+3$, т.-е. не можетъ равняться $4n+3$. Всѣ другія положительныя первоначальныя числа въ Гауссовой теоріи суть составныя числа, составныя только изъ двухъ сопряженныхъ первоначальныхъ множителей. Дѣйствительно, всякое первоначальное положительное число вида $4n+1$ разлагается на два квадрата, и только однимъ способомъ. Пусть $4n+1=a^2+b^2$; тогда $4n+1=(a+bi)(a-bi)$. Если бы у первоначальнаго числа $4n+1$ былъ еще первоначальный множитель $c+di$, отличный отъ $a+bi$ и $a-bi$, то $4n+1$ дѣлилось бы и на $c-di$, а слѣдовательно на c^2+d^2, что невозможно.

$$2=(1+i)(1-i).$$

$$n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \left[\frac{n}{m}\right] (mod.\ m). \qquad (14)$$

Символъ $\left[\frac{n}{m}\right]$ ввелъ Эйзенштейнъ въ своей статьѣ Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen (Journal von Crelle, Band 30, Heft 3). Этотъ символъ не надо смѣшивать съ совершенно такимъ же обозначеніемъ, употребленнымъ Леженъ Дирикле въ его Recherches sur les formes quadratiques à coëfficients et à indéterminées complexes (Journal von Crelle, Band 24, Heft 4). Символъ Лежена Дирикле равенъ квадрату символа Эйзенштейна.

Относительно символа Эйзенштейна ограничимся пока однимъ его свойствомъ:

$$\left[\frac{nn'n''n'''\ldots\ldots}{m}\right] = \left[\frac{n}{m}\right]\left[\frac{n'}{m}\right]\left[\frac{n''}{m}\right]\left[\frac{n'''}{m}\right]\ldots\ldots \qquad (15)$$

Это прямо слѣдуетъ изъ сравненія

$$(nn'n''\ldots.)^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv n^{\frac{1}{4}(p-1)}\, n'^{\frac{1}{4}(p-1)}\, n''^{\frac{1}{4}(p-1)} \ldots\ldots (mod.\ m).$$

Перейдемъ теперь къ замѣчательному свойству квадрата Эйзенштейновскаго символа—выражаться посредствомъ символа Лежандра.

1) Пусть $m=a$, гдѣ a обозначаетъ положительное, первоначальное число вида $4n+3$ или отрицательное вида $-4n-3$. Вспомнимъ, что сравненіе

$$x^2 \equiv \alpha+\beta i\ (mod.\ a) \qquad (16)$$

возможно или невозможно, смотря по тому, первое или второе изъ равенствъ

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]^2 = +1, \quad \left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]^2 = -1$$

имѣетъ мѣсто. Разсмотримъ же, что требуется для того, чтобы сравненіе (16) имѣло рѣшеніе, которое назовемъ черезъ $\varphi+\psi i$. Для этого должны удовлетворяться сравненія:

$$\varphi^2-\psi^2\equiv\alpha,\ 2\varphi\psi\equiv\beta\ (mod.\ a). \qquad (17)$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ

$$(\varphi^2+\psi^2)^2\equiv\alpha^2+\beta^2\ (mod.\ a).$$

Итакъ, чтобы сравненіе (16) имѣло рѣшеніе, необходимо, чтобы

$$\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a}\right)=+1. \qquad (18)$$

Докажемъ, что условіе (18) достаточно.

Сначала разсмотримъ случай $\alpha\equiv0$ $(mod.\ a)$. Тогда (18) непремѣнно удовлетворится. Полагая же $\varphi=\pm\psi$, мы удовлетворимъ (17), если удовлетворимъ

$$2\varphi^2\equiv\pm\beta\ (mod.\ a).$$

Послѣднее сравненіе возможно, если $\left(\frac{\pm2\beta}{a}\right)=+1$; но $\left(\frac{2\beta}{a}\right)$ $=-\left(\frac{-2\beta}{a}\right)$; поэтому одно изъ сравненій

$$2\varphi^2\equiv\beta\ (mod.\ a),\ 2\varphi^2\equiv-\beta\ (mod.\ a)$$

возможно въ то время, какъ другое невозможно.

Если $\beta\equiv0$ $(mod.\ a)$, то должно положить или $\varphi\equiv0$ $(mod.\ a)$, или $\psi\equiv0$ $(mod.\ a)$, смотря по тому, $-\alpha$ или $+\alpha$ квадратичный вычетъ по модулю a.

Пусть теперь ни α, ни β не дѣлятся на a. Если (18) удовлетворено, то существуетъ число s, для котораго

$$s^2\equiv\alpha^2+\beta^2\ (mod.\ a),\ (s+\beta)(s-\beta)\equiv\alpha^2\ (mod\ a);$$

$$\left(\frac{s+\beta}{a}\right)=\left(\frac{s-\beta}{a}\right)=\pm1.$$

Но s имѣетъ два значенія: s_0 и $a-s_0\equiv-s_0$ $(mod.\ a)$. Такъ какъ

$$\left(\frac{-s_0+\beta}{a}\right)=-\left(\frac{s_0-\beta}{a}\right),$$

то всегда можно найти такое s, что

Положимъ, что $p-1=N(m)-1=\delta\varepsilon+\xi$, гдѣ ε и ξ цѣлыя положительныя числа, $\xi<\delta$. Изъ предъидущаго сравненія выводимъ

$$g^{\delta\varepsilon}\equiv 1 \ (mod.\ m),\ g^{\delta\varepsilon+\xi}\equiv g^{\xi} \ (mod.\ m),\ g^{\xi}\equiv 1 \ (mod.\ m);$$

послѣднее вслѣдствіе сравненія (11). Изъ послѣдняго сравненія заключаемъ, что $\xi=0$ и что δ непремѣнно есть дѣлитель $p-1$.

Если g первообразный корень, то

$$0,\ 1,\ g,\ g^2,\ g^3,\ g^4,\ g^5, \ldots\ldots g^{p-2} \tag{12}$$

составляютъ полную систему вычетовъ по модулю m, ибо два изъ этихъ чиселъ не могутъ быть сравнимы по модулю m.

Мы не станемъ доказывать, что для всякаго первоначальнаго числа m существуютъ первообразные корни, ибо доказательство буквально совпадаетъ съ доказательствомъ той же теоремы для дѣйствительныхъ чиселъ, которое помѣщено во 2-омъ изданіи Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune Dirichlet, на 65 и 66 страницахъ.

Возвратимся теперь къ четыремъ Гауссовымъ классамъ.

Если $n^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv 1$ $(mod.\ m)$, то $n\equiv g^{4h}$ $(mod.\ m)$, гдѣ h цѣлое число, а g первообразный корень. Если $n^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv -1$ $(mod.\ m)$, то $n\equiv g^{4h+2}$ $(mod.\ m)$. Если $n^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv i$ $(mod.\ m)$, то, выбирая g такъ, что $g^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv +i$ $(mod.\ m)$, имѣемъ $n\equiv g^{4h+1}$ $(mod.\ m)$; если же $g^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv -i$ $(mod.\ m)$, то $n\equiv g^{4h+3}$ $(mod.\ m)$. Наконецъ, если $n^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv -i\,(mod.\ m)$, то при $g^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv i$ $(mod.\ m)$ число $n\equiv g^{4h+3}$ $(mod.\ m)$, а при $g^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv -i$ $(mod.\ m)$ число $n\equiv g^{4h+1}$ $(mod.\ m)$.

Если $n^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv 1$ $(mod.\ m)$, то сравненіе $x^4\equiv n\ (mod.\ m)$ имѣетъ четыре корня (полагаемъ $n\equiv g^{4h}$ $(mod.\ m)$):

$$x\equiv g^{h},\ x\equiv g^{h+\frac{1}{4}(p-1)},\ x\equiv g^{h+\frac{1}{2}(p-1)},\ x\equiv g^{h+\frac{3}{4}(p-1)}\ (mod.\ m),$$

или иначе

$$x \equiv g^h,\ x \equiv ig^h,\ x \equiv -g^h,\ x \equiv -ig^h\ (mod.\ m).$$

Числа n, для которыхъ возможно сравненіе

$$x^4 \equiv n\ (mod.\ m),$$

называются биквадратичными вычетами модуля m. Такихъ биквадратичныхъ вычетовъ въ полной системѣ вычетовъ $\frac{1}{4}(p-1)$; въ этомъ убѣждаетъ насъ рядъ (12).

Если $n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv -1\ (mod.\ m)$, то сравненіе $x^4 \equiv n\ (mod.\ m)$ не имѣетъ рѣшеній. Дѣйствительно, если бы имѣлось рѣшеніе $x \equiv g^h\ (mod.\ m)$, то n было бы $\equiv g^{4h}\ (mod.\ m)$, что противно положенію. Но въ этомъ случаѣ возможно сравненіе $x^2 \equiv n\ (mod.\ m)$. Рѣшенія этого сравненія будутъ $x \equiv g^h$ и $-g^h$, если $n \equiv g^{2h}\ (mod.\ m)$. *Числа n, для которыхъ возможно квадратное сравненіе*

$$x^2 \equiv n\ (mod.\ m),$$

называются квадратичными вычетами модуля m. Квадратичныхъ вычетовъ $\frac{1}{2}(p-1)$; изъ нихъ $\frac{1}{4}(p-1)$ биквадратичныхъ вычетовъ и $\frac{1}{4}(p-1)$ *биквадратичныхъ невычетовъ*.

Наконецъ, если

$$n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv i \text{ или } -i\ (mod.\ m),$$

то ни сравненіе $x^4 \equiv n\ (mod.\ m)$, ни сравненіе $x^2 \equiv n\ (mod.\ m)$ не имѣютъ рѣшеній. Такія числа n называются *квадратичными невычетами*; они также *биквадратичные невычеты*; ихъ $\frac{1}{2}(p-1)$ въ полной системѣ вычетовъ.

§ 61. Итакъ характеръ числа n относительно модуля m зависитъ отъ того, чему равенъ показатель степени ρ въ сравненіи

$$n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv i^\rho\ (mod.\ m). \tag{13}$$

Это i^ρ будемъ впредь обозначать символомъ $\left[\frac{n}{m}\right]$. Слѣдовательно

$$y=0,\ x=0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots A^2+B^2-1;$$

отсюда заключаемъ: если A и B числа первыя между собою, то всегда можно для даннаго цѣлаго числа $\alpha+\beta i$ найти такое дѣйствительное цѣлое число ζ, что

$$\alpha+\beta i\equiv\zeta\ (mod\ A+Bi).$$

Если модуль D дѣйствительное число, то изъ (10) получаемъ

$$y=0,\ 1,\ 2, \ldots D-1,\ x=0,\ 1,\ 2 \ldots D-1.$$

Положимъ, что мы составили нѣкоторую полную систему вычетовъ для модуля m, мнимаго или дѣйствительнаго. Пусть два вычета изъ такой системы суть x и y; пусть μ число первое съ m. Такъ какъ разность $x-y$ не дѣлится на m, то и $\mu(x-y)$ не дѣлится на m; слѣдовательно два числа $\mu x+l$ и $\mu y+l$, гдѣ l нѣкоторое Гауссово цѣлое число, не сравнимы по модулю m. Отсюда заключаемъ: если въ формулѣ $\mu x+l$ будемъ вмѣсто x подставлять всевозможные члены какой нибудь полной системы вычетовъ, то формула $\mu x+l$ дастъ новую полную систему вычетовъ по модулю m.

Изъ предъидущаго слѣдуетъ и другая теорема: всегда можно найти x, удовлетворяющее сравненію

$$\mu x\equiv l\ (mod\ m),$$

если μ и m Гауссовы числа, первыя между собою. Очевидно x выразится формулою x_0+mt, гдѣ x_0 опредѣленное, а t неопредѣленное Гауссово цѣлое число.

§ 60. Теоремы Фермата и Вильсона имѣютъ аналогичныя себѣ теоремы для Гауссовыхъ чиселъ. Докажемъ теорему аналогичную теоремѣ Фермата.

Пусть m первональное Гауссово мнимое или дѣйствительное число; пусть $N(m)=p$. Положимъ, что n число, не дѣлящееся на m, а $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_{p-1}$ полная система вычетовъ по модулю m кромѣ вычета, дѣлящагося на m. Вслѣдствіе предъидущаго

$$n\mu_1,\ n\mu_2,\ n\mu_3, \ldots n\mu_{p-1}$$

есть полная система вычетовъ за исключеніемъ вычета, дѣлящагося на m; а потому

$$n^{p-1}\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\ldots\mu_{p-1}\equiv\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\ldots\mu_{p-1}\;(mod.\;m).$$

Итакъ число

$$(n^{p-1}-1)\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\ldots\mu_{p-1}$$

дѣлится на m; но $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\ldots\mu_{p-1}$ не дѣлится на m; слѣдовательно $n^{p-1}-1$ дѣлится на m. Итакъ, *если n число первое съ m, то*

$$n^{N(m)-1}\equiv 1(mod\;m).\tag{11}$$

Разсмотримъ выраженіе $n^{\frac{1}{4}\{N(m)-1\}}$, предполагая, что m *первоначальное нечетное Гауссово число.* Нечетнымъ числомъ будемъ называть такое, которое не дѣлится на $1+i$. Пусть

$$n^{\frac{1}{4}\{N(m)-1\}}\equiv f(mod.\;m).$$

Тогда $f^4\equiv 1(mod.\;m)$; слѣдовательно или f^2-1, или f^2+1 дѣлится на m. Если $f^2\equiv 1\;(mod.\;m)$, то или $f-1$, или $f+1$ дѣлится на m. Если $f^2\equiv -1\;(mod.\;m)$, то на m дѣлится или $f+i$, или $f-i$. Итакъ $n^{\frac{1}{4}\{N(m)-1\}}\equiv$ или съ 1, или съ -1, или съ i, или съ $-i$ $(mod.\;m)$. Поэтому Гауссъ раздѣляетъ всѣ числа, не дѣлящіяся на m, на 4 класса, смотря по тому, сравнимы ли ихъ $\frac{1}{4}\{N(m)-1\}$—ыя степени съ 1, или i, или -1, или $-i$.

Если какое нибудь число g, не дѣлящееся на первоначальное число m, возвышать въ различныя степени, то эти степени будутъ сравнимы съ нѣкоторыми членами полной системы вычетовъ по модулю m. При этомъ можетъ случиться, что $g^\delta\equiv 1\;(mod.\;m)$, если $0<\delta<p-1$, и можетъ случиться, что g^δ не$\equiv 1\;(mod.\;m)$ ни для какого положительнаго числа δ, меньшаго $p-1$. Въ послѣднемъ случаѣ g называется *первообразнымъ корнемъ модуля m.*

Пусть δ наименьшее положительное число, для котораго существуетъ сравненіе

$$g^\delta\equiv 1\;(mod.\;m).$$

§ 59. Если два мнимыя числа равны, то отдѣльно равны дѣйствительныя части и отдѣльно-коэффиціенты при i; это доказывается въ элементарной алгебрѣ. Пусть

$$a+bi=c+di+(h+gi)(f+ei),$$

гдѣ a, b, c, d, h, g, f и e цѣлыя числа. О числахъ $a+bi$ и $c+di$ говорятъ, что *они сравнимы по модулю* $f+ei$; это алгебраически изображается такъ:

$$a+bi\equiv c+di \pmod{f+ei}.$$

Также употребляютъ выраженіе: $c+di$ есть *вычетъ* $a+bi$ *по модулю* $f+ei$; также $a+bi$ есть вычетъ $c+di$.

Если модуль дѣйствителенъ, то дѣйствительныя части сравненія составляютъ отдѣльное сравненіе, а коэффиціенты при i—другое сравненіе.

Пусть r_1, r_2, $r_3 \ldots r_n$ такія мнимыя или дѣйствительныя цѣлыя числа, которыя не сравнимы между собою по модулю D, гдѣ D дѣйствительное или мнимое число; пусть всѣ остальныя числа сравнимы по модулю D съ однимъ изъ чиселъ r. Систему чиселъ r_1, r_2, $r_3 \ldots r_n$ называютъ *полною системою вычетовъ по модулю* D.

Теорема. *Полная система вычетовъ по модулю D всегда содержитъ число членовъ, равное нормѣ D.*

Доказательство. Пусть

$$D=C(A+Bi),$$

гдѣ A, B и C обыкновенныя цѣлыя числа; будемъ полагать C положительнымъ, а A и B числами первыми между собою. Пусть

$$x+yi\equiv\alpha+\beta i \pmod{C(A+Bi)}, \tag{3}$$

гдѣ $\alpha+\beta i$ постоянное, а $x+yi$ перемѣнное цѣлое число.

Вмѣсто сравненія (3) можемъ написать:

$$x+yi=\alpha+\beta i+(t+ui)(CA+CBi), \tag{3'}$$

гдѣ t и u цѣлыя числа. Равенство (3′) распадается на два равенства:

$$x=\alpha+tCA-uCB,\ y=\beta+tCB+uCA. \qquad (4)$$

Чтобы удовлетворить второе изъ равенствъ (4), положимъ

$$0\leqq y<C,\quad y-\beta=Cf; \qquad (5)$$

тогда вмѣсто втораго изъ (4) получимъ уравненіе

$$Bt+Au=f, \qquad (6)$$

изъ котораго всегда можно опредѣлить t и u, такъ какъ A и B числа первыя между собою. Такимъ образомъ второе изъ (4) всегда можно удовлетворить, и только однимъ способомъ, числомъ y, удовлетворяющимъ неравенствамъ $0\leqq y<C$.

Пусть, удовлетворяя условіямъ (5) и (6), мы получили

$$t=t_0+Az,\ u=u_0-Bz, \qquad (7)$$

гдѣ t_0 и u_0 опредѣленныя цѣлыя числа, а z неопредѣленное цѣлое число. Вмѣсто перваго изъ (4) получаемъ

$$x=\alpha+C(t_0A-u_0B)+C(A^2+B^2)z. \qquad (8)$$

Изъ равенства (8) видимъ, что всегда можно найти такое z, что

$$0\leqq x<C(A^2+B^2). \qquad (9)$$

Изъ предъидущихъ разсужденій видимъ, что для данныхъ α и β всегда можно найти x и y, удовлетворяющія условіямъ (3), (5) и (9), и что такая система x и y для данныхъ α и β одна.

Изъ всего вышесказаннаго можно вывести способъ составленія полной системы вычетовъ по модулю $D=C(A+Bi)$. Для этого въ формулѣ $x+yi$ послѣдовательно полагаемъ

$$\left.\begin{array}{l} y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots C-1, \\ x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots C(A^2+B^2)-1. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Всѣхъ, такимъ образомъ полученныхъ, вычетовъ будетъ

$$C^2(A^2+B^2)=N(CA+CBi)=N(D).$$

Разсмотримъ нѣкоторыя слѣдствія изъ предъидущей теоремы.

Если $C=1$, то равенства (10) даютъ

Такъ какъ A' и B' не имѣютъ общихъ дѣлителей, то A' и P' ихъ не имѣютъ; а потому

$$\left(\frac{A'}{P'}\right)=\left(\frac{P'}{A'}\right)=+1;$$

слѣдовательно

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{A'+B'i}\right]^2=\left(\frac{A's}{P'}\right). \tag{35'}$$

Изъ сравненія (34) имѣемъ

$$s=\alpha+A'l-B'm,\quad 0=\beta+B'l+A'm,$$

гдѣ l и m дѣйствительныя цѣлыя числа; послѣднія два равенства даютъ

$$A's=A'\alpha+B'\beta+P'l,\quad A's\equiv A'\alpha+B'\beta \pmod{P'}.$$

Такимъ образомъ доказано, что

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{A'+B'i}\right]^2=\left(\frac{A'\alpha+B'\beta}{A'^2+B'^2}\right). \tag{36}$$

Изъ равенствъ (32), (33) и (36) прямо слѣдуетъ (31).

Очевидно, что вся теорія биквадратичныхъ вычетовъ основана на умѣніи вычислить символы

$$\left[\frac{1+i}{a+bi}\right] \text{ и } \left[\frac{\alpha+\beta i}{a+bi}\right],$$

гдѣ $\alpha+\beta i$ и $a+bi$ первоначальныя нечетныя числа. Для вычисленія втораго символа уже Гауссомъ выведена теорема, извѣстная подъ названіемъ *закона взаимности биквадратичныхъ вычетовъ*. Этотъ законъ Эйзенштейнъ доказалъ съ помощію свойствъ эллиптическихъ функцій, модуль которыхъ i. Функціи эти называются *лемнискатными*.

§ 63. Переходимъ къ выводу главнѣйшихъ свойствъ лемнискатныхъ функцій. Пусть

$$t=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\,; \tag{37}$$

тогда x, $\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{1+x^2}$ будутъ лемнискатныя функціи аргумента t; эти функціи, въ отличіе отъ всякихъ другихъ эллиптическихъ функцій, будемъ снабжать значкомъ, такъ что

$$x=sin\,am(t,i)=sin'am\,t,\ cos\,am(t,i)=cos'am\,t,\ \Delta\,am(t,i)=\Delta'am\,t. \tag{38}$$

Умножимъ обѣ части равенства (37) на i:

$$it=i\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^x \frac{d(ix)}{\sqrt{1-(ix)^4}}=\int_0^{ix} \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}\,,$$

откуда выводимъ

$$sin'am\,it=i\,sin'am\,t. \tag{39}$$

Извѣстно изъ теоріи эллиптическихъ функцій, что при a нечетномъ и b четномъ

$$sin\,am\,at=\frac{xP_1}{P},\ cos\,am\,at=\frac{P_2\sqrt{1-x^2}}{P},\ \Delta\,am\,at=\frac{P_3\sqrt{1-k^2x^2}}{P}\,,$$

$$sin\,am\,bt=\frac{Q_1\,x\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{Q}\,,\ cos\,am\,bt=\frac{Q_2}{Q},\ \Delta\,am\,bt=\frac{Q_3}{Q}\,,$$

гдѣ $x=sin\,am\,t$, P, P_1, P_2 и P_3 цѣлыя функціи x степени a^2-1, у которыхъ коэффиціенты зависятъ только отъ k, Q, Q_2 и Q_3 такіе же многочлены степени b^2, а Q_1 степени b^2-4. Отсюда, принимая въ соображеніе равенство (39) и извѣстную формулу сложенія аргументовъ $sin\,am$, заключаемъ, что

$$y=sin'am(a+bi)t=\frac{xU}{V}\,, \tag{40}$$

гдѣ U и V раціональныя цѣлыя функціи x, у которыхъ коэффиціенты зависятъ только отъ модуля i, т. е. коэффиціенты—цѣлыя мнимыя количества. Если t замѣнить черезъ $i^\rho t$, то y и x замѣнятся черезъ $i^\rho y$ и $i^\rho x$; слѣдовательно U и V цѣлыя функціи x^4:

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right]^2=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{L}\right)\left(\frac{\alpha A'+\beta B'}{A'^2+B'^2}\right); \tag{31}$$

предполагаемъ $\alpha+\beta i$ и $A+Bi$ числами первыми между собою.

Для доказательства первыхъ двухъ формулъ положимъ, что $a+bi$ число первоначальное и что

$$A+Bi=(a+bi)(A''+B''i),\ A^2+B^2=P,\ a^2+b^2=p,\ A''^2+B''^2=P'';$$

положимъ также, что (29) и (30) вѣрны для модулей $a+bi$ и $A''+B''i$. Тогда можемъ написать

$$\left[\frac{i}{A+Bi}\right]=i^{\frac{1}{4}(p-1)+\frac{1}{4}(P''-1)},\ \left[\frac{1+i}{A+Bi}\right]^2=(-1)^{\frac{1}{8}\{(a+b)^2+(A''+B'')^2-2\}}.$$

Но мы имѣемъ

$$\frac{P-1}{4}=\frac{P''p-1}{4}=\frac{(P''-1)(p-1)}{4}+\frac{p-1}{4}+\frac{P''-1}{4}$$

$$\equiv\frac{p-1}{4}+\frac{P''-1}{4}\ (mod\ 4);$$

этимъ доказана формула (29). Формула же (30) слѣдуетъ изъ слѣдующихъ вычисленій:

$$\frac{(A+B)^2-1}{8}=\frac{\{(a+b)(A''+B'')-2B''b\}^2-1}{8}\equiv\frac{(a+b)^2(A''+B'')^2-1}{8}$$

$$\equiv\frac{(a+b)^2-1}{8}+\frac{(A''+B'')^2-1}{8}+\frac{\{(a+b)^2-1\}\{(A''+B'')^2-1\}}{8}$$

$$\equiv\frac{(a+b)^2-1}{8}+\frac{(A''+B'')^2-1}{8}\ (mod\ 2).$$

Что касается формулы (31), то прежде всего замѣтимъ, что

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right]^2=\left[\frac{\alpha+\beta i}{L}\right]^2\left[\frac{\alpha+\beta i}{A'+B'i}\right]^2. \tag{32}$$

Пусть $L=aa'a''....pp'p''....$, гдѣ $a, a', a'',....$ положительныя первоначальныя числа вида $4n+3$, а $p, p', p''....$ такія же числа вида $4n+1$; такимъ образомъ мы полагаемъ L положительнымъ. Пусть

$$p^{(n)}=(a^{(n)}+b^{(n)}i)(a^{(n)}-b^{(n)}i).$$

Нами выведено выше:

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]^2=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a}\right),$$

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{p}\right]^2=\left[\frac{\alpha+\beta i}{a+bi}\right]^2\left[\frac{\alpha+\beta i}{a-bi}\right]^2=\left(\frac{a^2\alpha^2-b^2\beta^2}{p}\right).$$

Но $-b^2\equiv a^2 \pmod{p}$; а потому

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{p}\right]^2=\left(\frac{a^2}{p}\right)\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{p}\right)=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{p}\right).$$

Такимъ образомъ доказано, что

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{L}\right]^2=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{L}\right). \tag{33}$$

Такъ какъ обѣ части равенства (33) не измѣняются отъ замѣны L черезъ $-L$, то равенство (33) вѣрно и для L отрицательнаго.

Мы предполагаемъ всегда, что два члена символа числа первыя между собою; поэтому всегда можно найти дѣйствительное число s, удовлетворяющее сравненію

$$s\equiv\alpha+\beta i \pmod{A'+B'i}, \tag{34}$$

гдѣ s число первое съ $A'+B'i$. Пусть

$$A'+B'i=(a+bi)(a'+b'i)(a''+b''i)\ldots.,$$

гдѣ $a+bi$, $a'+b'i$, $a''+b''i\ldots$ первоначальныя числа.

$$\left[\frac{s}{A'+B'i}\right]^2=\left[\frac{s}{a+bi}\right]^2\left[\frac{s}{a'+b'i}\right]^2\ldots=\left(\frac{as}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{a's}{a'^2+b'^2}\right)\ldots$$

$$=\left(\frac{s}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{s}{a'^2+b'^2}\right)\left(\frac{s}{a''^2+b''^2}\right)\ldots.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{A'+B'i}\right]^2=\left(\frac{s}{A'^2+B'^2}\right)=\left(\frac{s}{P}\right). \tag{35}$$

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{a+bi}\right]^2=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a\alpha+b\beta}{p}\right).$$

Но равенство $a^2+b^2=p$ показываетъ, что p есть квадратичный вычетъ по модулю a, т. е.

$$\left(\frac{p}{a}\right)=+1.$$

Такъ какъ p вида $4n+1$, то

$$\left(\frac{p}{a}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)=+1.$$

Итакъ

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{a+bi}\right]^2=\left(\frac{a\alpha+b\beta}{a^2+b^2}\right). \qquad (23)$$

Возвратимся къ первой степени Эйзенштейновскаго символа для того, чтобы опредѣлить $\left[\frac{n}{m}\right]$ въ тѣхъ случаяхъ, когда $n=+1$, $-1, +i$.

Изъ сравненія (14) прямо слѣдуетъ

$$\left[\frac{1}{m}\right]=+1,\ \left[\frac{-1}{m}\right]=(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)},\ \left[\frac{i}{m}\right]=i^{\frac{1}{4}(p-1)}. \qquad (24)$$

Первая степень $\left[\frac{1+i}{m}\right]$ выведена Гауссомъ во второй части его Theoria residuorum biquadraticorum (второй томъ полнаго собранія сочиненій Гаусса). Намъ понадобится только квадратъ этого символа, выводъ котораго гораздо легче.

1) Если a первоначальное число, абсолютная величина котораго вида $4n+3$, то изъ (19) слѣдуетъ

$$\left[\frac{1+i}{a}\right]^2=\left(\frac{2}{a}\right)=(-1)^{\frac{1}{8}(a^2-1)}. \qquad (25)$$

2) Если $a+bi$ такое первоначальное число, въ которомъ a нечетно, а b четно, то изъ (23) слѣдуетъ

$$\left[\frac{1+}{a+bi}\right]^2=\left(\frac{a+b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right).$$

Изъ равенства

$$2p=(a+b)^2+(a-b)^2$$

слѣдуетъ

$$\left[\frac{1+i}{a+bi}\right]^2=\left(\frac{2}{a+b}\right)=(-1)^{\frac{1}{8}\{(a+b)^2-1\}}. \qquad (26)$$

Замѣтимъ, что формула (25) получится изъ (26), если положимъ $b=0$.

Замѣтимъ еще, что

$$\left[\frac{n}{i^{\rho}m}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]. \qquad (27)$$

§ 62. Также какъ символъ Лежандра имѣетъ свое обобщенiе въ символѣ Якоби, можно и символъ Эйзенштейна $\left[\frac{a}{b}\right]$ обобщить тѣмъ, что полагать b составнымъ, равнымъ $b'b''b'''\ldots$, гдѣ b', b'', $b'''\ldots$ первоначальныя, нечетныя Гауссовы числа. Пусть

$$\left[\frac{a}{b}\right]=\left[\frac{a}{b'b''b'''\ldots}\right]=\left[\frac{a}{b'}\right]\left[\frac{a}{b''}\right]\left[\frac{a}{b'''}\right]\ldots \qquad (28)$$

Разсмотримъ нѣкоторыя свойства этого обобщеннаго символа. Будемъ полагать въ мнимыхъ количествахъ $A+Bi$, $A'+B'i$, $A''+B''i$, $a+bi$, $a'+b'i$, $a''+b''i\ldots$ дѣйствительныя части всегда нечетными, а коэффицiенты при i—всегда четными. Пусть $A+Bi=L(A'+B'i)$, гдѣ A' и B' числа первыя между собою. Въ такомъ случаѣ можно доказать слѣдующiя три формулы:

$$\left[\frac{i}{A+Bi}\right]=i^{\frac{1}{4}\{A^2+B^2-1\}}, \qquad (29)$$

$$\left[\frac{1+i}{A+Bi}\right]^2=(-1)^{\frac{1}{8}\{(A+B)^2-1\}}, \qquad (30)$$

$$\left(\frac{s+\beta}{a}\right)=\left(\frac{s-\beta}{a}\right)=+1.$$

Если это такъ, то всегда можно найти два числа t и u, для которыхъ

$$t^2\equiv s+\beta,\ u^2\equiv s-\beta\ (mod.\ a).$$

Изъ послѣднихъ сравненій выводимъ

$$t^2u^2\equiv s^2-\beta^2\equiv\alpha^2,\ tu\equiv\pm\alpha\ (mod.\ a);$$

двойной знакъ передъ α зависитъ отъ того, какія t и u мы выбрали, такъ какъ для каждаго сравненія второй степени существуютъ два корня. Такъ какъ a нечетно, то всегда можно t и u выбрать такъ, что оба или четны, или нечетны. Легко теперь видѣть, что сравненія (17) удовлетворятся, если положимъ

$$\varphi=\frac{t\pm u}{2},\ \psi=\frac{t\mp u}{2},$$

гдѣ должно брать верхніе или нижніе знаки, смотря по тому, верхній или нижній знакъ взятъ въ сравненіи

$$tu\equiv\pm\alpha\ (mod.\ a).$$

Итакъ сравненіе (16) возможно, если

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]^2=+1 \text{ или } \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a}\right)=+1,$$

и невозможно, если

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]^2=-1 \text{ или } \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a}\right)=-1.$$

Но оба символа имѣютъ только два различныя значенія; слѣдовательно

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]^2=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a}\right). \tag{19}$$

2) Возьмемъ теперь первоначальное мнимое число $m=a+bi$ и предположимъ, что b четно, а a нечетно. Было доказано выше,

что всякое мнимое число сравнимо по модулю $a+bi$ съ какимъ нибудь дѣйствительнымъ числомъ; а потому въ сравненіи

$$x^2 \equiv \alpha + \beta i \ (mod.\ a+bi)$$

x можно принимать за дѣйствительную величину. Данное сравненіе можно замѣнить равенствомъ

$$x^2 - \alpha - \beta i = (\varphi + \psi i)(a+bi),$$

которое въ свою очередь замѣняется равенствами

$$x^2 - \alpha = a\varphi - b\psi, \quad -\beta = b\varphi + a\psi. \tag{20}$$

Исключаемъ изъ этихъ двухъ равенствъ ψ и полагаемъ $N(a+bi)=p$:

$$ax^2 - a\alpha - b\beta = p\varphi. \tag{21}$$

Если бы $a\alpha+b\beta$ дѣлилось на p, то на p раздѣлилось бы и x, что невозможно, ибо въ сравненіи

$$x^2 \equiv \alpha + \beta i \ (mod.\ a+bi)$$

$\alpha+\beta i$ предполагается не дѣлящимся на $a+bi$. Слѣдовательно ни a, ни $a\alpha+b\beta$ не дѣлятся на p; поэтому равенство (21) только тогда возможно, когда

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a\alpha+b\beta}{p}\right) = +1. \tag{22}$$

Пусть теперь (22) удовлетворено; тогда (21) можно удовлетворить приличнымъ выборомъ x и φ. Но равенство (21) можно написать такъ:

$$a(x^2 - \alpha - a\varphi) = b(\beta + b\varphi).$$

Такъ какъ a и b числа первыя между собою, то

$$\beta + b\varphi = -a\psi, \quad x^2 - \alpha - a\varphi = -b\psi;$$

т. е. равенство (21) влечетъ за собою равенства (20); иначе—условіе (22) не только необходимо, но и достаточно.

Рядъ тѣхъ же умозаключеній, что въ концѣ предъидущаго случая, дастъ намъ равенство

$$y=\frac{x\varphi(x^4)}{\psi(x^4)},\ x=sin'am\,t,\ y=sin'am(a+bi)t. \qquad (41)$$

Очевидно, формулы (40) и (41) вѣрны и въ томъ случаѣ, когда a четно, а b нечетно.

Предъидущій результатъ можно выразить иными словами такъ: *дифференціальное уравненіе*

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=(a+bi)\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad (42)$$

имѣетъ интеграломъ (41), *если* $y=0$ *при* $x=0$.

Будемъ употреблять обозначеніе:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\omega; \qquad (43)$$

тогда по общей теоріи эллиптическихъ функцій одинъ изъ періодовъ $sin'am\,t$ есть 4ω. Замѣтивъ же, что

$$sin'am(2\omega+u)=-sin'am\,u,\ sin'am(2\omega i+ui)=-isin'am\,u$$
$$=-sin'am\,iu,$$

выводимъ послѣдовательно

$$sin'am(2\omega i+u)=-sin'am\,u,\ sin'am(2\omega+2\omega i+u)=sin'am\,u.$$

Отсюда заключаемъ, что второй періодъ функціи $sin'am$ есть $2(1+i)\omega$. Меньшихъ періодовъ, очевидно, не можетъ быть. Замѣтимъ, что 4 есть число, кратное $2(1+i)$.

§ 64. *Будемъ предполагать $a+bi$ первоначальнымъ, нечетнымъ числомъ*. Предположимъ также, что $\frac{xU}{V}$ несократимая дробь. Положимъ далѣе, что ни a, ни b не равны нулю. Чтобы опредѣлить степень многочлена U относительно x, должно, во первыхъ, опредѣлить число корней уравненія $xU=0$ и, во вторыхъ, доказать, что это уравненіе не имѣетъ многократныхъ корней.

Изъ теоріи эллиптическихъ функцій извѣстно, что функція $sin'am\,t$ обращается въ нуль только тогда, когда $t=2(\alpha+\beta i)\omega$, гдѣ

α и β какія нибудь цѣлыя числа. Если предположимъ поэтому въ формулѣ (40)

$$t = \frac{2(\alpha + \beta i)\omega}{a + bi},$$

то y обратится въ нуль. Итакъ, если узнаемъ, сколько различныхъ значеній имѣетъ выраженіе

$$sin' am \frac{2(\alpha + \beta i)\omega}{a + bi}, \tag{44}$$

то узнаемъ, сколько различныхъ корней имѣетъ уравненіе $xU=0$. Положимъ, что δ нѣкоторое цѣлое, дѣйствительное число, абсолютная величина котораго менѣе $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Если

$$\alpha + \beta i = \delta + (\mu + \nu i)(a + bi),$$

гдѣ $\mu + \nu i$ цѣлое Гауссово число, то выраженіе (44) равно

$$\pm sin' am \frac{2\delta\omega}{a + bi};$$

поэтому для нахожденія всѣхъ различныхъ корней уравненія $xU=0$ должно только разсмотрѣть тѣ значенія выраженія (44), которыя получимъ, если $\alpha + \beta i$ приравняемъ одному изъ цѣлыхъ чиселъ:

$$-\frac{a^2 + b^2 - 1}{2}, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \frac{a^2 + b^2 - 1}{2}. \tag{45}$$

Положимъ, что δ и δ' различныя числа изъ ряда (45). Предположеніе

$$sin' am \frac{2\delta\omega}{a + bi} = sin' am \frac{2\delta'\omega}{a + bi} \tag{46}$$

влечетъ за собою равенство

$$\frac{\delta\omega}{a + bi} = \pm \frac{\delta'\omega}{a + bi} + (\mu + \nu i)\omega,$$

иначе $\delta \equiv \pm \delta' (mod. a + bi)$. Но послѣднее сравненіе предполагаетъ

и слѣдующее: $\delta \equiv \pm \delta'(mod.\ a-bi)$; слѣдовательно $\delta \equiv \pm \delta'(mod.\ a^2+b^2)$. Такъ какъ δ и δ' изъ ряда (45), то δ или $=\delta'$, или $=-\delta'$; но при послѣднемъ предположеніи равенство (46) не удовлетворяется. Итакъ $xU=0$ имѣетъ a^2+b^2 различныхъ корней.

Продифференцируемъ равенство $yV=xU$:

$$V\frac{dy}{dx}+y\frac{dV}{dx}=U+x\frac{dU}{dx}. \tag{47}$$

Если $xU=0$ имѣетъ равные корни, то $U=0$, $x\dfrac{dU}{dx}=0$, $y=0$; слѣдовательно $V\dfrac{dy}{dx}=0$. Но, полагая x равнымъ выраженію (44), имѣемъ

$$\frac{1}{m}\frac{dy}{dx}=\frac{cos' am\ mt\ \Delta' am\ mt}{cos' am\ t\ \Delta' am\ t}=\pm\frac{1}{cos' am\ t \Delta' am\ t},$$

гдѣ $m=a+bi$. Такъ какъ въ предъидущемъ выраженіи $cos' am\ t \Delta' am t$ не можетъ равняться безконечности, то $V=0$, что противно предположенію, что $\dfrac{xU}{V}$ несократимая дробь.

Итакъ степень $U=\varphi(x^4)$ относительно x есть a^2+b^2-1.

Равенство (42) не измѣнится, если x замѣнимъ через $\dfrac{1}{x}$, а y через $\dfrac{1}{i^{2\mu}y}$ (множитель $i^{2\mu}$ введенъ здѣсь вслѣдствіе того, что при преобразованіи въ обѣ части (42) входитъ $\sqrt{-1}$); слѣдовательно

$$\frac{1}{i^{2\mu}y}=\frac{\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\psi\left(\frac{1}{x^4}\right)};\ i^{2\mu}y=\frac{x\psi\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{x^4}\right)}. \tag{48}$$

Если въ числителѣ и знаменателѣ дроби (48) уничтожить знаменатели, то должна получиться опять несократимая дробь. Если

бы степень $\psi(x^4)$ была менѣе степени $\varphi(x^4)$, то числитель новой дроби дѣлился бы на степень x, высшую первой, что невозможно, какъ мы доказали выше. Если бы степень $\psi(x^4)$ была болѣе степени $\varphi(x^4)$, то знаменатель новой дроби дѣлился бы на x. Итакъ степени U и V одинаковы; т. е. степень V есть также a^2+b^2-1.

Изъ равенства (48) можемъ вывести интересныя свойства коэффиціентовъ U и V. Но прежде опредѣлимъ постоянные коэффиціенты U и V. Изъ равенства $\frac{y}{x}=\frac{U}{V}$ слѣдуетъ, если положить $x=0$ и если обозначить черезъ a_0 постоянный членъ многочлена U, а черезъ b_0 такой же членъ V,

$$\Big/_{x=0}\frac{y}{x}=\Big/_{x=0}\frac{dy}{dx}=\Big/_{x=0}\frac{m\cos' am\ mt\ \Delta' am\ mt}{\cos' am\ t\ \Delta' am\ t}=m=\frac{a_0}{b_0},$$

гдѣ $m=a+bi$; изъ предпослѣдняго равенства заключаемъ

$$a_0=m=a+bi,\ b_0=1.$$

Полагая $p=a^2+b^2$, можемъ написать

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x^4)&=m+A_1x^4+A_2x^8+\ldots+A_{\frac{1}{4}(p-1)}x^{p-1},\\ \psi(x^4)&=1+B_1x^4+B_2x^8+\ldots+B_{\frac{1}{4}(p-1)}x^{p-1}.\end{aligned}\right\}\quad(49)$$

Равенство (48) можно написать такъ:

$$i^{2\mu}\frac{\varphi(x^4)}{\psi(x^4)}=\frac{\psi\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{x^{p-1}\psi\left(\frac{1}{x^4}\right)}{x^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x^4}\right)}.$$

Называя множитель, пока неопредѣленный, черезъ g, получаемъ

$$i^{2\mu}\varphi(x^4)=gx^{p-1}\psi\left(\frac{1}{x^4}\right),\ \psi(x^4)=gx^{p-1}\varphi\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Если напишемъ эти равенства подробно и приравняемъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x, то получимъ

$$i^{2\mu} m = g\, B_{\frac{1}{4}(p-1)},\ i^{2\mu} A_1 = g B_{\frac{1}{4}(p-5)}, \ldots .\ i^{2\mu} A_{\frac{1}{4}(p-1)} = g,$$

$$1 = g A_{\frac{1}{4}(p-1)},\ B_1 = g A_{\frac{1}{4}(p-5)}, \ldots\ B_{\frac{1}{4}(p-1)} = gm.$$

Если возьмемъ $g^2 = i^{2\mu}$, то оба ряда равенствъ будутъ согласны между собою. Итакъ $g = i^{-\nu}$, гдѣ $\nu = 0$, 1, 2, 3, — чему именно, пока неизвѣстно; а слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{i^{\nu} x(B_{\frac{1}{4}(p-1)} + B_{\frac{1}{4}(p-5)} x^4 + \ldots + B_1 x^{p-5} + x^{p-1})}{1 + B_1 x^4 + B_2 x^8 + \ldots + B_{\frac{1}{4}(p-5)} x^{p-5} + B_{\frac{1}{4}(p-1)} x^{p-1}}, \\ y &= sin'am\, m\, t,\ x = sin'am\, t,\ B_{\frac{1}{4}(p-1)} = i^{-\nu} m = i^{-\nu}(a + bi). \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Почти дословно тѣ же разсужденія придется повторить для того, чтобы доказать, что формула (50) вѣрна и для случая $a=0$ или $b=0$. Ясно только, что полная система вычетовъ будетъ уже не (45). Впрочемъ для этого случая равенства (50) прямо слѣдуютъ изъ тѣхъ теоремъ, которыя извѣстны въ теоріи умноженія аргументовъ эллиптическихъ функцій.

Очень важно для послѣдующаго доказать, что всѣ коэффиціенты B дѣлятся на m. Докажемъ это.

Дѣля въ формулѣ (50) числитель на знаменатель, мы можемъ y представить въ видѣ безконечнаго ряда:

$$y = c_1 x + c_5 x^5 + c_9 x^9 + \ldots + c_{4\mu+1} x^{4\mu+1} + \ldots, \qquad (51)$$

гдѣ c_1, c_5, c_9 $c_{4\mu+1}$ суть цѣлыя комплексныя числа, ибо первый членъ дѣлителя 1. Коэффиціенты c легко опредѣлимъ черезъ коэффиціенты B, если умножимъ обѣ части равенства (51) на знаменатель дроби (50) и первую часть результата замѣнимъ числителемъ (50); такимъ образомъ получаемъ

$$c_1=i^\nu B_{\frac{1}{4}(p-1)},\ c_5=i^\nu B_{\frac{1}{4}(p-5)}-B_1c_1,\ \ldots \text{ и такъ далѣе.} \qquad (52)$$

Тотъ же рядъ (51) можно получить инымъ путемъ. Для этого въ равенствѣ (37) расположимъ, слѣдуя биному Ньютона, $(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$ по восходящимъ степенямъ x и проинтегрируемъ. Тогда получимъ

$$t=x+\beta_5x^5+\beta_9x^9+\beta_{13}x^{13}+\ldots,$$

$$t^\nu=x^\nu+\beta^{(\nu)}_{\nu+4}x^{\nu+4}+\beta^{(\nu)}_{\nu+8}x^{\nu+8}+\beta^{(\nu)}_{\nu+12}x^{\nu+12}+\ldots,$$

гдѣ всѣ β—раціональныя, дѣйствительныя числа. Очевидно, y получится замѣною t черезъ mt изъ ряда:

$$x=sin'am\,t=t+\gamma_5t^5+\gamma_9t^9+\ldots,$$

который легко получается изъ предъидущихъ двухъ рядовъ; γ_5, γ_9, γ_{13}, . . . раціональныя, дѣйствительныя числа. Итакъ

$$\begin{aligned} y=sin'am\,mt &= mt+\gamma_5m^5t^5+\gamma_9m^9t^9+\ldots+\gamma_{4\mu+1}m^{4\mu+1}t^{4\mu+1}+\ldots \\ &= m(x+\beta_5x^5+\beta_9x^9+\ldots+\beta_{4\mu+1}x^{4\mu+1}+\ldots) \\ &+ m^5\gamma_5(x^5+\beta^{(5)}_9x^9+\beta^{(5)}_{13}x^{13}+\ldots+\beta^{(5)}_{4\mu+1}x^{4\mu+1}+\ldots) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (53)$$

Сравнивая ряды (51) и (53), получаемъ

$$c_1=m,\quad c_5=\beta_5m+\gamma_5m^5,\ \ldots$$

$$c_{4\mu+1}=\beta_{4\mu+1}m+\gamma_5\beta^{(5)}_{4\mu+1}m^5+\ldots+\gamma_{4\mu+1}m^{4\mu+1}.$$

Отсюда видимъ, что

$$c_{4\mu+1}=\frac{m}{\rho}f(m^4),$$

гдѣ ρ нѣкоторое дѣйствительное цѣлое число, а $f(m^4)$—цѣлая, съ цѣлыми дѣйствительными, коэффиціентами функція m^4.

Пусть n есть нѣкоторый нечетный первоначальный дѣлитель ρ. Такъ какъ $c_{4\mu+1}$ цѣлое мнимое число, то

$$mf(m^4)\equiv 0 (mod.\ n). \tag{54}$$

Но ρ получается въ знаменателѣ вслѣдствіе ряда вычисленій, не зависящихъ отъ m; а потому сравненіе (54) вѣрно для всякаго значенія m. Намъ извѣстно, что число вычетовъ въ полной системѣ вычетовъ по модулю n есть $N(n)$; сравненіе же (54) можетъ только имѣть столько корней, сколько единицъ въ показателѣ высшей степени m [1]), т.-е. $4\mu+1$. Всѣ эти $4\mu+1$ корней сравненія (54) должны содержать въ себѣ всѣ члены полной системы вычетовъ по модулю n; слѣдовательно $4\mu+1 \geqq N(n)$. Отсюда слѣдуетъ, что знаменатели, входящіе въ коэффиціенты c_1, c_5, c_9, c_{13}, . . . c_{p-8} и c_{p-4}, состоятъ изъ первоначальныхъ чиселъ, норма которыхъ менѣе $p= =N(m)$; а потому въ нихъ m не сокращается съ ρ. Итакъ коэффиціенты c_1, c_5, $c_9 \ldots c_{p-8}$ и c_{p-4} дѣлятся на m.

Изъ равенствъ же (52) постепенно выводимъ, что $B_{\frac{1}{4}(p-1)}$, $B_{\frac{1}{4}(p-5)}$, $B_{\frac{1}{4}(p-9)}$, . . . B_2, B_1 дѣлятся на m. Итакъ

$$sin'am\,mt = sin'am(a+bi)t = i^\nu \cdot \frac{(sin'am\,t)^{N(m)} + mP}{1+mQ}, \tag{55}$$

гдѣ P и Q цѣлыя, съ цѣлыми коэффиціентами, функціи $sin'am\,t$.

Для опредѣленія величины i^ν положимъ въ формулѣ (55) $t=\omega$; тогда $x=1$, а $y=sin'am(a+bi)\omega=i^\nu$. Но величина $sin'am\,t$ не измѣняется отъ прибавленія къ t величины $2(1+i)\omega$; а потому величина ν зависитъ отъ того, какой остатокъ даетъ нечетное число $a+bi$ при дѣленіи на $2+2i$. Нечетныя числа относительно модуля $2+2i$ раздѣляются на четыре категоріи: сравнимыя съ 1, съ i, -1 и $-i$. Замѣтивъ же, что

$sin'am\omega=+1$, $sin'am\,i\omega=i$, $sin'am(-\omega)=-1$, $sin'am(-i\omega)=-i$,

[1]) Доказательство этой теоремы для мнимаго модуля и мнимыхъ корней не отличается отъ доказательства, даннаго Леженъ-Дирикле въ § 26 его Vorlesungen для дѣйствительнаго модуля и дѣйствительныхъ корней.

заключаемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \text{когда } m\equiv +1 (mod.\ 2+2i), \text{ то } \nu=0,\ i^\nu=+1; \\ \text{,,}\quad m\equiv +i\ (mod.\ 2+2i), \text{ то } \nu=1,\ i^\nu=+i; \\ \text{,,}\quad m\equiv -1 (mod.\ 2+2i), \text{ то } \nu=2,\ i^\nu=-1; \\ \text{,,}\quad m\equiv -i\ (mod.\ 2+2i), \text{ то } \nu=3,\ i^\nu=-i. \end{array}\right\} (56)$$

Выведенныхъ нами свойствъ лемнискатныхъ функцій достаточно, чтобы доказать законъ взаимности биквадратичныхъ вычетовъ, если только доказать одну общую теорему, относящуюся вообще до уравненій, въ которыхъ коэффиціентъ при высшей степени неизвѣстнаго—единица.

§ 65. Теорема. *Дано уравненіе*

$$x^\mu+a_1x^{\mu-1}+a_2x^{\mu-2}+\ldots+a_{\mu-1}x+a_\mu=0, \qquad (57)$$

въ которомъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\mu$ *цѣлыя Гауссовы числа, а* μ *цѣлое положительное число; корни этого уравненія* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \xi, \eta, \zeta$. *Пусть* $z=f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta, \zeta)$ *нѣкоторая функція, цѣлая и съ цѣлыми коэффиціентами, всѣхъ или нѣкоторыхъ корней уравненія* (57). *Если* z *равно раціональному Гауссову числу (т.-е. числу вида* $a+bi$, *гдѣ* a *и* b *дѣйствительныя раціональныя числа), то это число —цѣлое Гауссово число.*

Доказательство. Будемъ всячески замѣнять одни корни другими въ $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta, \zeta)$. Пусть z при такихъ замѣнахъ однихъ корней другими получитъ различныя значенія: $z', z'', z''', \ldots$ Составимъ уравненіе

$$(x-z)(x-z')(x-z'')(x-z''')\ldots=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_n=0.$$

Коэффиціенты $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ суть симметричныя функціи корней $z, z', z'', z''', \ldots$, а слѣдовательно симметричныя функціи $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \xi, \eta$ и ζ; а потому эти коэффиціенты, выражаясь цѣлыми функціями $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\mu$, будутъ цѣлыя мнимыя числа. Пусть $z=\frac{c}{d}$, тогда

$$-\frac{c^n}{d}=b_1c^{n-1}+b_2c^{n-2}d+b_3c^{n-3}d^2+\ldots+b_nd^{n-1};$$

т.-е. дробь равна цѣлому числу. Итакъ z равно цѣлому числу.

§ 66. Для полученія различныхъ корней уравненія $xU=0$ мы на страницѣ 292 брали дробь $\frac{2\delta\omega}{a+bi}$ и придавали δ всѣ значенія ряда (45). Но можно эти же корни получить, если всѣ числа ряда (45) умножить на $1+i$ и приравнивать δ числамъ новаго ряда, ибо тогда вмѣсто (45) опять получимъ полную систему вычетовъ по модулю $a+bi$, нечетному и первоначальному. Дѣлить $2\omega(1+i)$, а не 2ω на $a+bi$ представляетъ выгоду въ томъ отношеніи, что тогда можно приравнивать δ членамъ любой полной системы вычетовъ. Изображеніе всѣхъ корней уравненія $xU=0$ по послѣднему способу распространяется и на случаи, когда или $a=0$, или $b=0$.

Будемъ для краткости называть черезъ m число первоначальное, нечетное, будетъ ли оно вида $a+bi$, или a, или bi. Положимъ

$$\frac{2(1+i)\omega}{m}=h.$$

Пусть $p=N(m)$ и g такой первообразный корень модуля m, что

$$g^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv i(mod.\ m). \tag{58}$$

Всѣ корни уравненія $U=0$ выразятся такъ:

$$sin'am\,h,\ sin'am\,gh,\ sin'am\,g^2h,\ldots.sin'am\,g^{p-2}h.$$

Составимъ слѣдующую функцію этихъ корней:

$$P(h)=sin'am\,h.\ sin'am\,gh.\ sin'am\,g^2h\,.\,.\,.\,.\,.\,sin'am\,g^{\frac{1}{4}(p-5)}h. \tag{59}$$

Разсмотримъ нѣкоторыя свойства этой функціи.

Вслѣдствіе сравненія (58) имѣемъ

$$sin'am\,g^{\frac{1}{4}(p-1)+\alpha}h=i\,sin'am\,g^\alpha h,\ sin'am\,g^{\frac{1}{2}(p-1)+\alpha}h=-sin'am\,g^\alpha h,$$

$$\sin' am\, g^{\frac{3}{4}(p-1)+\alpha} h = -i \sin' am\, g^{\alpha} h.$$

Отсюда слѣдуютъ два главныя свойства функціи $P(h)$.

1) $P(gh)=iP(h)$, $P(g^2h)=-P(h)$, $P(g^3h)=-iP(h)$, $P(g^4h)=P(h)$.

2) $\sin' am\, h.\ \sin' am\, gh.\ \sin' am\, g^2h \ldots\ldots \sin' am\, g^{\nu-2}h$

$$=P(h)\, P(g^{\frac{1}{4}(p-1)}h) P(g^{\frac{1}{2}(p-1)}h) P(g^{\frac{3}{4}(p-1)}h) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} P(h)^4.$$

Но произведеніе всѣхъ корней равно послѣднему члену уравненія $U=0$; слѣдовательно

$$P(h)^4 = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} i^{-\nu} m. \tag{60}$$

Если n первоначальное Гауссово число, сравнимое съ i^{λ} по модулю $2+2i$, то изъ равенства (55) и сравненій (56) слѣдуетъ

$$i^{\lambda} \sin'^{N(n)} am t = \sin' am\, nt + n T(t), \tag{61}$$

гдѣ $T(t)$ цѣлая, съ цѣлыми комплексными коэффиціентами, функція $\sin' am\, t$ и $\sin' am\, nt$.

Положимъ въ равенствѣ (61) $t=h, gh, g^2h, \ldots\ldots g^{\frac{1}{4}(p-5)}h$ и перемножимъ полученные результаты:

$$i^{\frac{1}{4}\lambda(p-1)} P(h)^{N(n)} = P(nh) + nH(h), \tag{62}$$

гдѣ $H(h)$ цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами функція корней, уравненія $U=0$. Умножимъ обѣ части (62) на $P(h)^3$:

$$i^{\frac{1}{4}(p-1)\lambda} P(h)^{N(n)+3} = P(h)^3 P(nh) + nH(h)P(h)^3.$$

Пусть $n \equiv g^{\rho}$ (*mod. m*); тогда $P(nh)=i^{\rho} P(h)$. Пользуясь равенствомъ (60) и обозначая, ради краткости, $N(n)$ черезъ r, можемъ написать:

$$(-1)^{\frac{1}{16}(p-1)(r+3)} i^{\frac{1}{4}(p-1)\lambda - \frac{1}{4}(r+3)\nu} m^{\frac{1}{4}(r+3)} - (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} i^{\rho-\nu} m$$

$$= nH(h)P(h)^3.$$

Первая часть этого равенства—цѣлое число; слѣдовательно $H(h)P(h)^3$ —раціональное Гауссово число, а слѣдовательно, вслѣдствіе послѣдней нами доказанной теоремы,—цѣлое число. Поэтому вмѣсто послѣдняго равенства получимъ сравненіе съ модулемъ n; такъ какъ m не дѣлится на n, то обѣ части сравненія можно будетъ раздѣлить на m, и тогда получимъ

$$(-1)^{\frac{1}{16}(p-1)(r-1)} i^{\frac{1}{4}(p-1)\lambda-\frac{1}{4}(r-1)\nu} m^{\frac{1}{4}(r-1)} \equiv i^{\rho} \pmod{n}. \quad (63)$$

Вспомнивъ, что по опредѣленію символа Эйзенштейна

$$m^{\frac{1}{4}(r-1)} \equiv \left[\frac{m}{n}\right] \pmod{n},\ i^{\rho} \equiv n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \left[\frac{n}{m}\right] \pmod{m},$$

можемъ сравненіе (63) замѣнить равенствомъ

$$i^{\frac{1}{4}\left\{N(m)-1\right\}\lambda} \left[\frac{m}{n}\right] = (-1)^{\frac{1}{16}(p-1)(r-1)} i^{\frac{1}{4}\left\{N(n)-1\right\}\nu} \left[\frac{n}{m}\right]. \quad (64)$$

Если n и m сравнимы съ 1 по модулю $2+2i$, то предъидущее равенство упрощается:

$$\left[\frac{m}{n}\right] = (-1)^{\frac{1}{16}\left\{N(m)-1\right\}\left\{N(n)-1\right\}} \left[\frac{n}{m}\right]. \quad (65)$$

Достаточно было бы вывести законъ взаимности въ послѣднемъ видѣ, ибо всегда вопросъ можно привести къ случаю

$$n \equiv m \equiv 1 \pmod{2+2i}.$$

§ 67. На свойствахъ лемнискатныхъ функцій не только основана теорія биквадратичныхъ вычетовъ, но еще другія числовыя теоремы. Между такими теоремами особенно важна одна теорема Гаусса. Эта теорема даетъ очень замѣчательный способъ разложенія первоначальнаго числа на два квадрата.

Если вторую часть равенства (55) представить въ видѣ безконечнаго ряда (51), то легко замѣтить, что на $m=a+bi$ дѣлятся не только коэффиціенты c_1, c_5, c_9, ... c_{p-4}, но и c_{p+4}, c_{p+8}, c_{p+12}, ... ad infinitum. Это слѣдуетъ изъ того, что знаменатель имѣетъ видъ $1+mQ$. Итакъ только одинъ коэффиціентъ c_p не дѣлится на m. Будемъ въ этомъ параграфѣ полагать

$$m \equiv 1 \ (mod.\ 2+2i).$$

Мы всегда имѣемъ

$$y = \frac{xU}{V} = c_p x^p + mF(x), \tag{66}$$

гдѣ $F(x)$ безконечный рядъ съ цѣлыми коэффиціентами передъ степенями x. Если помножимъ обѣ части равенства (66) на V, то, очевидно, коэффиціенты при x^p въ xU и въ $V(c_p x^p + mF(x))$ должны быть равны между собою; слѣдовательно, если A и B цѣлыя числа,

$$1 = c_p + m(A + Bi) \text{ или } c_p \equiv 1 \ (mod.\ m).$$

Въ разложеніи же $\frac{dy}{dx}$ всѣ коэффиціенты будутъ дѣлиться на m, ибо $\frac{d}{dx}(x^p) = px^{p-1}$. Поэтому выраженіе

$$\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^4}}{\sqrt{1-x^4}},$$

развернутое въ безконечный рядъ по восходящимъ степенямъ x, будетъ имѣть цѣлые комплексные коэффиціенты передъ степенями x. Развертывая $\sqrt{(1-y^4):(1-x^4)}$ съ помощью бинома Ньютона, получимъ рядъ, состоящій изъ членовъ вида $lx^{4s}y^{4r}$, гдѣ s и r цѣлыя числа, а l дробь, знаменатель которой есть нѣкоторая степень двухъ. Замѣняя въ послѣднемъ рядѣ y черезъ $x^p + mF(x)$, мы получимъ члены, дѣлящіеся на m и не дѣлящіеся на m. Такъ какъ знаменатели суть только степени двухъ, то члены, не дѣлящіеся на m, будутъ тѣ же, что получаемые при развертываніи

$$\sqrt{\frac{1-x^{4p}}{1-x^4}} \text{ или } \sqrt{\frac{(1-x^4)^p}{1-x^4}} = (1-x^4)^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

Отсюда видимъ, что

$$\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} = (1-x^4)^{\frac{1}{2}(p-1)} + mH(x), \tag{67}$$

гдѣ $H(x)$ безконечный рядъ съ цѣлыми комплексными коэффиціентами передъ степенями x. Вмѣсто равенства (67) можемъ написать, полагая $p=mm'=(a+bi)(a-bi)$,

$$m'c_p x^{p-1}+F'(x)=(1-x^4)^{\frac{1}{2}(p-1)}+mH(x). \qquad (67')$$

Коэффиціентъ при x^{p-1} въ первой части равенства (67′), очевидно, сравнимъ съ m' по модулю m; въ выраженіи же $(1-x^4)^{\frac{1}{2}(p-1)}$ коэффиціентъ при x^{p-1} будетъ

$$\Gamma=\frac{(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\left(\frac{1}{2}(p-1)\right)!}{\frac{1}{4}(p-1)!\,\frac{1}{4}(p-1)!}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\frac{(p-1)(p-3)\ldots.\frac{1}{2}(p+3)}{2.\ 4.\ 6\ldots.\ \frac{1}{2}(p-1)}. \qquad (68)$$

Отсюда видимъ, что

$$m'=a-bi\equiv(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\frac{(p-1)(p-3)\ldots.\frac{1}{2}(p+3)}{2.\ 4.\ 6\ldots.\ \frac{1}{2}(p-1)}\ (mod.\ a+bi). \qquad (69)$$

Помножимъ обѣ части сравненія (69) на $a-bi$; тогда получимъ сравненіе

$$(a-bi)^2\equiv(a-bi)\Gamma\ \ (mod.\ p),$$

откуда

$$a^2-b^2\equiv a\Gamma\ (mod.\ p),\quad 2ab\equiv b\Gamma\ (mod.\ p).$$

Такъ какъ p число первоначальное, то послѣднее сравненіе можно сократить на b, и тогда получаемъ

$$2a\equiv(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\frac{(p-1)(p-3)\ldots.\frac{1}{2}(p+3)}{2.\ 4.\ 6\ldots.\ \frac{1}{2}(p-1)}\ (mod.\ p). \qquad (70)$$

Это и есть теорема Гаусса, о которой упомянуто въ началѣ этого параграфа; она была дана Гауссомъ въ концѣ первой части Theoria residuorum biquadraticorum (2-ой томъ полнаго собранія сочиненій). Сравненіе (70) даетъ намъ способъ разложенія первоначальнаго числа $p=4n+1$ на два квадрата. Тамъ же, гдѣ выведена эта замѣчательная теорема, приведена Гауссомъ другая, болѣе удобная для вычисленій, формула.

Назовемъ съ Гауссомъ:

через q произведеніе $1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots \frac{1}{4}(p-1)$,

через r произведеніе $\frac{1}{4}(p+3).\ \frac{1}{4}(p+7) \ldots\ldots \frac{1}{2}(p-1)$,

через s произведеніе $\frac{1}{2}(p+1).\ \frac{1}{2}(p+3) \ldots\ldots \frac{3}{4}(p-1)$,

через t произведеніе $\frac{1}{4}(3p+1).\ \frac{1}{4}(3p+5) \ldots\ldots (p-1)$.

Тогда при $p=8n+1$ имѣемъ $q\equiv t,\ r\equiv s\ (mod.\ p)$,

при $p=8n+5$ имѣемъ $q\equiv -t,\ r\equiv -s\ (mod.\ p)$;

въ обоихъ случаяхъ $qr\equiv st\ (mod.\ p)$. Но по теоремѣ Вильсона $qrst\equiv -1\ (mod.\ p)$; слѣдовательно

$$q^2r^2\equiv -1\ (mod.\ p),\quad qr\equiv \pm g^{\frac{1}{4}(p-1)}\ (mod.\ p),$$

гдѣ g первообразный корень модуля p. Помножимъ почленно последнее сравненіе на сравненіе (70):

$$2ag^{\frac{1}{4}(p-1)}\equiv \pm r^2\ (mod.\ p). \tag{71}$$

Такъ какъ $a^2+b^2=p$, то $b^2\equiv -a^2\ (mod.\ p)$. Такъ какъ b и a числа, первыя между собою, то можемъ написать

$$b\equiv ax\ (mod.\ p);$$

тогда изъ предпослѣдняго сравненія получимъ

$$x \equiv \pm g^{\frac{1}{4}(p-1)} \ (mod.\ p), \quad b \equiv \pm a g^{\frac{1}{4}(p-1)} \ (mod.\ p). \qquad (72)$$

Изъ сравненій (71) и (72) получаемъ

$$2b \equiv \pm r^2 \ (mod.\ p). \qquad (73)$$

Съ помощію формулъ (71) и (73) Гауссъ вычислилъ b и a для чиселъ, меньшихъ 200, первоначальныхъ и вида $4n+1$.

§ 68. Теорему о взаимности биквадратичныхъ вычетовъ мы вывели съ помощію нѣкоторой функціи $P(h)$, которая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что четвертая степень ея отъ замѣны одного корня уравненія, отъ котораго зависитъ дѣленіе лемнискаты, другимъ—не измѣняетъ своей величины. $P(h)$ принадлежитъ къ особому семейству циклическихъ функцій, нѣкоторыя свойства которыхъ пригодятся и для этой, и для слѣдующей главы.

Вообще *циклической функціею перваго порядка выраженій:*

$$sin'am\,h = sin'am\,\frac{2(1+i)\omega}{a+bi},\ sin'am\,gh,\ sin'am\,g^2h,\ldots\ldots,$$

въ которыхъ g есть первообразный корень по модулю $a+bi$, называется такая цѣлая, съ цѣлыми комплексными коэффиціентами, функція этихъ величинъ, которая не измѣняетъ своей величины при замѣнѣ h черезъ gh. Такимъ образомъ эта функція характеризуется равенствомъ

$$F(gh) = F(h).$$

Симметричная функція корней уравненія $U=0$ (см. равенство (40)) всегда дѣлится на m, если только не содержитъ постояннаго члена. Тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и циклическая функція перваго порядка. Доказать это свойство въ особенности важно для послѣдующей главы; это доказательство требуетъ разсмотрѣнія нѣкоторыхъ свойствъ корней уравненія $U=0$.

Уже было сказано, что всѣ корни уравненія $U=0$ получатся

изъ формулы $sin'am\,\dfrac{2(1+i)g^{\mu}\omega}{a+bi}$, если дѣлать $\mu=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots p-2$.

Возьмемъ любой корень $sin'am\,\dfrac{2(1+i)g^{n}\omega}{a+bi}$; тогда остальные корни

могутъ быть представлены формулою $sin'am\,\frac{2(1+i)g^{n+\alpha}\omega}{a+bi}$, гдѣ $\alpha=1, 2, 3, \ldots\ldots p-2$. Это g^{α} всегда можетъ быть замѣнено нѣкоторымъ нечетнымъ числомъ, дѣйствительнымъ или мнимымъ, сравнимымъ съ g^{α} по модулю $m=a+bi$. Итакъ всѣ корни получатся изъ одного умноженіемъ аргумента на нечетныя числа; слѣдовательно всѣ корни выражаются раціональными дробями, въ которыхъ числители и знаменатели—функціи любаго корня. Если $w^{(n)}$ и w два корня, то

$$w^{(n)}=\frac{wf(w)}{f_1(w)}$$

гдѣ $f(w)$ и $f_1(w)$ цѣлыя, съ цѣлыми коэффиціентами, функціи w^4. Пусть $w', w'', w''', w^{IV}, \ldots\ldots$ остальные корни уравненія $U=0$ кромѣ w; тогда можемъ написать

$$w^{(n)}=\frac{wf(w)f_1(w')f_1(w'')f_1(w''')\ldots\ldots}{f_1(w)f_1(w')f_1(w'')f_1(w''')\ldots\ldots}.$$

Въ этой дроби знаменатель есть симметричная функція корней $U=0$; слѣдовательно знаменатель есть нѣкоторое цѣлое число ϑ. Замѣчательно, что это цѣлое число не дѣлится на m. Дѣйствительно, постоянный членъ $f_1(x)$ есть 1, ибо доказательство, помѣщенное на страницѣ 294, того, что $b_0=1$, вѣрно и для m составнаго; симметричныя же функціи корней уравненія $U=0$, не содержащія постояннаго члена, какъ цѣлыя функціи коэффиціентовъ уравненія $U=0$, дѣлятся на m. Итакъ $\vartheta\equiv1$ $(mod.\ m)$. Функція

$$f_1(w')f_1(w'')f_1(w''')f_1(w^{IV})\ldots\ldots$$

есть симметричная функція всѣхъ корней $U=0$ кромѣ w, а поэтому выражается цѣлою функціею корня w. Отсюда заключаемъ, что

$$w^{(n)}=\frac{1}{\vartheta}(a_1w+a_5w^5+a_9w^9+a_{13}w^{13}+\ldots\ldots).$$

Показатели степени w берутся черезъ четыре, потому что $f(w)$, $f_1(w')$, $f_1(w'')$, $f_1(w''')$, ... содержатъ w, w', w'', ... только въ

степеняхъ, показатели которыхъ кратны четыремъ, а уравненіе $U=0$ имѣетъ корнями w^4, w'^4, w''^4, w'''^4,.... Числа ϑ, a_1, a_5, a_9, a_{13},....—цѣлыя Гауссовы.

Итакъ всѣ корни уравненія $U=0$ выражаются цѣлою, но обыкновенно съ дробными коэффиціентами, функціею одного изъ корней, при чемъ знаменатели коэффиціентовъ не содержатъ множитель m.

Обратимся теперь къ циклической функціи корней $F(h)$. Эта функція можетъ быть всегда выражена черезъ цѣлую, съ дробными коэффиціентами, функцію одного изъ корней уравненія $U=0$, такъ что

$$F(h)=b_0+b_1\, sin' am\,\frac{2t(1+i)\omega}{m}+b_2\, sin'^2 am\,\frac{2t(1+i)\omega}{m}+\ldots,$$

гдѣ t—цѣлое Гауссово число. Будемъ замѣнять t черезъ 1, g, g^2, g^3, g^4,....g^{p-2} и сложимъ результаты. Такъ какъ циклическая функція для всѣхъ корней имѣетъ одно и то же значеніе, то получимъ

$$(p-1)F(h)=(p-1)b_0+b_1\Sigma w+b_2\Sigma w^2+\ldots+b_{p-2}\Sigma w^{p-2};$$

члены, содержащіе корни въ степеняхъ, высшихъ $p-2$, предполагаются уничтоженными съ помощію уравненія $U=0$. Но Σw, Σw^2, Σw^3,..., какъ симметричныя функціи корней, равны цѣлымъ числамъ, дѣлящимся на m. Итакъ $F(h)$ равна раціональному числу; по теоремѣ же страницы 298 она равна цѣлому числу. Итакъ всякая циклическая функція корней уравненія $U=0$ равна цѣлому Гауссову числу.

Положимъ $b_0=0$ и разсмотримъ, какіе знаменатели могутъ входить во вторую часть равенства

$$F(h)=\frac{1}{p-1}[b_1\Sigma w+b_2\Sigma w^2+b_3\Sigma w^3+\ldots].$$

По условію $F(h)$ есть функція, съ цѣлыми коэффиціентами, корней $U=0$; поэтому въ b_1, b_2, b_3,... входятъ только тѣ знаменатели, которые входятъ въ цѣлыя функціи, опредѣляющія w', w'', w'''....

через w. Но доказано выше, что эти знаменатели не дѣлятся на первоначальное число m; также $p-1$ не дѣлится на m; выраженія же Σw, Σw^2, $\Sigma w^3, \ldots$ дѣлятся на m.

Всякая цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами, циклическая функція перваго порядка корней уравненія $U=0$, не содержащая члена независимаго отъ корней, равна цѣлому числу, дѣлящемуся на m.

Если функція $F(h)$ цѣлая функція, съ цѣлыми (Гауссовыми) коэффиціентами, корней уравненія $U=0$ и если она обладаетъ свойствомъ

$$F(gh)=-F(h),\quad F(g^2h)=F(h),$$

то такую функцію мы будемъ называть *циклической втораго порядка.*

Составимъ функцію $F(h)P(h)^2$, гдѣ $P(h)$ функція, опредѣленная равенствомъ (59). Функція $P(h)^2F(h)$ есть циклическая функція перваго порядка; слѣдовательно

$$F(h)P(h)^2=t,$$

цѣлому Гауссову числу, откуда

$$F(h)^2P(h)^4=t^2=F(h)^2.\,\varepsilon m,\quad \varepsilon=(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\,i^{-\nu}.$$

Но $F(h)^2$ также циклическая функція перваго порядка, слѣдовательно также цѣлое число; а потому t дѣлится на m, $t=t_1m$. Отсюда слѣдуетъ

$$F(h)^2=\varepsilon^{-1}t_1^{\,2}m=(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\,i^{\nu}t_1^{\,2}m.$$

Извлекая квадратный корень, получаемъ

$$F(h)=t_1\sqrt{(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\,i^{\nu}m};$$

т.-е. *циклическая функція втораго порядка ирраціональна только относительно* $\sqrt{i^\nu m}$.

Функція $P(h)$ есть циклическая функція четвертаго порядка. Вообще *циклической функціей четвертаго порядка мы называемъ*

такую цѣлую, съ цѣлыми коэффиціентами, функцію корней уравненія $U=0$, *которая удовлетворяетъ одному изъ условій*:

$$F_1(gh)=iF_1(h),\ F_2(gh)=-iF_2(h).$$

Функціи $F_1(h)P(h)^3$ и $F_2(h)P(h)$, очевидно, циклическія функціи перваго порядка; слѣдовательно онѣ равны цѣлымъ числамъ t' и t''; а потому

$$F_1(h)^4 P(h)^{12}=t'^4,\ F_2(h)^4 P(h)^4=t''^4.$$

Изъ послѣднихъ равенствъ слѣдуетъ

$$F_1(h)^4\varepsilon^3 m^3=t'^4=t_1'^4 m^4,\ F_2(h)^4\varepsilon m=t''^4=t_1''^4 m^4;$$

$$F_1(h)=t_1'\sqrt[4]{(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\,i^{3\nu} m},\ F_2(h)=t_1''\sqrt[4]{(-1)^{\frac{3}{4}(p-1)}\,i^{\nu} m^3}.$$

Итакъ *циклическая функція четвертаго порядка ирраціональна только или относительно*

$$\sqrt[4]{(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\,i^{3\nu} m},$$

или относительно

$$\sqrt[4]{(-1)^{\frac{3}{4}(p-1)}\,i^{\nu} m^3}.$$

§ 69. Перейдемъ къ циклическимъ функціямъ восьмаго порядка, при чемъ будемъ предполагать, что

$$m\equiv 1(mod. 2+2i),\ p=N(m)\equiv 1(mod.\ 8).$$

Будемъ по прежнему ради краткости обозначать

$$h=\frac{2(1+i)\omega}{m}.$$

Составимъ двѣ функціи:

$$\left.\begin{aligned} &sin^2 am\, h\, sin^2 am\, g^2 h\, sin^2 am\, g^4 h \ldots sin^2 am\, g^{2\lambda-2} h=Q(h),\\ &sin^2 am\, gh\, sin^2 am\, g^3 h\, sin^2 am\, g^5 h \ldots sin^2 am\, g^{2\lambda-1} h=R(h),\end{aligned}\right\}\quad (74)$$

гдѣ $8\lambda+1=p$, а g обозначаетъ первообразный корень модуля m. Изъ $Q(h)$ и $R(h)$ составимъ двѣ функціи:

$$Q(h)-ijR(h)=S(h)=S(h,j),\quad Q(h)+ijR(h)=S'(h)=S(h,j^5),\qquad (75)$$

гдѣ j есть нѣкоторый корень уравненія $x^2=i$.

Такъ какъ $\sin' am\, g^{2\lambda}h=i\sin' am\, h$ (предполагаемъ $g^{2\lambda}\equiv i \ (mod.\ m)$), то

$$Q(gh)=R(h),\quad R(gh)=iQ(h),\quad S(gh)=R(h)+jQ(h)=jS(h),$$

$$S'(gh)=R(h)-jQ(h)=j^5\{Q(h)+ijR(h)\}=j^5S'(h).$$

Отсюда выводимъ, что

$$S(gh)^8=S(h)^8,\quad S'(gh)^8=S'(h)^8.\qquad (76)$$

Замѣтимъ кстати, что j и j^5 суть два корня уравненія $x^2=i$, и потому функціи $S(h)$ и $S'(h)$ могутъ замѣнять другъ друга; но если $S(h)$ имѣетъ опредѣленное изъ двухъ значеніе, то $S'(h)$ равно другому значенію.

Далѣе, ради краткости, мы будемъ иногда писать S, S', Q, R, P вмѣсто $S(h), S'(h), Q(h), R(h), P(h)$.

Изъ S, S' и P можно составить циклическія функціи перваго порядка; эти функціи, напримѣръ S^2P^3, S'^2P^3, $SS'P$, также какъ и S^8, S'^8, равны числамъ вида $A+Bj$, гдѣ A и B цѣлыя Гауссовы числа. Это слѣдуетъ изъ того, что j не измѣняется при замѣнѣ h черезъ gh; поэтому, если предъидущія функціи не измѣняютъ своей величины отъ замѣны h черезъ gh, то неизмѣняютъ своей величины отдѣльно часть, независящая отъ j, и часть, содержащая j. Вообще, если $F(gh,z)=F(h,z)$, гдѣ z неопредѣленная величина, то $F(h,z)$ называется циклическою функціею перваго порядка; коэффиціенты при различныхъ степеняхъ z въ $F(h,z)$ будутъ циклическія функціи перваго порядка, т.-е. цѣлыя числа (мы полагаемъ $F(h,z)$ цѣлою, съ цѣлыми коэффиціентами, функціею z и корней уравненія $U=0$). Понятно, то же останется вѣрнымъ и въ томъ случаѣ, когда z замѣнимъ ирраціональнымъ числомъ j; поэтому то мы и функцію $F(h,j)$ называемъ циклическою.

Разсмотримъ три функціи: S^2P^3, S'^2P^3, $SS'P$.

$$S^2P^3=(Q^2-iR^2-2ijQR)P^3=(Q^2-iR^2)P^3-2ijP^4.$$

$P^4=m;P^3$ дѣлится на $\sqrt[4]{m^3}$. Такъ какъ S^2P^3 равно числу вида $A+Bj$, гдѣ A и B цѣлыя числа, то оно дѣлится на m и имѣетъ видъ $m(u-2ij)$. Также S'^2P^3 имѣетъ видъ $m(u+2ij)$. Наконецъ

$$S^2S'^2P^6=m^2(u^2+4i),$$

откуда слѣдуетъ

$$(SS'P)^2=m(u^2+4i). \qquad (77)$$

Что касается до первой степени $SS'P$, то имѣемъ

$$SS'P=(Q-ijR)(Q+ijR)P=P(Q^2+iR^2);$$

изъ послѣдняго равенства заключаемъ, что $SS'P$ есть Гауссово цѣлое число; а потому $m(u^2+4i)$ должно быть квадратомъ Гауссова цѣлаго числа; т.-е. $u^2+4i=mv^2$. Итакъ

$$S^2P^3=m(u-2ij),\ S'^2P^3=m(u+2ij),\ SS'P=mv,\ u^2+4i=mv^2. \qquad (78)$$

Мы видимъ, что S и S' не могутъ равняться нулю, ибо коэффиціенты при j въ S^2P^3 и S'^2P^3 равны $\pm 2mi$.

§ 70. Болѣе подробное знакомство съ функціями S и S' требуетъ знанія свойствъ чиселъ вида $A+Bj$, гдѣ A и B Гауссовы цѣлыя числа. Теоріею этихъ чиселъ мы теперь и займемся на столько, на сколько это необходимо для доказательства закона взаимности вычетовъ 8-ой степени.

Новыя комплексныя числа, которыя, ради краткости, будемъ называть *Эйзенштейновскими числами*, мы будемъ разсматривать не какъ множители обыкновенныхъ цѣлыхъ чиселъ, а какъ множители нѣкоторыхъ Гауссовыхъ чиселъ. Поэтому *сопряженными* для насъ будутъ цѣлыя числа $A+Bj$ и $A-Bj$. Произведеніе этихъ двухъ чиселъ, A^2-iB^2, будемъ называть *нормальнымъ произведеніемъ числа* $A+Bj$. Число комплексное Эйзенштейновское будемъ обозначать и иначе, а именно: $f(j)=a+bj+cj^2+dj^3$, гдѣ a, b, c и d дѣйствительныя, цѣлыя числа. Въ такомъ случаѣ

$$f(j)f(j^5)=\mathfrak{N}f(j), \tag{79}$$

нормальному произведенію $f(j)$. Нормою же $f(j)$, $Nf(j)$, будетъ $f(j)f(j^7)$, ибо это есть норма въ смыслѣ Гаусса, норма ирраціональная. Также $f(j^3)f(j^5)=Nf(j^3)$. Наконецъ *нормою нормальнаго произведенія* $f(j)$ будетъ

$$N\mathfrak{N}f(j)=f(j)f(j^3)f(j^5)f(j^7). \tag{80}$$

Во всякой теоріи комплексныхъ чиселъ очень важную роль играютъ комплексныя единицы. Въ теоріи Эйзенштейновскихъ чиселъ должно считать единицами такія числа, нормальныя произведенія которыхъ равны Гауссовымъ единицамъ, т.-е. или $+1$, или -1, или i, или $-i$. Поэтому очень важно знать всѣ рѣшенія четырехъ уравненій:

$$x^2-iy^2=+1, \text{ или} -1, \text{ или } i, \text{ или} -i.$$

Для этого достаточно найти всѣ рѣшенія уравненія $x^2-iy^2=1$, ибо умноженіе на степени j всегда дастъ изъ рѣшеній послѣдняго уравненія всѣ рѣшенія остальныхъ трехъ уравненій, опредѣляющихъ единицы.

§ 71. Уравненіе $x^2-iy^2=1$ есть частный случай уравненія $t^2-Du^2=1$, гдѣ D какое нибудь Гауссово цѣлое число, только не квадратъ. Теорія уравненія $t^2-Du^2=1$ намъ понадобится въ слѣдующей главѣ; а потому изучимъ ее здѣсь. Изучивъ общій вопросъ, легко перейдемъ къ частному.

Л е м м а. *Если a обозначаетъ ирраціональное, мнимое количество, то всегда можно найти безчисленное множество цѣлыхъ Гауссовыхъ чиселъ x и y, удовлетворяющихъ неравенству*

$$N(x-ay)<\frac{4}{N(y)}. \tag{81}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажемъ сначала, что всегда можно найти два Гауссова цѣлыя числа x и y, для которыхъ

$$N(x-ay)<A, \tag{82}$$

гдѣ A произвольное положительное число.

Пусть n цѣлое положительное число, для котораго

$$A > \frac{1}{2n^2},$$

и η мнимое количество, у котораго какъ часть, независимая отъ i, такъ и коэффиціентъ при i содержатся въ рядѣ чиселъ: $-n, -(n-1), -(n-2), \ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots n-2, n-1, n$. Мы видимъ, что η можетъ имѣть $(2n+1)^2$ различныхъ значеній. Для каждаго изъ этихъ $(2n+1)^2$ значеній η можно найти соотвѣтственное цѣлое Гауссово число ζ такое, что въ $\zeta - a\eta$ и коэффиціентъ при i, и часть, независимая отъ i, положительны и менѣе 1. Пусть $p\frac{1}{2n}$ и $q\frac{1}{2n}$ обозначаютъ наибольшія кратныя $\frac{1}{2n}$, содержащіяся въ двухъ частяхъ числа $\zeta - a\eta$. p и q имѣютъ одно изъ значеній: $0, 1, 2, 3, \ldots 2n-1$; слѣдовательно различныхъ системъ p и q будетъ $4n^2$, между тѣмъ какъ $\zeta - a\eta$ имѣетъ $(2n+1)^2$ значеній; поэтому хотя одна изъ системъ p и q повторится два раза. Пусть же для $\zeta - a\eta$ и $\zeta' - a\eta'$, p и q имѣютъ одинаковыя значенія; тогда въ выраженіи

$$x - ay = \zeta - a\eta - \zeta' + a\eta'$$

абсолютныя величины дѣйствительной части и коэффиціента при i менѣе $\frac{1}{2n}$; а потому

$$N(x-ay) < \frac{1}{2n^2},$$

слѣдовательно

$$N(x-ay) < A.$$

Разсмотримъ теперь $y = \eta - \eta'$; очевидно, дѣйствительная часть и коэффиціентъ при i въ этомъ выраженіи имѣютъ абсолютныя величины, не превышающія $2n$; слѣдовательно $N(y) \leqq 8n^2$, откуда

$$N(x-ay) < \frac{4}{N(y)}.$$

Такимъ образомъ доказано, что всегда можно найти по крайней мѣрѣ одну пару чиселъ x и y, удовлетворяющихъ условію (81).

Легко доказать, что паръ чиселъ x и y, удовлетворяющихъ (81), безчисленное множество. Вообще для даннаго n съ помощію предъидущихъ вычисленій можетъ быть найдено нѣсколько различныхъ величинъ $N(x-ay)$, удовлетворяющихъ условіямъ (81) и (82). Пусть наименьшее изъ такихъ $N(x-ay)$ равно числу A'; тогда, повторяя съ A' тѣ же разсужденія, что дѣлали съ A, найдемъ одну или нѣсколько новыхъ системъ значеній x и y, удовлетворяющихъ (81); при этомъ

$$N(x-ay)<A'. \tag{83}$$

Назовемъ наименьшее изъ найденныхъ $N(x-ay)$, удовлетворяющихъ (83), черезъ A''; тогда ищемъ x и y, удовлетворяющія неравенству

$$N(x-ay)<A''.$$

И такъ далѣе. Такимъ образомъ лемма доказана.

Изъ элементарной алгебры извѣстно, что

$$\sqrt{N(r+s)} \leqq \sqrt{N(r)} + \sqrt{N(s)},$$

гдѣ корни берутся положительными и гдѣ r и s—какія нибудь мнимыя количества. Положимъ, что $r=x-ay$, $s=2ay$; тогда

$$\sqrt{N(x+ay)} \leqq \sqrt{N(x-ay)} + \sqrt{N(2ay)}.$$

Принимая же въ разсчетъ неравенство (81), получаемъ

$$\sqrt{N(x+ay)} < 2\sqrt{N(ay)} + \frac{2}{\sqrt{N(y)}};$$

$$\sqrt{N(x^2-a^2y^2)} < 4\sqrt{N(a)} + \frac{4}{N(y)}.$$

Но y есть цѣлое Гауссово число; слѣдовательно $N(y) \geqq 1$; а потому

$$\sqrt{N(x^2-a^2y^2)} < 4\{\sqrt{N(a)}+1\}. \tag{84}$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что для всѣхъ x и y, удовлетворяющихъ (81), $N(x^2-a^2y^2)$ всегда менѣе нѣкотораго постояннаго предѣла.

Примѣнимъ послѣдній результатъ къ случаю $a=\sqrt{D}$ съ цѣлію доказать, что у уравненія

$$t^2-Du^2=1$$

есть цѣлыя рѣшенія кромѣ $t=\pm 1$, $u=0$.

Пусть x и y удовлетворяютъ (81). Такъ какъ x^2-Dy^2 цѣлое Гауссово число, норма котораго менѣе извѣстнаго предѣла, и число различныхъ x и y безконечно, то всегда существуетъ нѣкоторое Гауссово цѣлое число l, которому x^2-Dy^2 равно безчисленное множество разъ. Системъ Гауссовыхъ чиселъ a и b, не сравнимыхъ по модулю l, какъ извѣстно, $N(l)^2$; а потому между числами x и y, удовлетворяющими равенству $x^2-Dy^2=l$, всегда безчисленное множество сравнимыхъ по модулю l, x—съ другимъ x, y—съ другимъ y. Положимъ же, что

$$x\equiv x' \ (mod.\ l),\ y\equiv y' \ (mod.\ l),\ x^2-Dy^2=l,\ x'^2-Dy'^2=l.$$

Перемножимъ два послѣднія равенства:

$$(xx'-Dyy')^2-D(xy'-x'y)^2=l^2.$$

Но $xy'-x'y$ дѣлится на l; слѣдовательно $xx'-Dyy'$ дѣлится на l; поэтому величины

$$t=\frac{xx'-Dyy'}{l},\quad u=\frac{xy'-x'y}{l} \tag{85}$$

будутъ цѣлыми рѣшеніями уравненія

$$t^2-Du^2=1. \tag{86}$$

Положимъ $u=0$; тогда изъ равенствъ

$$xy'-yx'=0,\ x^2-Dy^2=x'^2-Dy'^2$$

заключаемъ, что

$$x+y'\sqrt{D}=\pm(x'+y\sqrt{D}).$$

Такъ какъ $\sqrt{D}$ ирраціонально, то имѣемъ отдѣльно $x=\pm x'$, $y=\pm y'$; это указываетъ на то, что только ограниченное число системъ чиселъ x и y даетъ $t=\pm 1$, $u=0$. Слѣдовательно уравненіе (86) имѣетъ цѣлыя рѣшенія, отличныя отъ $t=\pm 1$, $u=0$.

Понятно, какъ можно найти такія рѣшенія: для этого должно вмѣсто u брать всевозможныя числа, для которыхъ нормы суть постепенно возрастающія положительныя числа, могущія разлагаться на два квадрата; для каждаго изъ этихъ чиселъ составляемъ Du^2+1; когда $1+Du^2$ равняется квадрату, то получимъ t.

Разсмотримъ теперь, какая существуетъ связь между всѣми рѣшеніями уравненія (86) кромѣ $t=\pm 1$, $u=0$.

Замѣтимъ однако прежде, что $N(t+u\sqrt{D})$ не равно 1, исключая случай $t=\pm 1$, $u=0$ (подъ t и u мы всегда подразумѣваемъ рѣшенія (86)). Дѣйствительно,

$$N(t+u\sqrt{D}).N(t-u\sqrt{D})=N(t^2-Du^2)=1;$$

слѣдовательно, если $N(t+u\sqrt{D})=1$, то $N(t-u\sqrt{D})=1$;

$$N(t+u\sqrt{D})+N(t-u\sqrt{D})=2.$$

Но легко доказать для всякихъ мнимыхъ количествъ r и s равенство:

$$N(r+s)+N(r-s)=2N(r)+2N(s);$$

слѣдовательно

$$N(t)+N(u)N(\sqrt{D})=1.$$

$N(\sqrt{D})$—величина равная или большая единицы; t и u—цѣлыя Гауссовы числа; слѣдовательно предъидущее равенство требуетъ, или 1) чтобы $u=0$, $t=\pm 1$, или 2) чтобы $t=0$, $N(\sqrt{D})=1$. Первое предположеніе исключено нами изъ изслѣдованія; второе возможно только тогда, когда равенство (86) обращается въ

$$t^2\pm u^2=1,$$

что не входитъ въ наше изслѣдованіе, ибо D полагается не квадратомъ.

Если мы имѣемъ

$$N(t+u\sqrt{D})=N(t'+u'\sqrt{D}), \tag{87}$$

то можемъ положить

$$\frac{t'+u'\sqrt{D}}{t+u\sqrt{D}}=\tau+\upsilon\sqrt{D}, \tag{88}$$

гдѣ τ и υ цѣлыя числа, опредѣляющіяся изъ равенствъ:

$$\tau=tt'-Duu',\ \upsilon=tu'-t'u. \tag{89}$$

Легко видѣть, что τ и υ удовлетворяютъ уравненію (86). Изъ равенствъ (87) и (88) слѣдуетъ, что

$$N(\tau+\upsilon\sqrt{D})=1;$$

а потому $\tau=\pm1$, $\upsilon=0$. Итакъ, если удовлетворено условіе (87), то $t=\pm t'$, $u=\pm u'$; т. е. тогда рѣшенія уравненія (86) существенно не отличаются другъ отъ друга.

Всѣ рѣшенія уравненія (86) дѣлятся на группы по четыре рѣшенія, отличающіяся знаками передъ t и u. Величина $t+u\sqrt{D}$ имѣетъ для каждой группы четыре значенія:

$$\chi=t+u\sqrt{D},\ \ -\chi=-t-u\sqrt{D},\ \ \frac{1}{\chi}=t-u\sqrt{D},\ \ -\frac{1}{\chi}=-t+u\sqrt{D}.$$

$N(t+u\sqrt{D})$ для каждой группы имѣетъ только два значенія:

$$N(\chi)=N(t+u\sqrt{D})=N(-t-u\sqrt{D}),$$

$$N\left(\frac{1}{\chi}\right)=N(t-u\sqrt{D})=N(-t+u\sqrt{D}).$$

Мы будемъ называть *основною группою рѣшеній* ту группу, для которой та величина $N(t+u\sqrt{D})$, которая болѣе единицы, есть наименьшая изъ всѣхъ такихъ же величинъ другихъ группъ. Можно иначе характеризовать основную группу. Выраженіе $\rho+\frac{1}{\rho}$

увеличивается, начиная съ 2, если мы ρ увеличиваемъ, начиная съ 1; поэтому мы видимъ, что для основной группы

$$N(t+u\sqrt{D})+\frac{1}{N(t+u\sqrt{D})}=N(t+u\sqrt{D})+N(t-u\sqrt{D})$$

$$=2N(t)+2N(u)N(\sqrt{D}) \tag{90}$$

имѣетъ наименьшее значеніе, исключая случай $t=\pm1$, $u=0$.

Зная одно рѣшеніе t, u уравненія $t^2-Du^2=1$, отличное отъ $t=\pm1$, $u=0$, можно, пользуясь предъидущимъ опредѣленіемъ, найти основное рѣшеніе; правда, этотъ способъ, о которомъ сейчасъ скажемъ, мало практиченъ. Пусть найденное нами рѣшеніе (86) есть t', u' и пусть $N(t'+u'\sqrt{D})=b$; тогда требуется найти всевозможныя рѣшенія неравенствъ:

$$1<N(t)+N(u)N(\sqrt{D})\leq\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right).$$

Такихъ рѣшеній, очевидно, ограниченное число. t и u, придающія изъ всѣхъ этихъ рѣшеній выраженію $N(t)+N(u)N(\sqrt{D})$ наименьшую величину и удовлетворяющія уравненію $t^2-Du^2=1$, дадутъ основную группу.

Далѣе всегда будемъ обозначать черезъ T и U такое рѣшеніе основной группы, для котораго

$$N(T+U\sqrt{D})=\sigma>1. \tag{91}$$

Посредствомъ основнаго рѣшенія можно найти всѣ рѣшенія t и u уравненія $t^2-Du^2=1$; для этого существуетъ формула

$$t+u\sqrt{D}=\pm(T+U\sqrt{D})^n, \tag{92}$$

гдѣ n получаетъ всевозможныя цѣлыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Почти безполезно говорить, что для опредѣленія t и u должно отдѣльно приравнять раціональную и ирраціональную части равенства (92).

Чтобы доказать, что t и u, опредѣляемыя (92), дѣйствительно удовлетворяютъ (86), перемѣнимъ въ (92) знакъ у $\sqrt{D}$; тогда получаемъ

$$t-u\sqrt{D}=\pm(T-U\sqrt{D})^n. \tag{92'}$$

Перемножая почленно равенства (92) и (92′), при чемъ знаки передъ скобками беремъ одинаковые, получаемъ, что

$$t^2-Du^2=(T^2-DU^2)^n=1.$$

Докажемъ теперь, что кромѣ рѣшеній, заключающихся въ формулѣ (92) [1]), нѣтъ другихъ рѣшеній уравненія (86). Пусть τ и υ нѣкоторыя рѣшенія уравненія (86). Изъ (91) заключаемъ, что

$$N(T+U\sqrt{D})^n=\sigma^n.$$

Такъ какъ $\sigma>1$, то отъ измѣненія n отъ $-\infty$ до $+\infty$ σ^n измѣняется отъ 0 до ∞; поэтому всегда можно найти такое n, что

$$\sigma^n\leqq N(\tau+\upsilon\sqrt{D})<\sigma^{n+1}. \tag{93}$$

Въ томъ случаѣ, когда берется знакъ равенства, мы въ τ и υ имѣемъ рѣшеніе, опредѣляемое формулою (92), ибо доказано, что равенство $N(\tau+\upsilon\sqrt{D})=N(t+u\sqrt{D})$ влечетъ за собою $\tau=\pm t$, $\upsilon=\pm u$. Пусть же въ выраженіяхъ (93) должно брать только знаки неравенства. Раздѣлимъ всѣ части неравенствъ (93) на σ^n и будемъ употреблять обозначеніе

$$t_n+u_n\sqrt{D}=\pm(T+U\sqrt{D})^n;$$

тогда получаемъ

$$1<\frac{N(\tau+\upsilon\sqrt{D})}{N(t_n+u_n\sqrt{D})}<N(T+U\sqrt{D}).$$

Изъ равенства

$$\frac{\tau+\upsilon\sqrt{D}}{t_n+u_n\sqrt{D}}=\tau'+\upsilon'\sqrt{D}$$

легко получаемъ

[1]) При $n=0$ изъ (92) получаемъ $t=\pm1$, $u=0$.

$$\tau' = \tau t_n - D\upsilon u_n,\quad \upsilon' = t_n\upsilon - u_n\tau.$$

Легко доказать, что τ' и υ' суть рѣшенія уравненія (86). Итакъ мы имѣемъ рѣшеніе τ', υ' уравненія (86), для котораго

$$1 < N(\tau' + \upsilon'\sqrt{D}) < N(T + U\sqrt{D});$$

но это невозможно вслѣдствіе опредѣленія основнаго рѣшенія. Итакъ всѣ рѣшенія уравненія (86) даются формулою (92).

§ 72. Для уравненія $t^2 - iu^2 = 1$ основное рѣшеніе будетъ $t = i$, $u = 1 + i$. Слѣдовательно всѣ единицы въ теоріи Эйзенштейновскихъ комплексныхъ чиселъ выразятся формулою

$$j^\mu e^\nu = j^\mu [i + (1 + i)j]^\nu, \tag{94}$$

гдѣ μ равно восьми значеніямъ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, а ν есть какое нибудь цѣлое число, заключающееся между $-\infty$ и $+\infty$. Мы видимъ, слѣдовательно, что единицъ въ Эйзенштейновской теоріи безчисленное множество. Величину e можно представить въ слѣдующихъ различныхъ видахъ:

$$e = i + (1 + i)j = (1 + j)^2 : (1 - i) = i(1 + \sqrt{2}) = (1 + j) : (1 - j). \tag{95}$$

Гауссово число $1 - i$ разлагается на два множителя: $1 + j$ и $1 - j$.

Въ теоріи Эйзенштейновскихъ комплексныхъ чиселъ $1 + j$ замѣнитъ Гауссово $1 + i$ и обыкновенное 2; числа, дѣлящіяся на $1 + j$, будутъ называться четными, числа же, сравнимыя съ 1 по модулю $1 + j$, нечетными. Въ нечетномъ числѣ $A + Bj$, въ которомъ A и B цѣлыя Гауссовы числа, одно изъ чиселъ A и B дѣлится на $1 + i$, а другое сравнимо съ 1 по модулю $1 + i$.

Мы видѣли, что законъ взаимности биквадратичныхъ вычетовъ въ особенности просто выражается для чиселъ, сравнимыхъ съ 1 по модулю $2 + 2i$; при выводѣ законовъ взаимности вычетовъ восьмой степени также есть числа, поддающіяся легче анализу. Такое число можно всегда получить изъ всякаго нечетнаго числа умноженіемъ на комплексную единицу. Пусть A всегда обозначаетъ часть, независимую отъ j, въ нечетномъ Эйзенштейновскомъ числѣ, а B коэффиціентъ при j. Изъ двухъ нечетныхъ чиселъ $f(j)$ и $jf(j)$ одно непремѣнно удовлетворяетъ условіямъ:

$$A \equiv 1 \ (mod.\ 1+i),\ B \equiv 0 \ (mod.\ 1+i).$$

Одно изъ чиселъ $f(j)$, $jf(j)$, $if(j)$ и $ijf(j)$ непремѣнно удовлетворяетъ условіямъ:

$$A \equiv 1 \ (mod.\ 2),\ B \equiv 0 \ (mod.\ 1+i),$$

потому что всѣ Гауссовы нечетныя числа сравнимы или съ 1, или съ i по модулю 2. Когда мы достигнемъ послѣднихъ условій, то могутъ быть два случая: если B дѣлится на 2, то

$$A+Bj \equiv 1 \ (mod.\ 2);$$

если B не дѣлится на 2, то

$$A+Bj \equiv 1+(1-i)j \ (mod.\ 2).$$

Замѣтивъ же, что

$$[1+j(1-i)][i+j(1+i)] = 3i+2(1+i)j,$$

заключаемъ, что изъ восьми чиселъ:

$$f(j),\ jf(j),\ if(j),\ ijf(j),\ ef(j),\ ejf(j),\ ief(j),\ ijef(j),$$

одно (и легко сообразить, что только одно) удовлетворяетъ условіямъ:

$$A \equiv 1 \ (mod.\ 2),\ B \equiv 0 \ (mod.\ 2).$$

Наконецъ всякое Гауссово число вида $1+2\lambda$ при дѣленіи на $2(1+i)$ даетъ въ остаткѣ или 1, или -1; въ то же время $-1-2\lambda$ даетъ въ остаткѣ или -1, или 1. Поэтому, умноживъ, если это надо, на -1, можно всегда достигнуть, чтобы число $A+Bj$ удовлетворяло одному изъ слѣдующихъ условій:

$$A \equiv 1 \ (mod.\ 2+2i) \text{ при } B \equiv 0 \ (mod.\ 2+2i); \qquad (96)$$

$$A \equiv -1 \ (mod.\ 2+2i) \text{ при } B \equiv 2 \ (mod.\ 2+2i). \qquad (97)$$

Числа, удовлетворяющія условіямъ (96), будемъ называть *первичными перваго рода,* а числа, удовлетворяющія условіямъ (97), *первичными втораго рода.*

Перейдемъ теперь къ вопросу, какія первоначальныя числа будутъ въ новой теоріи. Всякое Гауссово нечетное число умноженіемъ на i^{μ} можетъ быть приведено къ такому виду, что оно сравнимо съ 1 по модулю $2+2i$; такія числа, сравнимыя съ 1, будемъ называть *первичными Гауссовыми числами*. Первичныя Гауссовы числа, сравнимыя съ $3+2i$ по модулю 4, не могутъ разлагаться, если они первоначальны, на Эйзенштейновскіе множители. Дѣйствительно, если бы такое первоначальное Гауссово число дѣлилось на $A+Bj$, то оно дѣлилось бы и на $A-Bj$; но

$$(A+Bj)(A-Bj)=A^2-iB^2\equiv i^{\mu} \ (mod.\ 4),$$

если A^2-iB^2 нечетно; послѣднее сравненіе и доказываетъ невозможность разложенія разсматриваемыхъ чиселъ на множители. Вслѣдствіе этого Гауссовы первичныя, первоначальныя числа, сравнимыя съ $3+2i$ по модулю 4, будутъ первоначальны и въ Эйзенштейновской теоріи; эти первоначальныя числа будемъ называть *одночленными*.

Докажемъ теперь, что первичныя, первоначальныя Гауссовы числа разлагаются на два множителя, если они сравнимы съ 1 по модулю 4; къ такимъ первоначальнымъ числамъ принадлежатъ и дѣйствительныя числа $-4n-3$, гдѣ $n\geqq 0$. Пусть такое Гауссово число будетъ m; тогда $N(m)=8\lambda+1$. Пусть g такой первообразный корень по модулю m, что

$$g^{2\lambda}\equiv i \ (mod.\ m). \tag{98}$$

Но $g^{2\lambda}-i=(g^{\lambda}-j)(g^{\lambda}+j)$; $g^{\lambda}-j$ и $g^{\lambda}+j$ не дѣлятся на m, а произведеніе ихъ дѣлится на m; слѣдовательно m разлагается на первоначальные множители, такъ что $m=m_1 m_2$; при этомъ m_1 дѣлитъ $g^{\lambda}-j$, а m_2 $g^{\lambda}+j$. Множители m_1 и m_2 — сопряженные.

Итакъ первоначальныя первичныя Эйзенштейновскія числа бываютъ двухъ родовъ: 1) одночленныя, вида $a+bi\equiv 3+2i$ ($mod.$ 4), и 2) *двучленныя*, вида $a+bj+cj^2+dj^3=A+Bj$.

§ 73. Мы не станемъ доказывать вѣрность сравненія

$$F(j)^{p-1}\equiv 1 \ (mod.\ f(j)), \tag{99}$$

гдѣ $F(j)$ и $f(j)$ числа первыя между собою, $f(j)$—первоначально, а $p=N\mathfrak{N}f(j)$, потому что доказательство во всемъ подобно тому, которое мы употребили на страницѣ 278.

Для всякаго нечетнаго Эйзенштейнова числа $f(j)$

$$p=N\mathfrak{N}f(j)\equiv 1 \ (mod.\ 8); \tag{100}$$

поэтому $F(j)^{p-1}-1$ всегда разлагается на 8 множителей вида

$$F(j)^{\frac{1}{8}(p-1)}-j^{\mu},$$

гдѣ $\mu=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Поэтому, если $F(j)$ и $f(j)$ числа первыя между собою и $f(j)$ первоначальное, нечетное число, то всегда имѣемъ

$$F(j)^{\frac{1}{8}(p-1)}\equiv j^{\mu} \ (mod.\ f(j)). \tag{101}$$

Величину j^{μ} Эйзенштейнъ обозначаетъ символомъ

$$\left(\frac{F(j)}{f(j)}\right)_8.$$

Легко доказать, что (l первоначальное число)

$$\left(\frac{k}{l}\right)_8\left(\frac{k'}{l}\right)_8\left(\frac{k''}{l}\right)_8\left(\frac{k'''}{l}\right)_8\ldots\ldots=\left(\frac{kk'k''k'''\ldots\ldots}{l}\right)_8. \tag{102}$$

Эйзенштейнъ употреблялъ также символъ аналогичный символу Якоби:

$$\left(\frac{k}{l}\right)_8\left(\frac{k}{l'}\right)_8\left(\frac{k}{l''}\right)_8\ldots\ldots=\left(\frac{k}{ll'l''\ldots\ldots}\right)_8, \tag{103}$$

гдѣ l, l', l'',.... первоначальныя числа, а k число первое съ $ll'l''$.... Символъ (103) и будетъ фигурировать въ ниже слѣдующихъ изслѣдованіяхъ.

Легко также доказать, что сравненіе

$$x^8\equiv A+Bj \ (mod.\ C+Dj),$$

гдѣ $C+Dj$ первоначально и не дѣлитъ $A+Bj$, имѣетъ всегда рѣшенія, если

$$\left(\frac{A+Bj}{C+Dj}\right)_8=+1,$$

и только въ этомъ случаѣ.

§ 74. Сдѣлаемъ теперь небольшое замѣчаніе относительно суммы степеней корней уравненія $U=0$ страницы 305. Пусть

$$x=sin'am\frac{2(1+i)b\omega}{m}, \tag{104}$$

гдѣ m первоначальное нечетное Гауссово число, b Гауссово число, не дѣлящееся на m; тогда

$$\Sigma x,\ \Sigma x^2,\ \Sigma x^3, \ldots\ \Sigma x^{p-2}, \tag{105}$$

въ которыхъ суммы распространяются на всѣ корни уравненія $U=0$, какъ симметричныя функціи корней, будутъ равняться цѣлымъ съ цѣлыми коэффиціентами функціямъ коэффиціентовъ $U=0$; а потому всѣ эти суммы (105) дѣлятся на m. Возьмемъ теперь Σx^{p-1}, гдѣ опять сумма распространяется на всѣ корни $U=0$. Пусть $m\equiv1$ $(mod.\ 2+2i)$.

$$x^{p-1}=-m-B_{\frac{1}{4}(p-5)}x^4-\ldots-B_1x^{p-5};$$

$$\Sigma x^{p-1}=-m(p-1)-B_{\frac{1}{4}(p-5)}\Sigma x^4-\ldots-B_1\Sigma x^{p-5}.$$

Въ правой сторонѣ послѣдняго равенства всѣ члены кромѣ перваго дѣлятся на m^2; слѣдовательно

$$\Sigma x^{p-1}\equiv-(p-1)m\equiv m\ (mod.\ m^2). \tag{106}$$

Если $\alpha>0$ и цѣлое число, то

$$\Sigma x^{p-1+\alpha}=-m\Sigma x^\alpha-B_{\frac{1}{4}(p-5)}\Sigma x^{\alpha+4}-\ldots-B_1\Sigma x^{p-5+\alpha};$$

слѣдовательно $\Sigma x^{p-1+\alpha}$ дѣлится на m^2.

Обратимся теперь къ равенству

$$(Q^2-iR^2)P^3=mu, \qquad (107)$$

которое есть слѣдствіе первой изъ формулъ (78).

Всѣ корни уравненія $U=0$ могутъ изобразиться такъ:

$$y=sin'am\frac{2(1+i)g^{\nu}\omega}{m}, \qquad (108)$$

гдѣ g—первообразный корень по модулю m. Этотъ корень y можно изобразить въ видѣ ряда (51), принявъ

$$x=sin'am\frac{2(1+i)g^{\alpha}\omega}{m}=sin'am\,h'. \qquad (109)$$

Дѣйствительно, если $\nu>\alpha$, то полагаемъ

$$g^{\nu-\alpha}\equiv m'm''m'''....(mod.\ m),$$

гдѣ m', m'', m''',.... первоначальныя, нечетныя Гауссовы числа; если $\nu<\alpha$, то полагаемъ

$$g^{p-1+\nu-\alpha}\equiv m'm''m'''....(mod.\ m).$$

Пусть

$$y'=sin'am\,m'h',\ y''=sin'am\,m'm''h',\ y'''=sin'am\,m'm''m'''h',\ldots$$

y' выражается рядомъ (51) черезъ x, y''—тѣмъ же рядомъ, если x замѣнимъ y'; y''' выражается черезъ y'' и такъ далѣе. Очевидно, что посредствомъ постепенной подстановки можемъ y выразить черезъ x посредствомъ безконечнаго ряда вида (51); при этомъ

$$c_1\equiv g^{\nu-\alpha} \text{ или } g^{p-1+\nu-\alpha}(mod.\ m).$$

Такъ какъ функція $(Q^2-iR^2)P^3$—циклическая перваго порядка, то при вычисленіи этой функціи можно во вторыхъ частяхъ равенствъ (59) и (74) h замѣнить черезъ h'. Сдѣлавъ такое преобразованіе, подставимъ въ функцію $(Q^2-iR^2)P^3$, вмѣсто корней, тѣ

ряды вида (51), которые изображаютъ корни черезъ x; тогда получимъ равенство:

$$(Q^2-iR^2)P^3=\xi x^{p-1}+A_1 x^{p+3}+A_2 x^{p+7}+\ldots;$$

$$\xi\equiv(g^4g^8g^{12}\ldots g^{4\lambda-4}-ig^2g^6g^{10}\ldots g^{4\lambda-2})g^3g^6g^9\ldots g^{6\lambda-3}(mod.\ m);$$

$$\xi\equiv g^{8\lambda^2-5\lambda}(1-ig^{2\lambda})(mod.\ m). \tag{110}$$

Будемъ въ предъидущій безконечный рядъ вставлять вмѣсто x различные корни $U=0$; тогда получимъ

$$(p-1)(Q^2-iR^2)P^3-\xi\Sigma x^{p-1}=A_1\Sigma x^{p+3}+A_2\Sigma x^{p+7}+\ldots,$$

гдѣ суммы распространяются на всѣ корни уравненія $U=0$. Въ первой части предпослѣдняго равенства у насъ цѣлое число; слѣдовательно безконечный рядъ второй части при суммированіи дастъ цѣлое число. Однако при суммированіи безконечнаго ряда могутъ явиться знаменатели, которые потомъ сокращаются. Эти знаменатели, очевидно, тѣ же, что получились бы, если мы вмѣсто безконечныхъ рядовъ вида (51) подставили бы конечныя цѣлыя функціи, объ которыхъ говорилось на страницѣ 306. Но тамъ же объяснено, что знаменатели у этихъ конечныхъ выраженій не содержатъ множитель m. Съ другой стороны извѣстно, что Σx^{p+3}, Σx^{p+7}, Σx^{p+11},.... дѣлятся на m^2. Слѣдовательно (формула (106))

$$(p-1)(Q^2-iR^2)P^3\equiv-\xi(p-1)m(mod.\ m^2);$$

$$mu=(Q^2-iR^2)P^3\equiv mg^{8\lambda^2-5\lambda}(ig^{2\lambda}-1)(mod.\ m^2);$$

$$u\equiv g^{8\lambda^2-5\lambda}(ig^{2\lambda}-1)(mod.\ m). \tag{111}$$

Замѣтивъ же, что

$$g^{8\lambda}=g^{p-1}\equiv1\ (mod.\ m),\ g^{3\lambda}\equiv ig^{\lambda}(mod.\ m),\ ig^{2\lambda}-1\equiv-2(mod.\ m),$$

выводимъ

$$u\equiv-2ig^{\lambda}mod.\ m),(\ u\mp2ij\equiv-2i(g^{\lambda}\pm j)(mod.\ m). \tag{112}$$

На страницѣ 322 мы объяснили, что $g^\lambda - j$ дѣлится на m_1, а $g^\lambda + j$ на m_2; поэтому можемъ написать:

$$u - 2ij = tm_2^{\ \alpha},\ u + 2ij = t'm_1^{\ \alpha}, \tag{113}$$

гдѣ α цѣлое число, большее нуля, а t и t'—сопряженныя Эйзенштейновы числа, не дѣлящіяся на m_1 и m_2.

Изъ (78) получаемъ

$$mv^2 = (u - 2ij)(u + 2ij) = tt'm^\alpha; \tag{114}$$

слѣдовательно $\alpha = 2\beta + 1$, а tt'—квадратъ. Такъ какъ t и t' сопряженныя числа, то можно положить

$$u - 2ij = \varepsilon s^2 m_2^{\ 2\beta+1},\ u + 2ij = \varepsilon' s'^2 m_1^{\ 2\beta+1}; \tag{115}$$

при этомъ s и s' изображаютъ Эйзенштейновы цѣлыя, сопряженныя числа, а ε и ε'—такія сопряженныя Эйзенштейновы единицы, что $\varepsilon\varepsilon'$ есть квадратъ.

Опредѣлимъ теперь изъ формулъ (78) S и S'; для этого вспомнимъ, что для $p \equiv 1$ (*mod.* 8) и $m \equiv 1$ (*mod.* $2+2i$)

$$P(h) = \sqrt[4]{m};$$

принимая въ разсчетъ равенства (115), получаемъ

$$S = sm_2^{\ \beta}\sqrt{\varepsilon}\,\sqrt[8]{m_1 m_2^{\ 5}},\ S' = s'm_1^{\ \beta}\sqrt{\varepsilon'}\,\sqrt[8]{m_1^{\ 5} m_2}. \tag{116}$$

Намъ теперь предстоитъ узнать, что такое ε и ε' и каковы числа $sm_2^{\ \beta}$ и $s'm_1^{\ \beta}$, которыя мы будемъ впредь обозначать черезъ $l(1+j)^\alpha$ и $l'(1-j)^\alpha$, подразумѣвая подъ l и l' нечетныя, сопряженныя Эйзенштейновы числа. Для того, чтобы исполнить это намѣреніе, выведемъ одну формулу, относящуюся до $sin'^4 am\dfrac{2g^\nu(1+i)\omega}{m}$.

Такъ какъ

$$sin'am\ it = i\ sin'am\ t,\ cos'am\ it = \Delta'am\ t,\ \Delta'am\ it = cos'am\ t,$$

то легко выводятся слѣдующія формулы:

$$x = sin'am\, t, sin'am\, 2t = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}, sin'am(1+i)t = \frac{(1+i)x}{\sqrt{1-x^4}}. \quad (117)$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

$$(1+x^4) sin'am\, 2t\; sin'am(1+i)t = 2(1+i)x^2. \quad (118)$$

Поставимъ вмѣсто t величину

$$\frac{2g^\nu(1+i)\omega}{m};$$

тогда x, $x_2 = sin'am\, 2t$ и $x_\eta = sin'am(1+i)t$ будутъ корнями уравненія $U=0$. Помножимъ обѣ части равенства (118) на всѣ корни уравненія $U=0$ кромѣ x_2 и x_η; получимъ

$$(1+x^4)m = 2(1+i)X', \quad (118')$$

гдѣ X' есть нѣкоторая цѣлая съ цѣлыми коэффиціентами функція корней уравненія $U=0$. Но первоначальное число m мы полагаемъ сравнимымъ съ 1 по модулю $2+2i$; слѣдовательно

$$1+x^4 = 2(1+i)X, \quad (119)$$

гдѣ X такая же функція, какъ и X'.

Для краткости письма будемъ употреблять знакъ сравненія въ тѣхъ случаяхъ, когда цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами, функція корней уравненія $U=0$ умножается на модуль сравненія; такимъ образомъ, если L и L' суть цѣлыя, съ цѣлыми коэффиціентами, функціи корней, а n—число, то

$$L \equiv L' \; (mod.\; n) \quad (120)$$

значитъ только, что коэффиціенты $L-L'$ дѣлятся на n. Но если L и L' оказываются, вслѣдствіе какихъ нибудь соображеній, раціональными числами, то, по теоремѣ страницы 298, выраженіе (120) дѣлается обыкновеннымъ сравненіемъ.

Допуская такое употребленіе знака сравненія, можемъ равенство (119) написать такъ:

$$sin'^4 am \frac{2g^{\nu}(1+i)\omega}{m} \equiv -1 \ (mod.\ 2+2i). \qquad (121)$$

Найдемъ теперь наивысшую степень $1+i$, на которую дѣлится S^8, а также, съ чѣмъ сравнимо S^8, если за модуль возьмемъ еще болѣе высшую степень $1+i$. Изъ равенства $S=Q-ijR$ слѣдуютъ сравненія въ новомъ смыслѣ:

$$Q^2-iR^2 \equiv S^2 \ (mod.\ 2),\ S^4 \equiv Q^4-R^4-2iQ^2R^2 \ (mod.\ 4).$$

Но, вслѣдствіе сравненія (121),

$$Q^4 \equiv R^4 \equiv (-1)^{\lambda} \ (mod.\ 2+2i);$$

слѣдовательно

$$S^4 \equiv 2P^2 \ (mod.\ 2+2i),\ S^8 \equiv 4P^4 = 4m \ (mod.\ 4+4i). \qquad (122)$$

Послѣднее сравненіе—обыкновенное; изъ него заключаемъ, что S^8 дѣлится на $(1+j)^8$. Частное отъ дѣленія S^8 на $(1+j)^8$—нечетно.

Изъ предъидущаго слѣдуетъ:

$$sm_2{}^{\beta} = l(1+j),\ s'm_1{}^{\beta} = l'(1-j). \qquad (123)$$

Что касается до единицы ε, то мы можемъ ограничиться разрѣшеніемъ вопроса, какой изъ четырехъ единицъ 1, j, e и ej равна единица ε, ибо всѣ остальныя единицы получатся умноженіемъ этихъ четырехъ единицъ на квадраты; при этомъ всѣ квадратные множители мы относимъ къ l^2. Пусть

$$u-2ij=(1-i)(\alpha-\beta j),\ \beta=i(1+i).$$

Доказано выше, что α нечетное число (ср. равенства (115) и (123)), т. е. $\alpha \equiv 1$ или i $(mod.\ 2)$. Если $\alpha \equiv 1$ $(mod.\ 2)$, то

$$\alpha-\beta j \equiv i(i+(1+i)j)=ie \ (mod.\ 2);$$

если $\alpha \equiv i$ $(mod.\ 2)$, то

$$\alpha-\beta j \equiv i+(1+i)j=e \ (mod.\ 2).$$

Но $e=(1+j)^2:(1-i)$; слѣдовательно

$$\varepsilon l^2 m_2 (1+j)^2 \equiv (1+j)^2 \text{ или } i(1+j)^2 \ (mod.\ 2+2i). \qquad (124)$$

Будемъ впредь подразумѣвать подъ m_1 *и* m_2 *первичныя Эйзенштейновы числа*, также какъ подъ m мы уже условились подразумѣвать Гауссово первичное число. По опредѣленію первичныхъ чиселъ,

$$m_2 \equiv 1 \text{ или } -1+2j \ (mod.\ 2+2i).$$

Также легко сообразить, что

$$l^2 \equiv i^\mu \text{ или } i^\mu e^2 \ (mod.\ 2+2i),$$

ибо l—нечетное число; вслѣдствіе этого

$$l^2 m_2 (1+j)^2 \equiv i^\mu (1+j)^2 \text{ или } i^\mu (1+j)^2 (-1+2j) \ (mod.\ 2+2i).$$

Замѣтивъ, что i^μ есть квадратъ и что $-1+2j$ сравнимо съ 1 по модулю 2, заключаемъ изъ (124), что

$$\varepsilon = 1.$$

Итакъ мы можемъ написать:

$$S = l(1+j)\sqrt[8]{m_1 m_2{}^5},\ S' = l'(1-j)\sqrt[8]{m_1{}^5 m_2}\,, \tag{125}$$

гдѣ l и l' нѣкоторыя нечетныя, сопряженныя числа.

Для нашихъ выводовъ понадобится еще функція $S^3 S'$; она—циклическая перваго порядка, ибо отъ замѣны h черезъ gh она умножается на $j^3 j^5 = 1$. Изъ формулъ (75) имѣемъ

$$S^3 S' = (Q - ijR)^3 (Q + ijR) = Q^4 + R^4 - 2ijP(Q^2 + iR^2)$$
$$= Q^4 + R^4 - 2ijSS'P. \tag{126}$$

Вспомнивъ, что $u - 2ij$ и $u + 2ij$ дѣлятся только на первую степень $1+i$, мы изъ равенствъ (78) заключаемъ, что $SS'P$ дѣлится только на первую степень $1+i$, т. е.

$$-iSS'P \equiv 1+i \ (mod.\ 2). \tag{127}$$

Изъ равенства (119) слѣдуетъ, если черезъ h и h' будемъ обозначать различныя величины $\frac{2(1+i)g^\nu \omega}{m}$, а черезъ $\chi(h)$ и $\chi(h')$

нѣкоторыя цѣлыя, съ цѣлыми коэффиціентами, функціи корней уравненія $U=0$,

$$Q^4 \equiv (-1)^\lambda \{1+2(1+i)\,\Sigma\chi(h)\} \ (mod.\ 8),$$

$$R^4 \equiv (-1)^\lambda \{1+2(1+i)\Sigma\chi(h')\} \ (mod.\ 8),$$

$$Q^4+R^4 \equiv (-1)^\lambda \{2+2(1+i)(\Sigma\chi(h)+\Sigma\chi(h'))\} \ (mod.\ 8),$$

гдѣ суммы распространяются на тѣ h и h', которыя входятъ въ функціи Q и R, опредѣленныя равенствами (74). Примѣняя то же равенство (119) къ функціи $P^4 = Q^4 R^4$, получаемъ

$$m \equiv 1+2(1+i)\{\Sigma\chi(h)+\Sigma\chi(h')\} \ (mod.\ 8);$$

$$Q^4+R^4 \equiv (-1)^\lambda (m+1) \ (mod.\ 8). \qquad (128)$$

Такъ какъ Q^4+R^4 раціональное число, то послѣднее сравненіе —обыкновенное сравненіе.

На страницѣ 309 мы ограничили m условіемъ

$$m \equiv 1 \ (mod.\ 2+2i);$$

но мы могли бы также написать:

$$m \equiv 1 \ (mod.\ 4), \qquad (129)$$

ибо $N(m)$ полагалась сравнимою съ 1 по модулю 8. Сообразивъ это, видимъ, что Q^4+R^4 дѣлится только на вторую степень $1+i$ и, по раздѣленіи на 2, даетъ число, сравнимое съ $(-1)^\lambda \frac{m+1}{2}$ по модулю 4. Поэтому можемъ написать:

$$S^3 S' = Q^4+R^4-2ijSS'P = 2(A+Bj),$$

$$A \equiv (-1)^\lambda \frac{m+1}{2} \ (mod.\ 4), \quad B \equiv 1+i \ (mod.\ 2). \qquad (130)$$

Составимъ табличку различныхъ значеній A относительно модуля 4.

$$\left.\begin{array}{lllll} m\equiv 1, & 1+4i, & 5, & 5+4i & (mod.\ 8); \\ (-1)^\lambda= +1, & +1, & -1, & -1; & \\ A\equiv 1, & 1+2i, & 1, & 1+2i & (mod.\ 4). \end{array}\right\} \quad (131)$$

Если числа m_1 и m_2 принадлежатъ къ первому роду первичныхъ чиселъ, то

$$m=m_1 m_2\equiv 1\ (mod.\ 4+4i);$$

если же m_1 и m_2 принадлежатъ ко второму роду, то

$$m=m_1 m_2\equiv 1+4i\ (mod.\ 4+4i).$$

Дѣйствительно, пусть $m_1=\alpha+\beta j$, $m_2=\alpha-\beta j$; тогда $m=\alpha^2-\beta^2 i$. Изъ равенствъ (96) и (97) слѣдуетъ:

$$\alpha^2\equiv 1\ (mod.\ 4+4i),\ m\equiv 1-i\beta^2\ (mod.\ 4+4i).$$

Если поэтому $\beta\equiv 0\ (mod.\ 2+2i)$, то $\beta^2\equiv 0\ (mod.\ 4+4i)$, а $m\equiv 1\ (mod.\ 4+4i)$; если же $\beta\equiv 2\ (mod.\ 2+2i)$, то $\beta^2\equiv 4\ (mod.\ 4+4i)$, $m\equiv 1+4i\ (mod.\ 4+4i)$. Отсюда заключаемъ, что въ табличкѣ (131) столбцы первый и четвертый соотвѣтствуютъ случаю m_1 и m_2 перваго рода, а столбцы второй и третій—тому случаю, когда m_1 и m_2 числа втораго рода. Если теперь ограничимся модулемъ $2+2i$, то, вмѣсто послѣдней строчки (131), можемъ написать:

$$A\equiv 1,\quad -1,\quad 1,\quad -1\quad (mod.\ 2+2i),$$

$$A\equiv(-1)^\lambda,\ -(-1)^\lambda,\ -(-1)^\lambda,\ (-1)^\lambda\ (mod.\ 2+2i);$$

слѣдовательно, если m_1 и m_2 перваго рода, то

$$A\equiv(-1)^\lambda\ (mod.\ 2+2i);$$

если же m_1 и m_2 втораго рода, то

$$A\equiv -(-1)^\lambda\ (mod.\ 2+2i).$$

Представимъ S^3S' въ нѣсколько иномъ, чѣмъ въ формулахъ (130), видѣ:

$$S^3S'=2(A+Bj)=(1+j)^3(1-j)(C+Dj), \quad (132)$$

$$C = -A + (1+i)B,\quad D = (1-i)A - B.$$

Слѣдовательно $D \equiv 0$ ($mod.$ 2), потому что это—сумма двухъ нечетныхъ чиселъ, умноженная на $1+i$.

$$C \equiv -A + (1+i)^2 \equiv -A + 2 \quad (mod.\ 2+2i).$$

Отсюда слѣдуетъ: если m_1 число первичное перваго рода, то

$$C \equiv (-1)^\lambda \quad (mod.\ 2+2i);$$

если m_1 и m_2 числа первичныя втораго рода, то

$$C \equiv -(-1)^\lambda \quad (mod.\ 2+2i).$$

Изъ формулъ (78) выводимъ

$$S^6 S'^2 = m(u-2ij)^3(u+2ij) = l^6 l'^2 (1+j)^6 (1-j)^2 m_1^{\ 2} m_2^{\ 4}.$$

Изъ этого квадрата слѣдуетъ S^3S' съ двойнымъ знакомъ:

$$S^3S' = (-1)^\mu l^3 l' (1+j)^3 (1-j) m_1 m_2^{\ 2}, \tag{133}$$

гдѣ μ неизвѣстное цѣлое число.

Пусть $l = \alpha + \beta j$, $l' = \alpha - \beta j$; тогда

$$l^3 l' = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha\beta(\alpha^2 - i\beta^2)j.$$

Такъ какъ одно изъ чиселъ α и β четно, а другое нечетно, то $2\alpha\beta$ дѣлится на $2(1+i)$; та изъ величинъ α^4 и β^4, которая четна, дѣлится на 4; та же изъ величинъ α^4 и β^4, которая нечетна, непремѣнно сравнима съ 1 по модулю $2+2i$. Итакъ

$$l^3 l' \equiv 1 \quad (mod.\ 2+2i),\quad m = m_1 m_2 \equiv 1 \quad (mod.\ 2+2i);$$

$$(-1)^\mu l^3 l' m_1 m_2^{\ 2} \equiv (-1)^\mu m_2 \quad (mod.\ 2+2i).$$

Сравнивая формулы (132) и (133), можемъ слѣдовательно написать

$$C + Dj \equiv (-1)^\mu m_2 \quad (mod.\ 2+2i).$$

Пусть $m_2 = a + bj$. Если m_2 перваго рода, то

$$(-1)^\mu a \equiv (-1)^\mu \quad (mod.\ 2+2i);$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ $\mu=\lambda$. Если m_2 втораго рода, то

$$(-1)^{\mu} a \equiv -(-1)^{\mu} \quad (mod.\ 2+2i),$$

т. е. опять $\mu=\lambda$. Итакъ

$$S^3 S' = (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)} l^3 l' (1+j)^3 (1-j) m_1 m_2{}^2. \qquad (134)$$

§ 75. Обратимся теперь къ какой бы то ни было циклической функціи восьмаго порядка корней уравненія $U=0$. *Циклическою функціею восьмаго порядка мы будемъ называть такую цѣлую функцію $F(h)$ корней уравненія $U=0$, у которой коэффиціенты суть цѣлыя Эйзенштейновы числа и которая удовлетворяетъ условію*

$$F(gh)=jF(h).$$

Пусть $F'(h)$ получается изъ $F(h)$ замѣною j черезъ j^5; тогда $F'(gh) = j^5 F'(h)$; $F'(h)$—также циклическая функція восьмаго порядка.

Функціи FS^7 и $F'S'^7$ не измѣняютъ своей величины отъ замѣны h черезъ gh; то же можно сказать и объ $F:S$ и $F':S'$. Отсюда слѣдуетъ, что $F:S$ и $F':S'$—раціональныя Эйзенштейновы числа, т. е. числа вида $A+Bj$, гдѣ A и B раціональныя Гауссовы числа; а слѣдовательно F содержитъ только ирраціональности S, а F'—только ирраціональности S'. Кромѣ того F^8 и F'^8 раціональныя Эйзенштейновы числа, такъ какъ они не измѣняются отъ замѣны h черезъ gh; поэтому если $F^8=C+Dj$ и $F'^8=C'+D'j$, то C, D, C' и D' цикличныя функціи перваго порядка; эти Гауссовы числа C, D, C', D' раціональны; а по теоремѣ страницы 298 они цѣлыя Гауссовы числа. Итакъ $F(h)^8$ и $F'(h)^8$—цѣлыя Эйзенштейновы числа; поэтому можемъ написать:

$$F(h)=f(j)\sqrt[8]{m_1 m_2{}^5},\quad F'(h)=f(j^5)\sqrt[8]{m_1{}^5 m_2}, \qquad (135)$$

гдѣ $f(j)$—нѣкоторое Эйзенштейново цѣлое число. Изъ восьми значеній корней въ формулахъ (135) должно выбирать такія, при которыхъ $f(j)$ одинаково какъ въ формулахъ (135), такъ и въ послѣдующихъ формулахъ (136) и (137).

Опредѣлимъ теперь $F^3(h)F'(h)$. Будемъ подъ $f_1(j)$ и $f_2(j)$ подразумѣвать нечетныя Эйзенштейновы числа; тогда

$$f_1(j)(1+j)^{\mu}F(h)=f_2(j)(1+j)^{\nu}S(h),$$

гдѣ μ и ν могутъ быть и нулями. Подобное же равенство будетъ между $F'(h)$ и $S'(h)$. Изъ этихъ двухъ равенствъ получимъ, если замѣнимъ S^3S' величиною, равною этой функціи (см. равенство (134)),

$$f_1(j)^3f_1(j^5)(1+j)^{3\mu}(1-j)^{\mu}F^3F'$$

$$=f_2(j)^3f_2(j^5)(1+j)^{3\nu+3}(1-j)^{\nu+1}(-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}l^3l'm_1m_2^{\,2}.$$

Такъ какъ F^3F' цѣлое число, то $\mu\leqq\nu+1$; а потому

$$f_1(j)^3f_1(j^5)F^3F'=f_2(j)^3f_2(j^5)(1+j)^{3\rho}(1-j)^{\rho}(-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}l^3l'm_1m_2^{\,2}.$$

Выше было доказано, что

$$l^3l'\equiv1\ (mod.\ 2+2i),$$

если подъ l и l' подразумѣваются нечетныя, сопряженныя числа; точно также

$$f_1(j)^3f_1(j^5)\equiv f_2(j)^3f_2(j^5)\equiv1\ (mod.\ 2+2i).$$

Отсюда заключаемъ: если раздѣлить F^3F' на

$$(1+j)^{3\rho}(1-j)^{\rho}m_1m_2^{\,2},$$

то въ частномъ получится число, сравнимое съ $(-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}$ по модулю $2+2i$.

Разсужденія, подобныя предъидущимъ, дадутъ намъ

$$F(h)^2P^3=f(j)^2m_1m_2^{\,2},\quad F'(h)^2P^3=f(j^5)^2m_1^{\,2}m_2. \tag{136}$$

Изъ равенствъ (136) мы точно опредѣлимъ квадратъ функціи F^3F'; предъидущія же разсужденія дадутъ намъ знакъ, получаемый при извлеченіи корня. Такимъ образомъ получимъ

$$F(h)^3F'(h)=(-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}f(j)^3f(j^5)m_1m_2^{\,2}. \tag{137}$$

Изъ формулы (55) этой главы получаемъ

$$sin'^{N(n)} am\, t = sin' am\, nt + n\, T(t), \tag{138}$$

гдѣ n—первоначальное, первичное Гауссово нечетное число, не равное m, а $T(t)$—цѣлая функція $sin' am\, t$ и $sin' am\, nt$.

Разсмотримъ нѣкоторую цѣлую, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, функцію корней уравненія $U=0$; корни этого уравненія назовемъ черезъ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ Всякая такая функція изображается формулою

$$\Sigma A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots\ldots,$$

гдѣ A—цѣлое Гауссово число, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \geqq 0$. Если разсматриваемую функцію возвысимъ въ степень $r=N(n)$, то извѣстно изъ формулы бинома Ньютона, что всѣ члены r-ой степени многочлена, кромѣ r-ыхъ степеней каждаго члена, дѣлятся на r; а потому, называя разсматриваемую функцію черезъ $F_2(h)$, получимъ

$$F_2(h)^r = \Sigma A^r x_1^{\alpha_1 r} x_2^{\alpha_2 r} x_3^{\alpha_3 r} \ldots\ldots + r\, T(h),$$

гдѣ $T(h)$—цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами, функція $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Если A не дѣлится на n, то

$$A^r \equiv A \pmod{n}$$

вслѣдствіе равенства (11); если же A дѣлится на n, то

$$A^r \equiv A \equiv 0 \pmod{n}.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$F_2(h)^r = \Sigma A x_1^{\alpha_1 r} x_2^{\alpha_2 r} x_3^{\alpha_3 r} \ldots\ldots + n\, T_1(h)$$

$$= \Sigma A\, sin'^{\alpha_1} am\, nt_1\, sin'^{\alpha_2} am\, nt_2 \ldots\ldots + n H(h),$$

$$x_1 = sin' am\, t_1,\ x_2 = sin' am\, t_2,\ x_3 = sin' am\, t_3 \ldots\ldots;$$

$H(h)$ и $T_1(h)$ обозначаютъ такія же функціи корней уравненія $U=0$, какъ и $T(h)$. Отсюда заключаемъ, что

$$F_2(h)^r = F_2(nh) + n H(h),\quad h = \frac{2(1+i)\omega}{m}. \tag{139}$$

Такъ какъ $F_2(h)^r$ такая же функція корней $U=0$, какъ и $F_2(h)$, то

$$F_2(h)^{r^2}=F_2(nh)^r+nH_1(h)=F_2(n^2h)+nQ(h),$$

гдѣ $H_1(h)$ и $Q(h)$ опять такія же функціи, какъ $T(h)$.

Продолжая также разсуждать, мы найдемъ для всякаго μ, цѣлаго и положительнаго,

$$F_2(h)^{r^\mu}=F_2(n^\mu h)+nT(h). \tag{140}$$

Если разсматриваемая цѣлая функція содержитъ еще нѣкоторое неопредѣленное z, то тѣ же разсужденія дадутъ намъ

$$F_2(h, z)^{r^\mu}=F_2(n^\mu h, z^{r^\mu})+nT(h, z), \tag{141}$$

гдѣ $T(h, z)$ цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами, функція z и корней $U=0$.

Наши циклическія функціи $F(h)$ и $F'(h)$ именно принадлежатъ къ послѣдней категоріи цѣлыхъ функцій корней уравненія $U=0$; только въ циклическихъ функціяхъ $F(h)$ и $F'(h)$ мѣсто z занимаетъ или j, или j^5. Поэтому имѣемъ

$$F(h, j)^r=F(nh, j^r)+nT(h, j), \tag{142}$$

$$F(h, j)^{r^2}=F(n^2h, j^{r^2})+nT(h, j). \tag{143}$$

Пусть n такое первичное, первоначальное Гауссово число, которое разлагается на два комплексныя Эйзенштейновы числа (сюда причисляются и дѣйствительныя, первоначальныя числа вида $-4N-3$); въ такомъ случаѣ

$$r=N(n)\equiv 1 \ (mod.\ 8),\ j^r=j.$$

Пусть $n\equiv g^\nu$ $(mod.\ m)$; тогда получимъ, предполагая $n=ll_1$, $r=N(n)=N\mathfrak{N}(l)$,

$$F(h, j)^r=j^\nu F(h, j)+lT(h, j). \tag{144}$$

Замѣтимъ, что здѣсь $n=\mathfrak{N}(l)$.

Пусть $n \equiv 3 + 2i$ $(mod.\ 4)$; тогда n само есть первоначальное Эйзенштейново число.

$$\mathfrak{N}(n) = n^2;\ N\mathfrak{N}(n) = r^2;\ r \equiv 5\ (mod.\ 8);$$

$$r^2 \equiv 1 (mod.\ 8);\ j^{r^2} = j.$$

Равенство (143) даетъ намъ

$$F(h, j)^{N\mathfrak{N}(n)} = j^{2\nu} F(h, j) + n\,T(h, j). \tag{145}$$

Замѣнимъ n черезъ l и назовемъ $\mathfrak{N}(l)$ черезъ n; тогда $\mathfrak{N}(l) \equiv g^{2\nu} (mod.\ m)$, и мы видимъ, что равенство (144) вѣрно какъ въ томъ случаѣ, когда l двучленное Эйзенштейново число, такъ и въ томъ случаѣ, когда l одночленное Эйзенштейново число.

Пусть

$$l^{\frac{1}{8}(p-1)} = l^\lambda \equiv j^\rho (mod.\ m_1),\ l_1{}^\lambda \equiv j^\pi (mod.\ m_1);$$

тогда, вслѣдствіе опредѣленія страницы 323,

$$j^\rho = \left(\frac{l}{m_1}\right)_8,\ j^\pi = \left(\frac{l_1}{m_1}\right)_8,\ j^{\rho+\pi} = \left(\frac{\mathfrak{N}(l)}{m_1}\right)_8 = \left(\frac{n}{m_1}\right)_8.$$

Перемножая предъидущія сравненія, получаемъ

$$\mathfrak{N}(l)^\lambda \equiv j^{\rho+\pi} (mod.\ m_1).$$

Съ другой стороны, мы имѣемъ

$$\mathfrak{N}(l) \equiv g^\nu (mod.\ m_1),\ \mathfrak{N}(l)^\lambda \equiv g^{\lambda\nu} \equiv j^\nu (mod.\ m_1),$$

ибо $g^\lambda - j$ мы полагали дѣлящимся на m_1. Отсюда видимъ, что

$$\left(\frac{n}{m_1}\right)_8 = \left(\frac{\mathfrak{N}(l)}{m_1}\right)_8 = j^\nu.$$

Изъ предъидущихъ разсужденій слѣдуетъ новый видъ для равенства (144):

$$F(h, j)^{N\mathfrak{N}(l)} = \left(\frac{\mathfrak{N}(l)}{m_1}\right)_8 F(h, j) + l\,T(h, j). \tag{146}$$

Надо помнить, что въ случаѣ l двучленнаго можно передъ $T(h, j)$ замѣнить l черезъ $n = \mathfrak{N}(l)$.

Посмотримъ, что даетъ равенство (142) въ случаѣ

$$n \equiv 3 + 2i (mod.\ 4).$$

Напишемъ это равенство такъ:

$$F(h, j)^{N(l)} = F(lh, j^{N(l)}) + lT(h, j).$$

Такъ какъ $N(l) \equiv 5 (mod.\ 8)$, то $j^{N(l)} = j^5$. Полагаемъ $l \equiv g^{\rho} (mod.\ m)$ тогда

$$F(lh, j^5) = j^{5\rho} F(h, j^5) = j^{5\rho} F'(h, j).$$

Но въ этомъ случаѣ имѣемъ также

$$l \equiv g^{\rho} (mod.\ m_1),\ l^{\lambda} \equiv g^{\lambda\rho} \equiv j^{\rho} (mod.\ m_1);$$

слѣдовательно имѣемъ

$$F(h,j)^{N(l)} = \left(\frac{l}{m_1}\right)_8^5 F'(h,j) + lT(h,j). \qquad (147)$$

Равенство (147) вѣрно только для l одночленнаго Эйзенштейновскаго.

Представимъ равенство (144) въ слѣдующемъ видѣ:

$$F(h) = j^{-\nu} F(h)^r - lj^{-\nu} T(h).$$

Положимъ, что $F(h)^8$ дѣлится на l, $F(h)^8 = ls$ (напомнимъ, что l первоначальное число, не равное m_1, m_2 и $1 + j$); тогда

$$F(h) = l \{ sj^{-\nu} F(h)^{r-8} - j^{-\nu} T(h) \} = lF_1(h).$$

Послѣднее равенство останется вѣрнымъ, если h замѣнимъ черезъ gh, g^2h, g^3h,...$g^{p-2}h$; слѣдовательно

$$F(gh) = lF_1(gh).$$

Но послѣднее равенство можно изобразить такъ:

$$jF(h)=lF_1(gh);$$

отсюда слѣдуетъ

$$F_1(gh)=jF_1(h).$$

Также, если

$$F(h,j^5)=l'F_1(h,j^5),$$

то

$$F_1(gh,j^5)=j^5F_1(h,j^5).$$

Итакъ, если на l дѣлится $F(h)^8$, то на l дѣлится также и $F(h)$, а $F'(h)$ дѣлится на l'. Частныя $F_1(h)$ и $F'_1(h)$, полученныя отъ дѣленія $F(h)$ на l и $F'(h)$ на l', суть цѣлыя, съ цѣлыми коэффиціентами, функціи корней уравненія $U=0$; $F_1(h)$ и $F'_1(h)$ суть циклическія функціи 8-аго порядка; онѣ обладаютъ тѣми же свойствами, какъ и $F(h)$ и $F'(h)$. Поэтому

$$F_1(gh)^8=F_1(h)^8,\quad F'_1(gh)^8=F'_1(h)^8;$$

$F_1(h)^8$ и $F'_1(h)^8$ равны цѣлымъ Эйзенштейновымъ числамъ. $F(h)^8$ и $F'(h)^8$ дѣлятся—первая на l^8, вторая на l'^8.

Предъидущее показываетъ, что всегда можно получить такую циклическую функцію восьмаго порядка, восьмая степень которой не дѣлилась бы на иныя числа, кромѣ m_1, m_2 и $1+j$. Также можно выбрать всякое первоначальное число, кромѣ m_1, m_2 и $1+j$, и всегда найдется циклическая функція, восьмая степень которой не дѣлится на это выбранное число.

§ 76. Обратимся теперь къ самому предмету нашей длиннѣйшей подготовки, къ выводу закона взаимности вычетовъ восьмой степени. Оставаясь при тѣхъ же обозначеніяхъ, что прежде, разсмотримъ два случая.

1 с л у ч а й. l двучленное Эйзенштейново первоначальное, первичное и нечетное число. Въ такомъ случаѣ

$$r=N\mathfrak{N}(l)\equiv 1\ (mod.\ 8),$$

и равенства (135) дадутъ намъ

$$F(h)^{r+7}=f(j)^{r+7}\, m_1^{\rho+1}\, m_2^{5(\rho+1)},\quad \rho=\frac{1}{8}(r-1).$$

Въ послѣднемъ равенствѣ можно замѣнить $F(h)^r$ второю частью равенства (146); тогда получимъ

$$\left(\frac{\mathfrak{N}(l)}{m_1}\right)_8 F(h)^8 + \mathfrak{N}(l)\, T(h) = f(j)^{r+7}\, m_1^{\rho+1}\, m_2^{5(\rho+1)}. \qquad (148)$$

Но изъ того же перваго изъ равенствъ (135) имѣемъ

$$F(h)^8 = f(j)^8 m_1 m_2^5.$$

Если это подставить въ (148), то (148) будетъ содержать, кромѣ $T(h)$, все раціональныя числа; слѣдовательно и $T(h)$ — раціональное число, а по страницѣ 298—цѣлое число. Поэтому имѣемъ сравненіе

$$\left(\frac{\mathfrak{N}(l)}{m_1}\right)_8 \equiv f(j)^{r-1}(m_1 m_2^5)^{\frac{1}{8}(r-1)} \quad (mod.\ l); \qquad (149)$$

мы предполагаемъ, что $F(h)$—такая циклическая функція, которая не дѣлится на l. Пусть l' сопряженно съ l; тогда имѣемъ

$$f(j)^{r-1} \equiv 1 \ (mod.\ l), \quad m_1^{\frac{1}{8}(r-1)} \equiv \left(\frac{m_1}{l}\right)_8 \ (mod.\ l),$$

$$m_2^{\frac{5}{8}(r-1)} \equiv \left(\frac{m_2}{l}\right)_8^5 \ (mod.\ l).$$

Положимъ, что

$$\left(\frac{m_2}{l}\right)_8 = j^{\mu}, \quad \left(\frac{m_2}{l}\right)_8^5 = (-j)^{\mu}.$$

При замѣнѣ j черезъ $-j$ можно m_2 замѣнить черезъ m_1, а l черезъ l'; поэтому

$$\left(\frac{m_1}{l'}\right)_8 = (-j)^{\mu}, \quad \left(\frac{m_2}{l}\right)_8^5 = \left(\frac{m_1}{l'}\right)_8.$$

Соображая все, только что сказанное, выводимъ изъ сравненія (149)

$$\left(\frac{ll'}{m_1}\right)_8 = \left(\frac{m_1 m_2^5}{l}\right)_8 = \left(\frac{m_1}{l}\right)_8 \left(\frac{m_1}{l'}\right)_8 = \left(\frac{m_1}{ll'}\right)_8.$$

Равенство

$$\left(\frac{ll'}{m_1}\right)_8 = \left(\frac{m_1}{ll'}\right)_8 \qquad (150)$$

и есть одинъ изъ частныхъ случаевъ закона взаимности вычетовъ восьмой степени.

2 случай. l одночленное Эйзенштейново число. Пусть $r = N(l)$; доказано, что $r \equiv 5$ (*mod.* 8); слѣдовательно здѣсь $r+3$ дѣлится на 8.

Изъ равенствъ (135) выводимъ

$$F(h)^{r+3} = f(j)^{r+3}(m_1 m_2{}^5)^{\frac{1}{8}(r+3)}.$$

Изъ равенства же (147) имѣемъ

$$F(h)^r \equiv \left(\frac{l}{m_1}\right)_8^5 F'(h) \quad (mod.\ l);$$

слѣдовательно

$$F(h)^3 F'(h) \left(\frac{l}{m_1}\right)_8^5 \equiv f(j)^{r+3}(m_1 m_2{}^5)^{\frac{1}{8}(r+3)} \quad (mod.\ l).$$

Окончательное уничтоженіе функцій F и F' можно произвести съ помощью равенства (137); сокращая все, что можно, получимъ

$$f(j^5)(-1)^{\frac{1}{8}(p-1)} \left(\frac{l}{m_1}\right)_8^5 \equiv f(j)^r m_1^{\frac{1}{8}(r-5)} m_2^{\frac{1}{8}(5r-1)} \quad (mod.\ l), \qquad (151)$$

потому что опять полагаемъ, что l исключено изъ F и F'.

Если цѣлое число $a+bj+cj^2+dj^3$ будемъ возвышать въ r-ую степень, то получимъ число, сравнимое по модулю r съ $a^r+b^r j^r + c^r j^{2r} + d^r j^{3r}$. Если a, b, c и d не дѣлятся на r, то

$$a^r + b^r j^r + c^r j^{2r} + d^r j^{3r} \equiv a + bj^r + cj^{2r} + dj^{3r} \quad (mod.\ l).$$

Во всякомъ случаѣ

$$(a+bj+cj^2+dj^3)^r \equiv a + bj^r + cj^{2r} + dj^{3r} \quad (mod.\ l).$$

Вслѣдствіе этого

$$f(j)^r \equiv f(j^r) \equiv f(j^5) \quad (mod.\ l), \quad m_1{}^r \equiv m_2 \quad (mod.\ l).$$

Соображая это, получимъ вмѣсто (151)

$$(-1)^{\frac{1}{8}(p-1)} \left(\frac{l}{m_1}\right)_8^5 \equiv m_1^{\frac{1}{8}(r-5)+\frac{r}{8}(5r-1)} \equiv m_1^{\frac{5}{8}(r^2-1)} \quad (mod.\ l).$$

Но $r^2 = N\mathfrak{N}(l)$; а потому

$$m_1^{\frac{5}{8}(r^2-1)} \equiv \left(\frac{m_1}{l}\right)_8^5 \ (mod.\ l).$$

$$(-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}\left(\frac{l}{m_1}\right)_8^5 = \left(\frac{-l}{m_1}\right)_8^5 \equiv \left(\frac{m_1}{l}\right)_8^5 \ (mod.\ l). \qquad (152)$$

Въ предъидущемъ сравненіи символы

$$\left(\frac{-l}{m_1}\right)_8 \text{ и } \left(\frac{m_1}{l}\right)_8$$

не могутъ отличаться множителемъ, равнымъ нечетной степени j; если же эти символы отличаются множителемъ, равнымъ четной степени j, то

$$\left(\frac{m_1}{l}\right)_8^4 = \left(\frac{-l}{m_1}\right)_8^4;$$

а слѣдовательно

$$\left(\frac{m_1}{l}\right)_8 \equiv \left(\frac{-l}{m_1}\right)_8 \ (mod.\ l), \quad \left(\frac{m_1}{l}\right)_8 = \left(\frac{-l}{m_1}\right)_8,$$

что противно положенію. Поэтому изъ сравненія (152) непремѣнно слѣдуетъ:

$$\left(\frac{m_1}{l}\right)_8 = (-1)^{\frac{1}{8}(p-1)}\left(\frac{l}{m_1}\right)_8. \qquad (153)$$

Формулами (150) и (153) рѣшается только частный случай, когда изъ чиселъ, входящихъ въ символы, одно есть Гауссово число, а другое—Эйзенштейново двучленное число. Эйзенштейнъ въ концѣ своей статьи, въ 39 томѣ журнала Крелля, указалъ путь, какъ съ помощью (150) и (153) формулъ рѣшить общую задачу о взаимности вычетовъ восьмой степени. Но такъ какъ эти разсужденія Эйзенштейна не относятся къ теоріи эллиптическихъ функцій и такъ какъ глава и безъ того велика, то я прерываю на этомъ изложеніе Эйзенштейновскаго изслѣдованія.

Замѣчу еще, что двумя законами взаимности не ограничивается примѣненіе эллиптическихъ функцій: Данчеръ (Dantscher) примѣнилъ эллиптическія функціи къ доказательству закона взаимности вычетовъ третьей степени (Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein und Ad. Mayer, Band XII, стр. 241—253).

ГЛАВА VI.

Формула Дирикле, опредѣляющая число классовъ собственно-первоначальныхъ квадратичныхъ формъ съ мнимыми коэффиціентами и съ двумя перемѣнными при данномъ опредѣлителѣ.

§ 77. Въ этой главѣ я намѣренъ заняться формулою Дирикле, выведенною этимъ великимъ математикомъ въ 24 томѣ журнала Крелля; эта формула опредѣляетъ число классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ съ даннымъ опредѣлителемъ, если коэффиціенты—мнимыя, цѣлыя (Гауссовы) числа. Выводъ этой формулы, не относящійся къ теоріи эллиптическихъ функцій, не можетъ найти по своей длиннотѣ мѣсто въ этомъ сочиненіи; въ этомъ сочиненіи предполагается только подробно разсмотрѣть, какимъ образомъ эта формула выражается черезъ эллиптическія функціи.

Выраженіе $ax^2+2bxy+cy^2$, въ которомъ a, b и c—нѣкоторыя цѣлыя Гауссовы числа, а x и y—также Гауссовы цѣлыя числа, только неопредѣленныя, мы будемъ называть просто *формою* въ этой главѣ; вообще же такое выраженіе называется *бинарною квадратичною формою съ мнимыми коэффиціентами*. Ради большей ясности, мы будемъ называть иногда x первымъ неопредѣленнымъ, y—вторымъ неопредѣленнымъ; a будетъ называться первымъ, b—вторымъ и c—третьимъ коэффиціентами формы; a и c—крайніе коэффиціенты формы; b—средній коэффиціентъ.

Въ теоріи предъидущаго выраженія важную роль играетъ выраженіе

$$D=b^2-ac,$$

которое называется *опредѣлителемъ формы*

$$ax^2+2bxy+cy^2.$$

Въ случаѣ, если D квадратъ, форма можетъ быть представлена въ видѣ произведенія двухъ множителей съ раціональными мнимыми коэффиціентами и первой степени относительно x и y; этотъ случай не разсматривается здѣсь. Поэтому a и c всегда отличны отъ нуля въ этой главѣ.

Замѣнимъ въ формѣ

$$ax^2+2bxy+cy^2 \tag{1}$$

неопредѣленныя x и y новыми неопредѣленными x' и y', связанными съ x и y равенствами

$$x=\alpha x'+\beta y',\quad y=\gamma x'+\delta y', \tag{2}$$

гдѣ α, β, γ и δ—Гауссовы цѣлыя числа; тогда форма (1) измѣнится въ форму

$$a'x^2+2b'xy+c'y^2, \tag{3}$$

въ которой

$$\left.\begin{aligned} a'&=a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2,\\ b'&=a\alpha\beta+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+c\gamma\delta,\\ c'&=a\beta^2+2b\beta\delta+c\delta^2.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

О формѣ (3) говорятъ, что *она содержится въ формѣ* (1). Пусть $D'=b'^2-a'c'$; легко вычислить, что

$$D'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2D. \tag{5}$$

Мы видимъ, что опредѣлитель формы, содержащейся въ другой, есть число кратное опредѣлителя этой другой формы. Отсюда слѣдуетъ, что формы могутъ взаимно содержать другъ друга только въ томъ случаѣ, когда $D'=\pm D$. Наоборотъ, если $D'=\pm D$ и форма съ опредѣлителемъ D' содержится въ формѣ съ опредѣлителемъ D, то и форма съ опредѣлителемъ D содержится въ формѣ съ опредѣлителемъ D'. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ

$$\alpha\delta-\beta\gamma=i$$

гдѣ ρ—дѣйствительное цѣлое число; поэтому изъ равенствъ (2) слѣдуетъ

$$x'=\frac{\delta}{i^\rho}x-\frac{\beta}{i^\rho}y,\ y'=-\frac{\gamma}{i^\rho}x+\frac{\alpha}{i^\rho}y. \tag{6}$$

Въ послѣднихъ формулахъ коэффиціенты у x и y—цѣлыя Гауссовы числа; а потому форма (1) также содержится въ формѣ (3).

Если $D'=D$, то могутъ быть два случая: 1) $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ и 2) $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$. Въ томъ случаѣ, когда такъ:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=+1,$$

мы будемъ формы (1) и (3) называть *эквивалентными*.

Линейною подстановкою называются равенства (2), которыя изображаются вкратцѣ такъ:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix};$$

выраженіе $\alpha\delta-\beta\gamma$ называется опредѣлителемъ подстановки. Слѣдовательно эквивалентными формами называются такія, которыя могутъ переходить одна въ другую съ помощію линейныхъ подстановокъ, имѣющихъ опредѣлители, равные $+1$ [1]).

Мы видимъ, что до сихъ поръ свойства формъ съ мнимыми коэффиціентами во всемъ подобны свойствамъ формъ съ дѣйствительными коэффиціентами. Легко также убѣдиться, что въ теоріи формъ съ мнимыми коэффиціентами остаются вѣрными всѣ тѣ теоремы, которыя можно встрѣтить въ §§ 54, 55 и 56 втораго изданія учебника по теоріи чиселъ Дирикле; къ этому учебнику читатель и обратится въ случаѣ недоумѣнія.

Если a, b и c въ формѣ (1) не имѣютъ общаго для всѣхъ трехъ дѣлителя, то форма называется *первоначальною*. Далѣе будутъ только разсматриваться первоначальныя формы, потому что относительно числа формъ неэквивалентныхъ съ даннымъ опре-

[1]) Если опредѣлитель подстановки (2) равенъ $+1$, то тому же равенъ опредѣлитель подстановки (6).

дѣлителемъ въ томъ случаѣ, когда a, b и c имѣютъ общій множитель, вопросъ, очевидно, сводится къ случаю, когда a, b и c не имѣютъ общихъ дѣлителей. Существуютъ три рода первоначальныхъ формъ: если a, $2b$ и c не имѣютъ всѣ три вмѣстѣ общаго дѣлителя, то форма $ax^2+2bxy+cy^2$—первоначальная перваго рода или *собственно-первоначальная*; если общій наибольшій дѣлитель a, $2b$ и c есть $1+i$, то форма—первоначальная втораго рода; наконецъ первоначальная форма $ax^2+2bxy+cy^2$ будетъ третьяго рода, если общій наибольшій дѣлитель a, $2b$ и c есть 2; формы втораго и третьяго рода иначе называются *несобственно-первоначальными*. Двѣ эквивалентныя первоначальныя формы, очевидно, всегда принадлежатъ къ одному и тому же роду первоначальныхъ формъ.

Если даны двѣ формы съ однимъ и тѣмъ же опредѣлителемъ, то можетъ представиться, во-первыхъ, вопросъ, эквивалентны ли онѣ. Если эти формы окажутся эквивалентными, то можетъ возникнуть второй вопросъ: найти всѣ подстановки, съ помощью которыхъ одна форма переходитъ въ другую.

Второй изъ предъидущихъ вопросовъ вполнѣ рѣшается §§ 61 и 62 Vorlesungen über Zahlentheorie Дирикле, потому что тамъ, гдѣ дѣло не касается частныхъ случаевъ, разсужденія упомянутаго учебника примѣняются и къ случаю мнимыхъ коэффиціентовъ. Такимъ образомъ мы заключаемъ, что вопросъ зависитъ отъ нахожденія всѣхъ цѣлыхъ рѣшеній неопредѣленнаго уравненія

$$t^2-Du^2=\rho_1^2, \tag{7}$$

гдѣ ρ_1 можетъ имѣть только три значенія: 1, $1+i$ и 2; это ρ_1 есть общій наибольшій дѣлитель коэффиціентовъ формы: a, $2b$ и c.

Что же касается до перваго вопроса, вопроса объ эквивалентности двухъ формъ, то рѣшеніе этого вопроса имѣетъ большую аналогію съ рѣшеніемъ того же вопроса для формъ съ дѣйствительными коэффиціентами и отрицательнымъ опредѣлителемъ. Также, какъ и въ той теоріи, всѣ формы съ мнимыми коэффиціентами и даннымъ мнимымъ опредѣлителемъ раздѣляются на ограниченное число классовъ, и вопросъ объ эквивалентности двухъ формъ приводится къ рѣшенію вопроса о томъ, принадлежатъ ли двѣ формы къ одному классу, или нѣтъ. Также, какъ и тамъ, важную

роль играютъ приведенныя формы. Объ этихъ формахъ и классахъ мы и скажемъ нѣсколько словъ.

Приведенная форма это такая форма (1), для которой

$$2N(b) \leqq N(a) \leqq N(c). \tag{8}$$

Докажемъ теперь, что всякая форма эквивалентна нѣкоторой приведенной формѣ. Будемъ, для краткости, обозначать $ax^2+2bxy+cy^2$ черезъ (a, b, c). Разсмотримъ форму (a, b, a') и примѣнимъ къ ней подстановку $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & \delta \end{pmatrix}$, у которой опредѣлитель $+1$. Тогда форма (a, b, a') перейдетъ въ форму (a', b', a''), въ которой

$$b' = -b - a'\delta.$$

Очевидно, что δ можно всегда выбрать такъ, что (см. страницу 273)

$$2N(b') \leqq N(a');$$

выбирая такъ δ, мы удовлетворимъ одному изъ условій (8). Если окажется, что вмѣстѣ съ тѣмъ

$$N(a') \leqq N(a''),$$

то мы въ формѣ (a', b', a'') имѣемъ приведенную форму. Если же $N(a') > N(a'')$, то къ формѣ (a', b', a'') примѣняемъ подстановку $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & \delta \end{pmatrix}$ и получаемъ форму (a'', b'', a'''). Величину δ выбираемъ такъ, чтобы

$$2N(b'') \leqq N(a'').$$

Пусть форма (a'', b'', a''') опять—не приведенная; тогда опять повторяемъ то же вычисленіе. Эти вычисленія продолжаемъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ приведенную форму. Что приведенная форма непремѣнно получится, ясно изъ слѣдующаго: пусть въ рядѣ формъ (a', b', a''), (a'', b'', a'''), (a''', b''', a^{IV}),......, полученныхъ предъидущимъ способомъ,

$$N(a') > N(a'') > N(a''') > N(a^{IV}) \ldots\ldots;$$

такъ какъ нормы всегда положительныя цѣлыя числа и не могутъ равняться нулю, то ясно, что предъидущій убывающій рядъ величинъ не можетъ продолжаться до безконечности и что наступитъ моментъ, когда

$$N(a^{(n)}) \leqq N(a^{(n+1)}).$$

Докажемъ теперь, что приведенныхъ формъ съ опредѣлителемъ D ограниченное число и что ихъ всегда легко найти всѣ для даннаго опредѣлителя D.

Оба условія

$$N(a) \geqq 2N(b), \quad N(a) \leqq N(c)$$

даютъ

$$N(ac) \geqq 4N(b^2), \quad \sqrt{N(ac)} \geqq 2N(b).$$

Съ другой стороны, изъ равенства $ac = b^2 - D$ выводимъ

$$\sqrt{N(ac)} \leqq N(b) + \sqrt{N(D)};$$

изъ двухъ послѣднихъ неравенствъ заключаемъ, что

$$N(b) \leqq \sqrt{N(D)}.$$

Такимъ образомъ b можетъ имѣть только ограниченное число значеній. Для данныхъ D и b коэффиціенты a и c найдутся всевозможными разложеніями на два множителя выраженія $b^2 - D$. Но изъ этихъ разложеній только тѣ разложенія дадутъ приведенныя формы, для которыхъ

$$2N(b) \leqq N(a) \leqq N(c).$$

Теперь о раздѣленіи формъ на классы.—Двѣ формы причисляются къ одному классу, если онѣ эквивалентны; въ противномъ случаѣ обѣ формы принадлежатъ къ различнымъ классамъ. Такимъ образомъ каждый классъ состоитъ изъ всѣхъ эквивалентныхъ формъ съ даннымъ опредѣлителемъ. Если изъ каждаго класса возьмемъ по одной формѣ и только по одной, то составимъ систему неэквивалентныхъ формъ для даннаго опредѣлителя или, проще, систему формъ съ опредѣлителемъ D. Очевидно, что систему

неэквивалентныхъ формъ можно всю составить изъ приведенныхъ формъ. Замѣтимъ еще, что будутъ классы формъ первоначальныхъ перваго рода, классы первоначальныхъ формъ втораго рода и классы формъ третьяго рода.

§ 78. Предъидущаго достаточно, чтобы понять формулу Дирикле, которая составляетъ предметъ этой главы.

Мы знаемъ, что всѣ рѣшенія уравненія

$$t^2-Du^2=1 \tag{9}$$

даются формулою

$$t+u\sqrt{D}=\pm(T+U\sqrt{D})^n, \tag{9'}$$

въ которой T и U—основныя рѣшенія уравненія (9), а n имѣетъ всѣ цѣлыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Будемъ, ради краткости, употреблять обозначеніе

$$\sigma=N(T+U\sqrt{D}) \tag{10}$$

и называть черезъ H число классовъ первоначальныхъ формъ перваго рода съ опредѣлителемъ D. Пусть

$$D=\chi QV^2, \tag{11}$$

гдѣ χQ уже не содержитъ квадратныхъ множителей. Q есть произведеніе первоначальныхъ чиселъ двухъ родовъ: 1) чиселъ вида $4n+3$ и $-4n-3$ $(n\geqq 0)$, 2) комплексныхъ чиселъ $a+bi$, въ которыхъ a нечетно, а b четно. Q можетъ равняться ± 1, если только χ не равно 1. Что касается до χ, то это одна изъ четырехъ величинъ:

$$\chi=1,\ \chi=i,\ \chi=1+i,\ \chi=i(1+i). \tag{12}$$

Вспомнимъ, что соотвѣтственно этимъ четыремъ случаямъ имѣемъ

$$\left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2=1,\quad \left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2=(-1)^{\frac{1}{4}(\lambda^2+\nu^2-1)},\quad \left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2=(-1)^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}},$$

$$\left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2=(-1)^{\frac{1}{4}(\lambda^2+\nu^2-1)+\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}, \tag{12'}$$

гдѣ λ—положительное или отрицательное число вида $4N+1$, а ν —какое нибудь четное число.

Дирикле даетъ слѣдующую формулу:

$$H=\frac{8N(\sqrt{D})}{\pi\, lg\, \sigma}\sum_{\lambda,\,\nu}\left[\frac{\chi Q}{\lambda+\nu i}\right]^2\frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\rho}}. \tag{13}$$

Въ томъ случаѣ, когда Q не равно ± 1, можно формулѣ (13) придать иной видъ. Можно полагать, что $\lambda+\nu i$ и Q состоятъ изъ множителей, сравнимыхъ съ $+1$ или -1 по модулю $2+2i$; поэтому изъ формулы (64) страницы 301 легко вывести

$$\left[\frac{Q}{\lambda+\nu i}\right]^2=\left[\frac{\lambda+\nu i}{Q}\right]^2.$$

Такимъ образомъ формулу (13) можно написать иначе такъ, если Q не равно ± 1:

$$H=\frac{8N(\sqrt{D})}{\pi\, lg\, \sigma}\sum_{\lambda,\,\nu}\left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2\left[\frac{\lambda+\nu i}{Q}\right]^2\frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\rho}}. \tag{14}$$

Въ формулахъ (13) и (14) ρ обозначаетъ безконечно малое число. Суммы въ этихъ формулахъ распространяются на всѣ значенія для λ и ν между $-\infty$ и $+\infty$, удовлетворяющія тремъ условіямъ: 1) λ дѣйствительное число вида $4N+1$; 2) ν такое же число вида $2N$ (N можетъ быть и нуль); 3) $\lambda+\nu i$ число первое съ D. Суммированіе должно производить, не приравнивая нулю ρ, которое приравнивается нулю по произведеніи суммированія. Поэтому приравнять ρ нулю прежде суммированія можно только, опредѣливъ сначала тотъ порядокъ суммированія, который дѣйствительно дастъ то же, что получилось бы, если прежде суммировать, а потомъ положить $\rho=0$.

§ 79. Разсмотримъ сначала, какое соотношеніе между числами классовъ первоначальныхъ формъ перваго рода въ томъ случаѣ, когда $D=\chi QV^2$, и въ томъ случаѣ, когда $D=\chi Q$; въ послѣднемъ случаѣ будемъ называть D черезъ D'.

Будемъ, ради краткости, полагать $\lambda+\nu i=n$. Разсмотримъ формулу (13), считая сначала $D=D'$, а потомъ $D=\chi QV^2$. Для случая

$D=D'=\chi Q$ въ формулѣ (13) сумма распространяется на всѣ n, первыя съ χQ; легко сообразить, что

$$\sum_{\lambda,\,\nu}\left[\frac{D'}{n}\right]^2 : N(n)^{1+\rho}=\prod_{s}\left\{1-\left[\frac{D'}{s}\right]^2 : N(s)^{1+\rho}\right\}^{-1}, \qquad (15)$$

гдѣ произведеніе распространяется на всѣ первоначальныя Гауссовы числа s, первыя съ D'. Дѣйствительно

$$\left\{1-\left[\frac{D'}{s}\right]^2\frac{1}{N(s)^{1+\rho}}\right\}^{-1}=1+\left[\frac{D'}{s}\right]^2\frac{1}{N(s)^{1+\rho}}+\left[\frac{D'}{s}\right]^4\frac{1}{N(s)^{2+2\rho}}+\ldots$$

Перемноженіе такихъ безконечныхъ рядовъ даетъ сумму членовъ вида

$$\left[\frac{D'}{s^m s'^{m'} s''^{m''}\ldots}\right]^2\frac{1}{N(s^m s'^{m'} s''^{m''}\ldots)^{1+\rho}},$$

и такимъ образомъ получимъ первую часть равенства (15).

Пусть теперь въ формулѣ (13)

$$D=D'V^2=\chi Q V^2.$$

Такъ какъ всякій Эйзенштейновскій символъ равенъ нѣкоторой степени i, то

$$\left[\frac{V^2}{\lambda+\nu i}\right]^2=\left[\frac{V}{\lambda+\nu i}\right]^4=+1.$$

Поэтому въ формулѣ (13) можемъ χQ замѣнить черезъ $D=\chi Q V^2$. Но

$$\sum_{\lambda,\,\nu}\left[\frac{D}{n}\right]^2\frac{1}{N(n)^{1+\rho}}=\prod_{l}\left\{1-\left[\frac{D}{l}\right]^2 N(l)^{-1-\rho}\right\}^{-1}, \qquad (16)$$

гдѣ l обозначаетъ всевозможныя первоначальныя числа, первыя съ D.

Пусть r *первоначальное число, входящее множителемъ въ* V, *но не дѣлящее* D'; тогда

$$\prod_s \left\{1-\left[\frac{D'}{s}\right]^2 N(s)^{-1-\rho}\right\}^{-1}$$

$$=\prod_{l,r}\left\{1-\left[\frac{D}{l}\right]^2 N(l)^{-1-\rho}\right\}^{-1}\left\{1-\left[\frac{D'}{r}\right]^2 N(r)^{-1-\rho}\right\}^{-1}.$$

Назовемъ черезъ H', T' и U' такія же числа, что H, T и U; только первыя пусть относятся къ опредѣлителю D', а вторыя къ D. Тогда изъ предъидущаго легко заключаемъ, что

$$H=H'N(V)\frac{lgN(T'+U'\sqrt{D'})}{lgN(T+U\sqrt{D})}\prod_r\left\{1-\left[\frac{D'}{r}\right]^2\frac{1}{N(r)^{1+\rho}}\right\}. \quad (17)$$

Замѣтимъ теперь, что T и UV суть рѣшенія уравненія

$$t^2-D'u^2=1;$$

поэтому

$$T+U\sqrt{D}=T+UV\sqrt{D'}=\pm(T'+U'\sqrt{D'})^h,$$

гдѣ h—цѣлое, дѣйствительное число. Поэтому равенство (17) можемъ написать такъ:

$$H=\frac{H'N(V)}{h}\prod_r\left\{1-\left[\frac{D'}{r}\right]^2\frac{1}{N(r)}\right\}. \quad (17')$$

Зная H', мы съ помощью (17′) легко вычислимъ H, ибо число множителей r ограниченно. Формула (17′) замѣчательна тѣмъ, что въ нее входятъ только раціональныя, дѣйствительныя числа.

Изъ предъидущаго заключаемъ, что вопросъ сводится къ опредѣленію числа классовъ формъ первоначальныхъ перваго рода для случая $V=1$. *Далѣе мы и будемъ принимать*

$$D=\chi Q. \quad (18)$$

§ 80. Въ формулѣ (14) символъ Эйзенштейна

$$\left[\frac{\lambda+\nu i}{Q}\right]$$

можетъ быть замѣненъ символами Якоби. Положимъ для этого

$$Q=L(A+Bi),\ P=A^2+B^2,$$

гдѣ L, A и B—дѣйствительныя цѣлыя числа, A и B не имѣютъ общихъ множителей, A—нечетно, а B—четно. Въ такомъ случаѣ

$$\left[\frac{\lambda+\nu i}{Q}\right]^2=\left(\frac{\lambda^2+\nu^2}{L}\right)\left(\frac{A\lambda+B\nu}{P}\right).$$

Вопросъ теперь въ томъ, каковы $\lambda^2+\nu^2$ и $A\lambda+B\nu$. Такъ какъ $\lambda+\nu i$ не имѣетъ общихъ дѣлителей съ L, то $\lambda^2+\nu^2$ не должно имѣть общихъ дѣлителей съ L; также $\lambda+\nu i$ не должно имѣть общихъ дѣлителей съ $A+Bi$. Пусть $\lambda+\nu i$ число первое съ $A+Bi$, S—нѣкоторое дѣйствительное число и

$$S\equiv\lambda+\nu i\ (mod. A+Bi);$$

тогда дѣйствительное число S—первое съ $A+Bi$ и съ P. Но въ предъидущей главѣ мы вывели

$$AS\equiv A\lambda+B\nu\ (mod. P);$$

слѣдовательно $A\lambda+B\nu$—число первое съ P. Если же

$$\lambda+\nu i=(\lambda'+\nu' i)(\varepsilon+\delta i),\ A+Bi=(A'+B'i)(\varepsilon+\delta i),$$

и $\lambda'+\nu' i$ не имѣетъ общихъ дѣлителей съ $A'+B'i$, то

$$A^2+B^2=(A'^2+B'^2)(\varepsilon^2+\delta^2),\ A\lambda+B\nu=(A'\lambda'+B'\nu')(\varepsilon^2+\delta^2).$$

Отсюда видимъ, что при замѣнѣ Эйзенштейновскаго символа символами Якоби мы должны распространять сумму на такія значенія λ и ν, для которыхъ $\lambda^2+\nu^2$—число первое съ L, а $A\lambda+B\nu$—первое съ P.

Итакъ, если $D=\chi Q$ и если Q не равно ±1,

$$H=\frac{8N(\sqrt{D})}{\pi lg\sigma}\underset{\rho=0}{Lim}\left\{\sum_{\nu,\lambda}\left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2\left(\frac{\lambda^2+\nu^2}{L}\right)\left(\frac{A\lambda+B\nu}{P}\right)\frac{1}{(\lambda^2+\nu^2)^{1+\rho}}\right\}. \quad (19)$$

Дирикле, въ первомъ прибавленіи своего учебника (Vorlesungen über Zahlentheorie, zweite Auflage), даетъ:

$$\left(\frac{h}{P}\right) i^{\frac{1}{4}(P-1)^2} \sqrt{P} = \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) e^{\frac{2mh\pi i}{P}}, \tag{20}$$

гдѣ P—нечетное положительное число, не содержащее квадратныхъ дѣлителей, h—число первое съ P, положительное или отрицательное; сумма въ формулѣ (20) распространяется на всѣ положительныя m, меньшія P и первыя съ P. Въ формулѣ (19) P —число вида $4N+1$; поэтому въ этой формулѣ мы, вмѣсто (20), можемъ брать равенство

$$\left(\frac{h}{P}\right) = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \cos\frac{2mh\pi}{P}. \tag{20'}$$

Формулы (20) и (20′) даютъ намъ возможность замѣнить одинъ изъ символовъ Якоби въ формулѣ (19). Для замѣны другаго символа выведемъ другую формулу.

§ 81. Возьмемъ два равенства:

$$B_{m,n} = \sum_{y=0}^{y=p-1} b_{m,y}\, e^{-\frac{2ny\pi i}{p}}, \tag{21}$$

$$b_{m,y} = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{x=p-1} \left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p}\right) e^{\frac{2mx\pi i}{p}}; \tag{22}$$

въ этихъ формулахъ p обозначаетъ нѣкоторое положительное, нечетное, первоначальное число, a, b, c, m и n—цѣлыя, дѣйствительныя числа,

$$p > m \geqq 0, \quad p > n \geqq 0;$$

предполагается, что a, b и c не дѣлятся разомъ на p. Символъ $\left(\frac{q}{p}\right)$ равенъ нулю, если q дѣлится на p, и сравнимъ съ $q^{\frac{1}{2}(p-1)}$ по модулю p, если q не дѣлится на p; въ послѣднемъ случаѣ

символъ равенъ или $+1$, или -1. Суммы берутся для всѣхъ цѣлыхъ x и y между указанными въ формулахъ предѣлами.

Будемъ въ формулѣ (22) послѣдовательно полагать

$$m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots p-1;$$

суммируя полученные результаты подстановки, получаемъ

$$\sum_{z=0}^{z=p-1} b_{z,\,y}\, e^{-\frac{2mz\pi i}{p}} = \frac{1}{p}\sum_{t=0}^{t=p-1}\left(\frac{at^2+2bty+cy^2}{p}\right)\left\{1+e^{\frac{2(t-m)\pi i}{p}}\right.$$

$$\left.+e^{\frac{4(t-m)\pi i}{p}}+\ldots\ldots+e^{\frac{2(p-1)(t-m)\pi i}{p}}\right\}. \qquad (23)$$

То, что стоитъ въ кривыхъ скобкахъ, равно нулю, если t не равно m (ибо тогда это будетъ сумма корней уравненія $x^p=1$), и равно p, если $t=m$; поэтому равенство (23) можемъ написать такъ:

$$\left(\frac{am^2+2bmy+cy^2}{p}\right)=\sum_{z=0}^{z=p-1} b_{z,\,y}\, e^{-\frac{2mz\pi i}{p}}. \qquad (24)$$

Положимъ теперь въ равенствахъ (21) и (22)

$$m=l,\ n=k,\ y=z,$$

а въ равенствѣ (24)

$$y=l,\ m=k;$$

тогда получаемъ

$$B_{l,\,k}=\sum_{z=0}^{p-1} b_{l,\,z}\, e^{-\frac{2kz\pi i}{p}}=\frac{1}{p}\sum_{x,\,z=0}^{x,\,z=p-1}\sum\left(\frac{ax^2+2bxz+cz^2}{p}\right)e^{\frac{2(lx-kz)\pi i}{p}}, \qquad (25)$$

$$\left(\frac{ak^2+2bkl+cl^2}{p}\right)=\sum_{z=0}^{p-1} b_{z,\,l}\, e^{-\frac{2kz\pi i}{p}}. \qquad (26)$$

Сравнимъ теперь коэффиціенты $b_{m,n}$ и $b_{n,m}$. Если x, m и n не дѣлятся на p и если g—первообразный корень модуля p, то всегда найдутся такія числа ε и δ, цѣлыя, большія или равныя нулю, что

$$x \equiv ng^{\varepsilon} \ (mod.\ p), \quad x \equiv mg^{\delta} \ (mod.\ p);$$

слѣдовательно

$$b_{m,n} = \frac{1}{p}\left\{\left(\frac{c}{p}\right) + \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=p-2}\left(\frac{ag^{2\varepsilon}+2bg^{\varepsilon}+c}{p}\right) e^{\frac{2mng^{\varepsilon}\pi i}{p}}\right\},$$

$$b_{n,m} = \frac{1}{p}\left\{\left(\frac{c}{p}\right) + \sum_{\delta=0}^{\delta=p-2}\left(\frac{ag^{2\delta}+2bg^{\delta}+c}{p}\right) e^{\frac{2mng^{\delta}\pi i}{p}}\right\}.$$

Итакъ, если $p > m > 0$, $p > n > 0$, то

$$b_{m,n} = b_{n,m}. \tag{27}$$

Разсмотримъ теперь $b_{m,0}$ и $b_{0,m}$ (m не равно 0).

$$b_{m,0} = \frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right)\sum_{x=1}^{x=p-1} e^{\frac{2mx\pi i}{p}} = -\frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right); \tag{28}$$

$$b_{0,m} = \frac{1}{p}\sum_{x=0}^{x=p-1}\left(\frac{ax^2+2bxm+cm^2}{p}\right). \tag{29}$$

Будемъ въ этомъ параграфѣ употреблять обозначеніе

$$ac - b^2 = D$$

и положимъ, что *D не дѣлится на p.*

Если a дѣлится на p, то b не дѣлится, и тогда при измѣненіи x отъ нуля до $p-1$ формула $2bx+cm$ получаетъ p различныхъ значеній, составляющихъ полную систему вычетовъ по модулю p; поэтому

$$b_{0,m} = \frac{1}{p}\left(\frac{m}{p}\right)\sum_{x=0}^{x=p-1}\left(\frac{2bx+cm}{p}\right) = 0.$$

Но въ такомъ случаѣ

$$b_{m,0}=0;\ b_{m,0}=b_{0,m}.$$

Если a не дѣлится на p, то

$$b_{0,m}=\frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right)\sum_{z=0}^{z=p-1}\left(\frac{z^2+D}{p}\right). \tag{29'}$$

Пусть α, α', α'', α''',..... есть полная система квадратичныхъ вычетовъ модуля p, а β, β', β'', β''',...... полная система квадратичныхъ невычетовъ модуля p. Если D—квадратичный вычетъ модуля p и если z не дѣлится на p, то всегда можно найти такое α, что $z^2\equiv D\alpha\ (mod.\ p)$; слѣдовательно

$$b_{0,m}=\frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right)\left\{1+2\sum_{\alpha}\left(\frac{1+\alpha}{p}\right)\right\}, \tag{30}$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ α, принадлежащія одной и той же полной системѣ вычетовъ модуля p. Если D—невычетъ и z не дѣлится на p, то можемъ положить $z^2\equiv D\beta\ (mod.\ p)$; слѣдовательно

$$b_{0,m}=-\frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right)\left\{1+2\sum_{\beta}\left(\frac{1+\beta}{p}\right)\right\}, \tag{30'}$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ β одной и той же полной системы вычетовъ модуля p. Вопросъ, слѣдовательно, приводится къ опредѣленію числа вычетовъ и невычетовъ въ рядахъ чиселъ:

$$1+\alpha,\ 1+\alpha',\ 1+\alpha'',\ 1+\alpha''',\ldots\ldots;\ 1+\beta,\ 1+\beta',\ 1+\beta'',\ldots\ldots$$

Будемъ подъ

$$\alpha_0,\ \alpha_0',\ \alpha_0'',\ldots\ldots,\ \beta_0,\ \beta_0',\ \beta_0'',\ldots\ldots$$

подразумѣвать квадратичные вычеты и невычеты, заключающіеся между нулемъ и p. Пусть

ξ—число рѣшеній уравненія $1+\alpha_0=\alpha_0'$,

η—число рѣшеній уравненія $1+\alpha_0=\beta_0$,

ζ—число рѣшеній уравненія $1+\beta_0=\alpha_0$,

τ—число рѣшеній уравненія $1+\beta_0=\beta_0'$.

Мы будемъ различать два случая.

1-ый случай. $p\equiv1$ (*mod.* 4). Тогда

$$\left(\frac{p-z}{p}\right)=\left(\frac{z}{p}\right),$$

$p-1$ есть квадратичный вычетъ. Если къ вычету $p-1$ прибавимъ 1, то не получимъ ни квадратичнаго вычета, ни невычета; поэтому

$$\xi+\eta=\frac{p-3}{2}\,,\quad \zeta+\tau=\frac{p-1}{2}\,. \qquad (31)$$

Вслѣдствіе тѣхъ же причинъ можно положить

$$\beta_0=p-\beta_0',\ \alpha_0=p-\alpha_0';$$

тогда η обозначаетъ число рѣшеній уравненія

$$1+\alpha_0+\beta_0=p,$$

ζ—число рѣшеній уравненія

$$1+\beta_0+\alpha_0=p,$$

τ—число рѣшеній уравненія

$$1+\beta_0+\beta_0'=p.$$

Слѣдовательно

$$\eta=\zeta. \qquad (32)$$

Легко замѣтить, что число рѣшеній уравненія $1+\beta_0+\beta_0'=p$ равно числу рѣшеній сравненія

$$1+\beta+\beta'\equiv0\ (mod.\ p).$$

Но $1\equiv\beta\beta''$ (*mod.* p), $\beta'\equiv\alpha\beta$ (*mod.* p); слѣдовательно τ есть число рѣшеній сравненія

$$\beta''+1+\alpha\equiv0\ (mod.\ p)$$

или число рѣшеній уравненія $1+\alpha_0+\beta_0=p$. Итакъ

$$\tau=\eta. \tag{33}$$

Рѣшая уравненія (31), (32) и (33), получаемъ

$$\xi=\frac{p-5}{4},\ \eta=\zeta=\tau=\frac{p-1}{4}. \tag{34}$$

2-ой случай. $p\equiv 3$ (*mod.* 4). Тогда

$$\left(\frac{p-z}{p}\right)=-\left(\frac{z}{p}\right)$$

и $p-1$ есть невычетъ; поэтому

$$\xi+\eta=\frac{p-1}{2},\ \zeta+\tau=\frac{p-3}{2}. \tag{35}$$

Вслѣдствіе тѣхъ же причинъ можемъ положить

$$\beta_0=p-\alpha_0,\ \alpha_0=p-\beta_0;$$

слѣдовательно ξ обозначаетъ число рѣшеній уравненія

$$1+\alpha_0+\beta_0=p,$$

—число рѣшеній того же уравненія, а ζ—число рѣшеній уравненія

$$1+\beta_0+\beta_0'=p$$

или сравненія

$$1+\beta+\beta'\equiv 0\ (mod.\ p).$$

Но $1\equiv\beta\beta''$ (*mod.* p), $\beta'\equiv\alpha\beta$ (*mod.* p); слѣдовательно ζ есть число рѣшеній уравненія

$$1+\alpha_0+\beta_0=p.$$

Изъ предъидущаго заключаемъ

$$\xi=\zeta=\tau=\frac{p-3}{4},\ \eta=\frac{p+1}{4}. \tag{36}$$

Равенства (34) и (36) даютъ намъ общую теорему: *въ системѣ чиселъ*

$$1+\alpha,\ 1+\alpha',\ 1+\alpha'',\ 1+\alpha''',\ldots\ldots$$

всегда невычетовъ на единицу больше, чѣмъ вычетовъ; въ системѣ же чиселъ

$$1+\beta,\ 1+\beta',\ 1+\beta'',\ 1+\beta''',\ldots\ldots$$

равное число квадратичныхъ вычетовъ и невычетовъ.

Послѣдняя теорема показываетъ намъ, что въ равенствахъ (30) и (30′)

$$\sum_\alpha\left(\frac{1+\alpha}{p}\right)=-1,\quad \sum_\beta\left(\frac{1+\beta}{p}\right)=0;$$

а потому, если D не дѣлится на p, то

$$b_{0,\,m}=-\frac{1}{p}\left(\frac{a}{p}\right)=b_{m,\,0}. \tag{37}$$

Доказавъ равенство (27) для всякихъ m и n, получаемъ изъ равенствъ (25) и (26), если D *не дѣлится на* p,

$$\left(\frac{ak^2+2bkl+cl^2}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{x,\,y=0}^{x,\,y=p-1}\sum\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p}\right)e^{\frac{2(lx-ky)\pi i}{p}}. \tag{38}$$

Докажемъ теперь, что формула (38) вѣрна и въ томъ случаѣ когда p—число составное, если только это p не содержитъ квадратныхъ дѣлителей и $ac-b^2$—число первое съ p; это доказательство будетъ основано на извѣстномъ способѣ заключенія отъ n къ $n+1$.

Пусть $p=p'r$, гдѣ r—первоначальное нечетное число, не дѣлящее составное или первоначальное нечетное число p'; p' не содержитъ квадратныхъ дѣлителей; p' и r—положительныя числа. Положимъ, что доказаны формулы:

$$\left(\frac{ak^2+2bkl+cl^2}{r}\right)=\frac{1}{r}\sum_{\xi,\,\eta=0}^{\xi,\,\eta=r-1}\sum\left(\frac{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2}{r}\right)e^{\frac{2(l\xi-k\eta)\pi i}{r}},$$

$$\left(\frac{ak^2+2bkl+cl^2}{p'}\right)=\frac{1}{p'}\sum_{\lambda,\,\mu=0}^{\lambda,\,\mu=p'-1}\sum\left(\frac{a\mu^2+2b\mu\lambda+c\lambda^2}{p'}\right)e^{\frac{2(l\mu-k\lambda)\pi i}{p'}}.$$

Мы полагаемъ, что $ac-b^2$—число первое съ p и что символы $\left(\frac{n}{p}\right)$, $\left(\frac{n}{p'}\right)$, $\left(\frac{n}{r}\right)$ равны нулю, если n—число не первое съ p, p', r.

Перемноженіе даетъ намъ

$$\left(\frac{ak^2+2bkl+cl^2}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum\sum\sum\sum\left(\frac{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2}{r}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{a\mu^2+2b\mu\lambda+c\lambda^2}{p'}\right)e^{2\pi i\left\{l\left(\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{p'}\right)-k\left(\frac{\eta}{r}+\frac{\lambda}{p'}\right)\right\}}. \tag{39}$$

Полагая $0\leqq x<p$, $0\leqq y<p$, можемъ всегда написать:

$$\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{p'}=\frac{x}{p}+\varkappa,\ \frac{\eta}{r}+\frac{\lambda}{p'}=\frac{y}{p}+\gamma;$$

$\varkappa$ и γ при этомъ равны или 0, или единицѣ. Слѣдовательно

$$e^{2\pi i\left\{l\left(\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{p'}\right)-k\left(\frac{\eta}{r}+\frac{\lambda}{p'}\right)\right\}}=e^{\frac{2\pi i(lx-ky)}{p}}. \tag{40}$$

Мы знаемъ изъ теоріи сравненій, что x и y, опредѣляемыя сравненіями

$$p'\xi+r\mu\equiv x\ (mod.\ p),\ p'\eta+r\lambda\equiv y\ (mod.\ p), \tag{41}$$

получаютъ не одинаковыя значенія для различныхъ системъ ξ, μ и η, λ; поэтому, замѣняя въ равенствѣ (39) степень e черезъ равное ей выраженіе, въ которое входитъ x и y (см. (40)), мы должны будемъ x и y придавать всѣ значенія отъ 0 до $p-1$.

Изъ сравненій (41) можемъ вывести слѣдующее сравненіе:

$$p'^2(a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2)+r^2(a\mu^2+2b\mu\lambda+c\lambda^2)\equiv ax^2+2bxy+cy^2\ (mod.\ p),$$

откуда слѣдуетъ

$$\left(\frac{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2}{r}\right)=\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{r}\right),$$

$$\left(\frac{a\mu^2+2b\mu\lambda+c\lambda^2}{p'}\right)=\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p'}\right).$$

Такимъ образомъ вмѣсто (39) имѣемъ

$$\left(\frac{ak^2+2bkl+cl^2}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{x,\ y=0}^{x,\ y=p-1}\sum\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p}\right)e^{\frac{2(lx-ky)\pi i}{p}}. \quad (42)$$

Такъ какъ отъ подстановки вмѣсто x и y разомъ величинъ $p-x$ и $p-y$ символъ

$$\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p}\right)$$

не измѣняетъ своей величины, а показатель у e въ формулѣ (42) мѣняетъ свой знакъ, то формулѣ (42) можно придать слѣдующій видъ, въ которомъ уже не войдутъ мнимыя количества:

$$\left(\frac{ak^2+2bkl+cl^2}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{x,\ y=0}^{x,\ y=p-1}\sum\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p}\right)\cos\frac{2(lx-ky)\pi}{p}. \quad (43)$$

Въ формулахъ (42) и (43) можемъ положить $a=1$, $b=0$, $c=1$, ибо тогда $ac-b^2$ не будетъ имѣть общихъ дѣлителей съ какимъ бы то ни было числомъ. Положимъ еще, что $p=\pm L$, гдѣ знакъ должно выбирать такъ, чтобы $\pm L$ было положительно; положимъ, что $k=\lambda$, $l=\nu$; тогда получимъ тѣ формулы, которыя намъ необходимы для преобразованія формулы (19).

$$\left(\frac{\lambda^2+\nu^2}{L}\right)=\frac{1}{\pm L}\sum_{x,\ y=0}^{x,\ y=\pm L-1}\sum\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right)e^{\frac{2(\nu x-\lambda y)\pi i}{L}}; \quad (44)$$

$$\left(\frac{\lambda^2+\nu^2}{L}\right)=\frac{1}{\pm L}\sum_{x,\ y=0}^{x,\ y=\pm L-1}\sum\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right)\cos\frac{2(\nu x-\lambda y)\pi}{L}; \quad (45)$$

если L положительно, то въ формулахъ (44) и (45) должно вмѣсто $\pm L$ брать $+L$, если же L отрицательно, то $-L$. Замѣняя въ равенствѣ (45) y черезъ $\pm L-y$ и складывая результатъ замѣны съ (45), получимъ третью форму для нашего равенства:

$$\left(\frac{\lambda^2+\nu^2}{L}\right)=\frac{1}{\pm L}\sum_{x,\, y=0}^{x,\, y=\pm L-1}\sum\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right)\cos\frac{2\nu x\pi}{L}\cos\frac{2\lambda y\pi}{L}. \tag{46}$$

Замѣтимъ одну особенность нашего изложенія: во всѣхъ послѣднихъ формулахъ, начиная съ (21) и кончая (46), символъ $\left(\frac{m}{n}\right)$ имѣлъ для насъ три значенія: 0, $+1$ и -1. Напомнимъ, что и Дирикле при выводѣ формулы (20), въ своихъ Vorlesungen über Zahlentheorie (§ 116 втораго изданія), допускалъ три значенія для символа $\left(\frac{m}{n}\right)$; поэтому въ формулахъ (20) и (20′) намъ не за чѣмъ полагать h и m числами первыми съ P. Поэтому при измѣненіи λ и ν въ формулѣ (19) не за чѣмъ заботиться о томъ, будетъ ли $\lambda^2+\nu^2$ число первое съ L, а $A\lambda+B\nu$—первое съ P.

§ 82. И третій символъ формулы (19) мы преобразуемъ, хотя нѣсколько искуственнымъ образомъ. Формулы (12′) Дирикле представляетъ одною формулою

$$\left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2=\varepsilon^{\frac{\lambda^2+\nu^2-1}{4}}\delta^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}, \tag{47}$$

подразумѣвая подъ ε положительную единицу, когда $\chi=1$ или $1+i$, и отрицательную единицу, когда $\chi=i$ или $i(1+i)$; а подъ δ—положительную единицу, когда $\chi=1$ или i, и отрицательную единицу, когда $\chi=1+i$ или $i(1+i)$. Такъ какъ λ нечетно, то λ^2-1 дѣлится на 8; поэтому, полагая $\nu=2n$, можно предъидущую формулу написать такъ:

$$\left[\frac{\chi}{\lambda+\nu i}\right]^2=\varepsilon^n\delta^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}}. \tag{47′}$$

Легко убѣдиться теперь въ вѣрности слѣдующихъ формулъ:

$$\varepsilon^n = e^{n\theta\pi i},\quad \delta^{\frac{(\lambda+\nu)^2-1}{8}} = \frac{N(\sqrt{\chi})}{2}\left\{e^{\frac{(\lambda+\nu)\varphi\pi i}{4}} + e^{-\frac{(\lambda+\nu)\varphi\pi i}{4}}\right\},$$

гдѣ $\theta=0$, если $\varepsilon=+1$, и 1, если $\varepsilon=-1$; $\varphi=0$ при $\delta=+1$ и $\varphi=1$ при $\delta=-1$. Поэтому, вмѣсто равенства (47′), можемъ написать:

$$\left[\frac{\chi}{4h+1+2ni}\right]^2 = \frac{1}{2}N(\sqrt{\chi})e^{n\theta\pi i}\left\{e^{\frac{(4h+1+2n)\varphi\pi i}{4}} + e^{-\frac{(4h+1+2n)\varphi\pi i}{4}}\right\}; \quad (48)$$

мы положили $\lambda=4h+1$, гдѣ h—положительно, или отрицательно, или нуль.

Въ формулахъ (44) и (45) можно $\nu x-\lambda y$ замѣнить черезъ $\lambda x+\nu y$, ибо, во первыхъ, $\lambda^2+\nu^2$ симметрично относительно λ и ν и, во вторыхъ, y можно въ суммахъ замѣнить черезъ $\pm L-y$.

Пользуясь формулами (20), (44) и (48), можемъ формулу (19) написать такъ:

$$H = \frac{4N(\chi)}{\pi\, lg\,\sigma}\,\underset{\rho=0}{Lim}\sum_{h,\,n=-\infty}^{h,\,n=+\infty}\frac{F(h,n)}{\{(4h+1)^2+4n^2\}^{1+\rho}}, \quad (49)$$

$$F(h,n) \quad (49')$$

$$=\sum_{x^2+y^2=1}^{x,y=\pm L-1}\ \sum_{z=1}^{z=P-1}\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right)\left(\frac{z}{P}\right)\left\{e^{(4h+1)R\pi i+nS\pi i} + e^{(4h+1)R'\pi i+nS'\pi i}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} R&=\frac{1}{4}\varphi+\frac{2x}{L}+\frac{2Az}{P},\quad S=\frac{1}{2}\varphi+\theta+\frac{4y}{L}+\frac{4Bz}{P},\\ R'&=-\frac{1}{4}\varphi+\frac{2x}{L}+\frac{2Az}{P},\quad S'=-\frac{1}{2}\varphi+\theta+\frac{4y}{L}+\frac{4Bz}{P}.\end{aligned}\right\} \quad (49'')$$

$F(h,n)$, R, S, R' и S' должно нѣсколько измѣнить въ частныхъ случаяхъ; а именно: если $P=1$, то слѣдуетъ изъ формулъ, опредѣляющихъ эти величины, вычеркнуть выраженія:

$$\sum_{z=1}^{z=P-1}, \left(\frac{z}{P}\right), \frac{2Az}{P}, \frac{4Bz}{P}; \qquad (49''')$$

если $L=\pm 1$, то слѣдуетъ вычеркнуть выраженія:

$$\sum_{x^2+y^2=1}^{x,\ y=\pm L-1}, \left(\frac{x^2+y^2}{L}\right), \frac{2x}{L}, \frac{4y}{L}. \qquad (49^{\text{IV}})$$

Впрочемъ выраженія R, S, R' и S' можно и не измѣнять, ибо $e^{2\pi i}=1$. Для большей ясности замѣтимъ относительно x и y слѣдующее: *x и y измѣняются отъ 0 до $\pm L-1$ такъ, что x^2+y^2 измѣняется отъ 1 до $2(\pm L-1)^2$.*

Прежде, чѣмъ идти далѣе, мы должны сообразить, какимъ образомъ можно освободиться отъ ρ прежде суммированія.

§ 83. Разсмотримъ двойной безконечный рядъ

$$\sum_{m,\ n}\frac{\alpha_{m,\ n}}{(m^2+n^2)^s}, \qquad (50)$$

въ которомъ s—нѣкоторое положительное цѣлое или дробное число, а коэффиціенты—нѣкоторыя дѣйствительныя числа, абсолютная величина которыхъ не превышаетъ нѣкоторое положительное число C; m и n—цѣлыя числа. Мы будемъ полагать m и n положительными, измѣняющимися отъ 1 до ∞.

Замѣтимъ теперь же, разъ на всегда, что свойства, которыя мы впредь докажемъ для ряда (50), будутъ вѣрны и для такихъ двойныхъ рядовъ, въ которыхъ m и n могутъ быть отрицательными. Дѣйствительно, если m и n могутъ быть отрицательными, то двойной рядъ можно будетъ раздѣлить на четыре двойные безконечные ряда, въ которыхъ m и n можно уже положить положительными. Что касается до случая, когда одно изъ чиселъ m или n равно нулю, то рядъ

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{\alpha_{m,\ 0}+\alpha_{-m,\ 0}}{m^{2s}}$$

будетъ сходящійся всякій разъ, какъ $s > \frac{1}{2}$; къ случаю же, когда $s < \frac{1}{2}$, очевидно, можно приложить разсужденія § 101 учебника теоріи чиселъ Дирикле.

Принимая m и n положительными, будемъ, ради краткости, употреблять обозначеніе

$$a_{m,n} = \frac{\alpha_{m,n}}{(m^2+n^2)^s}. \tag{50'}$$

Расположимъ для ясности всѣ $a_{m,n}$ въ табличку:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \ldots\ldots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \ldots\ldots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \ldots\ldots \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \ldots\ldots \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \tag{51}$$

Будемъ предполагать, что всѣ a, имѣющія одинаковые первые индексы, расположены въ одну правильную строку, а всѣ a, имѣющія одинаковые вторые индексы, расположены въ правильный столбецъ. Будемъ, ради краткости, называть l-ымъ столбцомъ тотъ столбецъ, который состоитъ изъ a со вторыми индексами, равными l; также будемъ называть l-ою строкою ту строку, которая состоитъ изъ a съ первыми индексами, равными l.

Докажемъ сначала, что при $s > 1$ разсматриваемая нами двойная строка, сумма всѣхъ (51), сходящаяся и даетъ всегда одинъ и тотъ же результатъ, въ какомъ бы мы порядкѣ ни суммировали члены. Это будетъ доказано, если докажемъ то же для двойнаго ряда, въ которомъ всѣ $\alpha_{m,n} = C$. Бріо и Буке, на страницѣ 106 втораго изданія своего трактата объ эллиптическихъ функціяхъ, доказываютъ, что двойные ряды, состоящіе только изъ положительныхъ членовъ, даютъ одну и ту же конечную сумму при всякихъ способахъ суммированія, если только даютъ эту конечную сумму при одномъ какомъ нибудь способѣ суммированія. Такимъ

образомъ все доказательство сводится къ суммированію какимъ либо способомъ чиселъ (51) при предположеніи $\alpha_{m,n}=C$, $s>1$. Найдемъ сумму l первыхъ членовъ l-ой строки и $l-1$ первыхъ членовъ l-аго столбца. Наименьшій знаменатель въ этихъ $2l-1$ членахъ будетъ

$$(l^2+1)^s;$$

поэтому можемъ написать:

$$\sum_{m=1}^{m=l-1}\frac{C}{(m^2+l^2)^s}+\sum_{n=1}^{n=l}\frac{C}{(l^2+n^2)^s}<\frac{(2l-1)C}{l^{2s}}<\frac{2C}{l^{2s-1}}.$$

Дальнѣйшее суммированіе мы будемъ производить, измѣняя l отъ 1 до ∞; тогда изъ предъидущихъ неравенствъ заключаемъ:

$$\sum_{m,n}\frac{C}{(m^2+n^2)^s}<\sum_{l=1}^{l=\infty}\frac{2C}{l^{2s-1}}.$$

$2s-1>1$; извѣстно же, что послѣдній рядъ сходящійся, если $2s-1>1$. Стало быть и та сумма, которая стоитъ въ первой части послѣдняго неравенства, равна конечной величинѣ, что и требовалось доказать.

Но если $s=1$, то предъидущее доказательство не годится. Однако и въ случаѣ $s=1$ рядъ (50) при суммированіи можетъ давать конечную величину, равную предѣлу, къ которому приближается рядъ (50), когда s, будучи болѣе единицы, приближается къ единицѣ; но для этого коэффиціенты $\alpha_{m,n}$ должны удовлетворять нѣкоторому условію, и само суммированіе должно производиться по плану, удовлетворяющему извѣстнымъ условіямъ. Эти условія будутъ предметомъ нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій на столько, на сколько это необходимо для цѣли нашего сочиненія.

Разсмотримъ безконечный рядъ

$$A_m=\frac{\alpha_{m,1}}{(m^2+1^2)^s}+\frac{\alpha_{m,2}}{(m^2+2^2)^s}+\frac{\alpha_{m,3}}{(m^2+3^2)^s}+\ldots\ldots, \qquad (52)$$

въ которомъ m—постоянное, цѣлое, положительное число, а $s>0$. Положимъ, что *абсолютная величина выраженія*

$$\sum_{n=1}^{n=p} \alpha_{m,\,n} = \beta_p \tag{53}$$

всегда менѣе нѣкотораго положительнаго числа C; p можетъ быть, какъ угодно, велико. Очевидно, рядъ (52) представляетъ m—ую строку таблицы (51). Будемъ суммировать рядъ (52) въ томъ порядкѣ, въ какомъ написаны его члены.

Составимъ новый безконечный рядъ:

$$\beta_1\left[\frac{1}{(m^2+1^2)^s}-\frac{1}{(m^2+2^2)^s}\right]+\beta_2\left[\frac{1}{(m^2+4)^s}-\frac{1}{(m^2+9)^s}\right]$$

$$+\beta_3\left[\frac{1}{(m^2+9)^s}-\frac{1}{(m^2+16)^s}\right]+\ldots\ldots\ldots=\sum_{p=1}^{\infty} b_p\,. \tag{54}$$

Возьмемъ сумму p первыхъ дробей ряда (52) и сумму p первыхъ членовъ ряда (54); если вычтемъ изъ первой суммы вторую, то, очевидно, получимъ

$$\frac{\beta_p}{[m^2+(p+1)^2]^s}\,.$$

Такъ какъ абсолютная величина β_p менѣе C, а

$$[m^2+(p+1)^2]^s$$

безпредѣльно увеличивается при увеличенiи p, то ясно, что ряды (52) и (54) имѣютъ тотъ же конечный или безконечный предѣлъ.

Разсмотримъ теперь сумму

$$b_p+b_{p+1}+b_{p+2}+\ldots\ldots\ldots+b_{p+l-1}\,. \tag{55}$$

Выраженiе

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^s}-\frac{1}{\{m^2+(n+1)^2\}^s}$$

положительно; коэффицiенты же $\beta_p,\ \beta_{p+1},\ \beta_{p+2},\ldots\ldots\beta_{p+l-1}$ или положительны, или отрицательны, или равны нулю; абсолют-

ная величина этихъ коэффиціентовъ менѣе C. Поэтому абсолютная величина суммы (55) будетъ менѣе той суммы, которая получится изъ (55) замѣною всѣхъ β черезъ C. Слѣдовательно абсолютная величина суммы (55) менѣе

$$\frac{C}{(m^2+p^2)^s}-\frac{C}{(m^2+(p+l)^2)^s}<\frac{C}{(m^2+p^2)^s}, \tag{56}$$

и это вѣрно, какъ бы ни было велико l.

Если мы положимъ $p=1$, то увидимъ, что абсолютная величина суммы l первыхъ членовъ ряда (54) менѣе

$$\frac{C}{(m^2+1)^s}<\frac{C}{m^{2s}}, \tag{56'}$$

какъ велико ни было бы l. Это есть вѣрный признакъ того, что рядъ (54) имѣетъ конечный предѣлъ; абсолютная величина этого предѣла менѣе Cm^{-2s}.

Пусть теперь въ рядѣ (54) s измѣняется, оставаясь болѣе положительнаго числа $\varkappa$. Раздѣлимъ рядъ (54) на двѣ части: первую—конечную, состоящую изъ p первыхъ членовъ ряда, вторую—безконечную, состоящую изъ всѣхъ остальныхъ членовъ ряда. Первая изъ этихъ частей, очевидно, есть непрерывная функція s; вторая же часть имѣетъ абсолютную величину, меньшую втораго изъ выраженій (56), а слѣдовательно подавно меньшую

$$\frac{C}{(m^2+p^2)^\varkappa}. \tag{57}$$

Выбирая p достаточно большимъ, мы всегда можемъ сдѣлать такъ, что послѣдняя дробь будетъ менѣе всякой, напередъ назначенной, величины. Пусть съ измѣненіемъ s предѣлъ ряда (54) дѣлаетъ при своемъ измѣненіи скачокъ, абсолютная величина котораго μ. Этотъ скачокъ можетъ только произойти отъ прерывнаго измѣненія второй, безконечной части ряда (54); но такъ какъ абсолютная величина этой части при измѣненіи s остается менѣе дроби (57), то

$$\mu<2C(m^2+p^2)^{-\varkappa}.$$

Но было объяснено, что всегда можно выбрать p на столько великимъ, что

$$2C(m^2+p^2)^{-\varkappa}<\mu.$$

Оба послѣднія неравенства противорѣчатъ другъ другу; слѣдовательно рядъ (54) имѣетъ предѣломъ непрерывную функцію s.

Все, сказанное выше о рядѣ (52), легко примѣняется и къ случаю $m=0$, если замѣнить выраженія (56′) черезъ C; въ такомъ случаѣ мы получаемъ именно то, что изложено у Дирикле въ § 101 его Vorlesungen über Zahlentheorie.

Итакъ рядъ (52) имѣетъ конечный предѣлъ, который при измѣненіи s равенъ непрерывной функціи s; абсолютная величина этого предѣла менѣе дробей (56′).

Разсмотримъ теперь безконечный рядъ

$$A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots\ldots+A_p+\ldots\ldots\ldots; \qquad (58)$$

члены этого ряда мы будемъ суммировать въ томъ порядкѣ, въ какомъ они написаны. Абсолютная величина этого ряда, очевидно, менѣе

$$C\left[1+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{4^{2s}}+\frac{1}{5^{2s}}+\ldots\ldots\right]. \qquad (59)$$

Рядъ (59)—сходящійся, если $2s>1$ или $s>\frac{1}{2}$. Слѣдовательно рядъ (58), а также двойной рядъ (50) при вышеописанномъ способѣ суммированія имѣютъ конечный предѣлъ, если $s>\frac{1}{2}$ и если условіе (53) удовлетворяется.

Положимъ же, что $s>\varkappa>\frac{1}{2}$ и что условіе (53) удовлетворено. Раздѣлимъ рядъ (58) на двѣ части: на первую—конечную, содержащую 2^c-1 членовъ, гдѣ c—цѣлое, положительное число, и вторую—безконечную, состоящую изъ всѣхъ остальныхъ членовъ ряда. Такъ какъ $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots$ суть непрерывныя функціи s, то первая часть ряда (58) будетъ непрерывною функціею s, если будемъ измѣнять s. Вторая часть нашего ряда имѣетъ абсолютную величину, которая менѣе

$$C\left[\frac{1}{2^{2cs}}+\frac{1}{(2^c+1)^{2s}}+\frac{1}{(2^c+2)^{2s}}+\frac{1}{(2^c+3)^{2s}}+\ldots\ldots\right]$$

$$<C\left[\frac{1}{2^{2c\varkappa}}+\frac{1}{(2^c+1)^{2\varkappa}}+\frac{1}{(2^c+2)^{2\varkappa}}+\frac{1}{(2^c+3)^{2\varkappa}}+\ldots\ldots\right],$$

и, какъ бы ни измѣнялось s, оставаясь болѣе $\varkappa$, всегда абсолютная величина второй части ряда (58) будетъ менѣе послѣдняго сходящагося безконечнаго ряда, а слѣдовательно подавно менѣе

$$C\left[\frac{2^c}{2^{2c\varkappa}}+\frac{2^{c+1}}{2^{2(c+1)\varkappa}}+\frac{2^{c+2}}{2^{2(c+2)\varkappa}}+\ldots\ldots\right]. \tag{60}$$

Положимъ, что $2\varkappa=1+\tau$, гдѣ τ—положительное число; тогда выраженіе (60) можно написать такъ:

$$C\left[2^{-c\tau}+2^{-(c+1)\tau}+2^{-(c+2)\tau}+\ldots\right]=\frac{2^{-\tau c}C}{1-2^{-\tau}}=2^{-\tau c}.B, \tag{60'}$$

гдѣ B—нѣкоторое положительное число, независимое отъ c, т.-е. отъ числа членовъ въ первой, конечной части ряда (58). Итакъ абсолютная величина второй части ряда (58) при всѣхъ измѣненіяхъ s остается менѣе $2^{-\tau c}B$. Очевидно, мы всегда можемъ выбрать c на столько великимъ, чтобы $2^{-\tau c}B$ было менѣе, какой угодно, положительной величины.

Положимъ, что при измѣненіи s предѣлъ ряда (58) сдѣлалъ скачокъ, абсолютная величина котораго μ. Этотъ скачокъ можетъ только произойти отъ прерывнаго измѣненія второй, безконечной части разсматриваемаго нами ряда. Но такъ какъ абсолютная величина этой второй части при измѣненіи s остается менѣе выраженія (60'), то

$$\frac{1}{2}\mu<2^{-\tau c}B.$$

Было однако объяснено, что можно выбрать такъ c, что $2^{-\tau c}B$ будетъ менѣе $\frac{1}{2}\mu$, что противорѣчитъ предъидущему неравенству. Слѣдовательно рядъ (58) имѣетъ предѣломъ непрерывную функцію s.

Мы доказали, что рядъ (50) при $s>1$ даетъ конечный результатъ при всякомъ способѣ суммированія, если абсолютная величина $\alpha_{m,n}$ не превышаетъ извѣстнаго положительнаго числа; слѣдовательно та же конечная величина получится, если мы будемъ сначала суммировать члены каждой строки таблицы (51) отдѣльно, а потомъ будемъ суммировать результаты, полученные отъ суммированія различныхъ строкъ. Пусть теперь условіе (53) соблюдено; если при этомъ $s>1$, то получимъ, суммируя по строкамъ, непрерывную функцію s; сдѣлавъ въ этой функціи $s=1$, получимъ конечную величину, предѣлъ, къ которому стремится сумма (50), когда s приближается къ единицѣ. Но только что доказано, что та же непрерывная функція s получится при такомъ же суммированіи по строкамъ и тогда, когда

$$\frac{1}{2}<s=1+\rho\leqq 1\,;$$

поэтому мы получимъ тотъ же результатъ, если приравняемъ ρ нулю передъ суммированіемъ.

До сихъ поръ мы предполагали, что суммированіе членовъ одной строки, а потомъ суммированіе самихъ строкъ производятся въ извѣстномъ порядкѣ. Разсмотримъ, необходимо ли это условіе въ случаѣ $s=1$.

Если $s=1$, то мы можемъ въ рядѣ (52) замѣнить всѣ α черезъ нѣкоторое положительное число B_1, болѣе котораго не можетъ быть ни одна изъ абсолютныхъ величинъ α, и все-таки рядъ (52) останется сходящимся, ибо

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^s}<\frac{1}{n^{2s}}=\frac{1}{n^2}.$$

Но извѣстно, что въ такомъ случаѣ рядъ (52), съ его первоначальными коэффиціентами α, даетъ одну и ту же сумму, въ какомъ бы порядкѣ ни производилось суммированіе.

Рядъ (59) при $s=1$ также сходящійся, и члены его можно суммировать, въ какомъ угодно, порядкѣ; поэтому то же самое вѣрно и для ряда (58).

Итакъ въ двойномъ рядѣ (50) можно положить $s=1$ передъ суммированіемъ, если условіе (53) вѣрно для ряда и если суммированіе производится въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) складываются всѣ члены извѣстной строки, въ какомъ угодно, порядкѣ (или всѣ члены извѣстнаго столбца, если въ условіи (53) m—перемѣнное, а n—постоянное); 2) складываются результаты, полученные отъ суммированія строкъ (или столбцовъ).

§ 84. Примѣнимъ предъидущій анализъ къ формулѣ (49). Легко замѣтить, что выраженіе

$$\operatorname*{Lim}_{\rho=0}\sum_{h,\,n=-\infty}^{h,\,n=+\infty}\sum\frac{F(h,n)}{\{(4h+1)^2+4n^2\}^{1+\rho}}$$

можно разсматривать какъ алгебраическую сумму выраженій

$$F=\operatorname*{Lim}_{\rho=0}\sum_{h,\,n=-\infty}^{h,\,n=+\infty}\sum\frac{e^{(4h+1)R\pi i+nS\pi i}}{\{(4h+1)^2+4n^2\}^{1+\rho}}, \tag{61}$$

если въ выраженіяхъ R и S, опредѣляемыхъ (49″), допускать для φ три значенія: 0, $+1$ и -1. Ради краткости изложенія, мы и допустимъ дѣйствительно на время для φ три значенія.

Будемъ впредь принимать L положительнымъ; это можно сдѣлать, ибо для каждой формы $ax^2+2bxy+cy^2$ съ опредѣлителемъ D можно найти форму $aix^2+2bixy+ciy^2$ съ опредѣлителемъ $-D$. Очевидно также слѣдующее: если формы $ax^2+2bxy+cy^2$ и $a'x^2+2b'xy+c'y^2$ неэквивалентны, то и форма $aix^2+2bixy+ciy^2$ неэквивалентна формѣ $a'ix^2+2b'ixy+c'iy^2$; наоборотъ, если первая пара формъ эквивалентна, то и вторая. Также легко видѣть, что вторая часть равенства (49) имѣетъ одну и ту же величину, будетъ ли L положительно, или отрицательно, если только абсолютная величина L одна и та же.

При разсмотрѣніи ряда (61) будемъ различать четыре случая: 1) случай, когда P не равно 1; 2) случай, когда $P=1$, но χ не равно 1; 3) случай, когда $P=1$, $\chi=1$, но y не равно нулю; 4) случай, когда $P=1$, $\chi=1$, $y=0$.

1) Положимъ сначала, что P не равно 1. Придадимъ n два значенія:

$$n=n_0, \quad n=n_0+4Ll,$$

гдѣ n_0 и l—нѣкоторыя цѣлыя числа. Легко видѣть, что для обоихъ этихъ значеній n выраженіе

$$e^{(4h+1)R\pi i+\frac{1}{2}n\left(\varphi+2\theta+\frac{8y}{L}\right)\pi i} \tag{62}$$

имѣетъ одну и ту же величину, если $4h+1$ одно и то же въ обоихъ случаяхъ.

Будемъ придавать теперь n послѣдовательно значенія:

$$n_0, \; n_0+4L, \; n_0+8L, \ldots\ldots n_0+4(P-1)L; \tag{63}$$

тогда выраженіе (62) имѣетъ всегда одно и то же конечное значеніе. Между числами (63) нѣтъ чиселъ, сравнимыхъ между собою по модулю P, ибо P—число первое съ $4L$; слѣдовательно числа (63) составляютъ полную систему вычетовъ по модулю P.

Пусть теперь z—число первое съ P; тогда числа

$$2Bzn_0, \; 2Bz(n_0+4L), \ldots\ldots 2Bz\{n_0+4(P-1)L\} \tag{63'}$$

также составляютъ полную систему вычетовъ по модулю P; поэтому, если въ формулѣ

$$e^{\frac{4nBz\pi i}{P}} \tag{64}$$

величинѣ n будемъ придавать различныя значенія изъ ряда (63), то получимъ всѣ корни уравненія

$$x^P=1.$$

Такъ какъ сумма корней послѣдняго уравненія равна нулю, то

$$\sum_n e^{(4h+1)R\pi i+nS\pi i}=0, \tag{64'}$$

если сумма распространяется на всѣ n изъ ряда (63).

Если $z=z'a$, $P=P'a$ и если z'—число первое съ P', то выраженіе (64) обратится въ выраженіе

$$e^{\frac{4nBz'\pi i}{P'}},$$

а рядъ (63) дастъ a разъ полную систему вычетовъ по модулю P'. Слѣдовательно, придавая n всѣ значенія изъ ряда (63), мы получимъ изъ послѣдней нашей формулы a разъ всѣ корни уравненія

$$x^{P'}=1;$$

а потому равенство (64′) и въ этомъ случаѣ вѣрно.

Случай, когда z дѣлится на P, намъ не за чѣмъ разсматривать, ибо въ формулѣ (49) z измѣняется отъ 1 до $P—1$.

Будемъ теперь n придавать всѣ цѣлыя значенія отъ n_0 до $n_0+4PL—1$ включительно. Всѣ эти $4PL$ чиселъ можно раздѣлить на $4L$ группы, подобныя (63); при измѣненіи n въ предѣлахъ каждой группы равенство (64′) удовлетворяется; слѣдовательно

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_0+4PL-1} e^{(4h+1)R\pi i+nS\pi i}=0. \tag{65}$$

Извѣстно, что $e^{xi}=cosx+isinx$ и что абсолютныя величины $cosx$ и $sinx$ при x дѣйствительномъ не превышаютъ единицы; поэтому и дѣйствительная часть, и коэффиціентъ при i въ выраженіи (61) таковы, что сумма (53) для нихъ всегда менѣе $4PL$; предполагается, что суммированіе для n положительнаго отдѣлено отъ суммированія для n отрицательнаго и нуля, какъ это объяснено на страницѣ 366.

Можно впрочемъ легко доказать, что то же заключеніе вѣрно и въ томъ случаѣ, когда рядъ (61) одновременно (параллельно) суммируется и для n положительнаго, и для n отрицательнаго. Дѣйствительно, рядъ (61) можно написать такъ:

$$F=\underset{\rho=0}{Lim}\left\{\sum_{h=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(4h+1)R\pi i}}{(4h+1)^2}+2\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{e^{(4h+1)R\pi i}cos\,nS\pi}{\{(4h+1)^2+4u^2\}^{1+\rho}}\right\}.$$

Полагая въ равенствѣ (65) n_0 положительнымъ, а потомъ замѣняя въ этомъ равенствѣ n_0 черезъ $-n_0-4PL+1$, легко съ помощью сложенія выводимъ:

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_0+4PL-1} e^{(4h+1)R\pi i}\cos nS\pi=0. \qquad (65')$$

Послѣ этого понятно, что и въ этомъ случаѣ абсолютная величина суммы (53) всегда менѣе нѣкотораго положительнаго числа, легко опредѣляемаго.

Итакъ суммированіе въ выраженіи (61) можно производить если $P>1$, сдѣлавъ передъ суммированіемъ $\rho=0$; при этомъ суммировать должно такъ, какъ это объяснено на страницѣ 374.

Легко повторить предъидущій анализъ и для случая $L=1$.

2) Пусть $P=1$, но χ не равно 1. Будемъ придавать n послѣдовательно четыре значенія:

$$n_0,\ n_0+L,\ n_0+2L,\ n_0+3L; \qquad (66)$$

если при этомъ $4h+1$ постоянно, то выраженіе

$$e^{(4h+1)R\pi i+\frac{4ny\pi i}{L}}$$

для всѣхъ четырехъ значеній (66) n имѣетъ одну и ту же величину. Разсмотримъ же, какъ различаются выраженія:

$$e^{\frac{1}{2}n_0(\varphi+2\theta)\pi i},\ e^{\frac{1}{2}(n_0+L)(\varphi+2\theta)\pi i},\ e^{\frac{1}{2}(n_0+2L)(\varphi+2\theta)\pi i},\ e^{\frac{1}{2}(n_0+3L)(\varphi+2\theta)\pi i}. \qquad (67)$$

Если $\chi=i$, то $\varphi=0$, $\theta=1$. Въ такомъ случаѣ два изъ чиселъ

$$n_0,\ n_0+L,\ n_0+2L,\ n_0+3L$$

четны, а два нечетны, ибо L нечетно. Поэтому изъ выраженій (67) два равны $+1$ и два -1.

Если $\chi=1+i$, то $\varphi=\pm1$, $\theta=0$. Числа (66) не сравнимы между собою по модулю 4; поэтому выраженія (67) суть тѣ же выраженія:

$$e^{\frac{1}{2}\pi i}=i,\ e^{\pi i}=-1,\ e^{\frac{3}{2}\pi i}=-i,\ e^{2\pi i}=+1,$$

только расположенныя въ иномъ порядкѣ. Слѣдовательно сумма четырехъ чиселъ (67) равна нулю.

Если $\chi=i(1+i)$, то $\varphi=\pm1$, $\theta=1$. Числа

$$n_0(\varphi+2\theta),\ (n_0+L)(\varphi+2\theta),\ (n_0+2L)(\varphi+2\theta),\ (n_0+3L)(\varphi+2\theta)$$

будутъ и въ этомъ случаѣ составлять полную систему вычетовъ по модулю 4, ибо $\varphi+2\theta$ или равно 1, или равно 3. Поэтому въ этомъ случаѣ сумма четырехъ чиселъ (67) также равна нулю.

Итакъ во всѣхъ трехъ случаяхъ

$$\sum_n e^{(4h+1)R\pi i+nS\pi i}=0,$$

если h постоянно, а n въ суммѣ получаетъ четыре только значенія: n_0, n_0+L, n_0+2L, n_0+3L.

Послѣ предъидущихъ разсужденій легко заключить, что равенства (65) и (65′) вѣрны и для случая $P=1$; слѣдовательно и въ этомъ случаѣ абсолютная величина суммы (53) для дѣйствительной части и для коэффиціента при i въ выраженіи (61) не превышаетъ $4L$; также эта абсолютная величина не превыситъ извѣстнаго предѣла, если суммированіе будемъ производить одновременно (параллельно) для n положительныхъ и n отрицательныхъ, какъ это было объяснено на страницѣ 376. Итакъ къ ряду (61) можно примѣнить способъ суммированія, описанный на страницѣ 374.

Предъидущій анализъ можно было бы повторить при $L=1$.

3) Пусть $P=1$, $\chi=1$, но y не равно 0 или вообще не дѣлится на L. Въ этомъ случаѣ формула (61) имѣетъ слѣдующій простой видъ:

$$F=\underset{\rho=0}{Lim}\sum_{h,\ n=-\infty}^{h,\ n=+\infty}\frac{e^{\frac{2(4h+1)x\pi i}{L}+\frac{4ny\pi i}{L}}}{\{(4h+1)^2+4n^2\}^{1+\rho}}.$$

Если y—число первое съ L, то, придавая n значенія:

$$n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\ n_0+3, \ldots\ldots n_0+L-1,$$

мы изъ формулы

$$e^{\frac{4n y \pi i}{L}}$$

получимъ всѣ корни уравненія $x^L=1$. Такъ какъ сумма корней этого уравненія равна нулю, то

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_0+L-1} e^{\frac{2(4h+1)x\pi i}{L}+\frac{4ny\pi i}{L}}=0\,. \qquad (68)$$

Если $y=y'a$, $L=L'a$, гдѣ y' и L'—числа первыя между собою, то, придавая n значенія:

$$n_0,\ n_0+1,\ n_0+2, \ldots\ldots n_0+L'-1,$$

мы изъ формулы

$$e^{\frac{4ny\pi i}{L}}=e^{\frac{4ny'\pi i}{L'}}$$

получимъ всѣ корни уравненія $x^{L'}=1$. Поэтому и въ этомъ случаѣ (68) равенство вѣрно.

Итакъ, если $P=1$, $\chi=1$, а y не равно нулю или вообще не дѣлится на L, то при суммированіи по n абсолютная величина суммы (53) всегда менѣе L.

Но если $y=0$ или вообще дѣлится на L, то выраженіе $e^{\frac{4ny\pi i}{L}}$ при всѣхъ значеніяхъ n равно 1; а поэтому это—единственный случай, когда равенство (65) не удовлетворяется.

Итакъ, за исключеніемъ случая $P=1, \chi=1, y=0$ [1]), мы въ формулѣ (61) можемъ сдѣлать передъ суммированіемъ $\rho=0$, а на

[1]) Эти слова не должно понимать въ томъ смыслѣ, что суммированіе сначала по n, а потомъ по h въ разсматриваемомъ случаѣ невозможно: возможность только не доказана нами.

суммы, относящіяся къ h и n, смотрѣть какъ на обыкновенныя суммы, при чемъ суммировать сначала относительно n, а потомъ то, что получится отъ этого перваго суммированія, относительно h.

Такого же рода разсужденія показали бы намъ, что можно сдѣлать $\rho=0$, потомъ суммировать относительно h и наконецъ суммировать относительно n; въ этомъ случаѣ возможность суммированія не будетъ доказана только для случая $P=1$, $\chi=1$, $x=0$. Этотъ способъ суммированія мы примѣнимъ къ нашему четвертому случаю.

4) Пусть $P=1$, $\chi=1$, $y=0$, но x не равно 0 и вообще не дѣлится на L. Въ этомъ случаѣ равенство (61) обращается въ слѣдующее:

$$F=\underset{\rho=0}{Lim}\sum_{h,\,n=-\infty}^{h,\,n=+\infty}\sum \frac{e^{\frac{2(4h+1)x\pi i}{L}}}{\{(4h+1)^2+4n^2\}^{1+\rho}}. \tag{69}$$

Пусть x—число первое съ L. Будемъ придавать h послѣдовательно значенія:

$$h_0,\ h_0+1,\ h_0+2,\ h_0+3, \ldots\ldots h_0+L-1;$$

тогда выраженіе $(4h+1)x$ доставитъ намъ полную систему вычетовъ по модулю L, а выраженіе

$$e^{\frac{2(4h+1)x\pi i}{L}}$$

дастъ всѣ корни уравненія $y^L=1$. Поэтому

$$\sum_{h=h_0}^{h=h_0+L-1} e^{\frac{2(4h+1)x\pi i}{L}}=0. \tag{70}$$

Пусть теперь $x=x'a$, $L=L'a$, гдѣ x' и L'—числа первыя между собою. Будемъ придавать h послѣдовательно значенія:

$$h_0,\ h_0+1,\ h_0+2, \ldots\ldots h_0+L'-1,$$

тогда выраженіе

$$e^{\frac{2(4h+1)x\pi i}{L}}=e^{\frac{2(4h+1)x'\pi i}{L'}}$$

дастъ намъ всѣ корни уравненія $y^{L'}=1$. Поэтому равенство (70) и въ этомъ случаѣ вѣрно.

Итакъ въ этомъ исключительномъ случаѣ мы можемъ сначала суммировать относительно h, а потомъ относительно n, приравнявъ ρ нулю до суммированія.

§ 85. Обратимся же теперь къ опредѣленію выраженія (61). Выраженіе H получится какъ алгебраическая сумма выраженій F, умноженная на нѣкоторый множитель.

Такъ какъ каждому положительному n соотвѣтствуетъ въ формулѣ (61) отрицательное n съ тою же абсолютною величиною, то всѣ члены формулы (61), содержащіе $i\sin nS\pi$, сократятся; а потому вмѣсто $e^{nS\pi i}$ въ формулѣ (61) можно поставить $\cos nS\pi$. Такъ какъ всѣ мнимые члены при вычисленіи H изъ формулы (49) сократятся (и легко видѣть, какимъ образомъ), то мы будемъ только опредѣлять дѣйствительную часть выраженія (61). Итакъ разсмотримъ двойную сумму

$$M(x, y, z, \varphi, \theta)=\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{\cos(4h+1)R\pi.\cos nS\pi}{\left(2h+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}. \qquad (71)$$

Вспомнимъ, что

$$R=\frac{1}{4}\varphi+\frac{2x}{L}+\frac{2Az}{P},\; S=\frac{1}{2}\varphi+\theta+\frac{4y}{L}+\frac{4Bz}{P}. \qquad (71')$$

Положимъ, что

$$R\pi=\eta,\; 2PLS\equiv u\ (mod.\ 4PL),\; \xi=\pi-\frac{u\pi}{2PL}, \qquad (72)$$

гдѣ u—положительное число, меньшее $4PL$ или нуль; слѣдовательно

$$\pi\geqq\xi>-\pi. \qquad (72')$$

Пользуясь формулами (72), представляемъ равенство (71) въ слѣдующемъ видѣ:

$$M(x,y,z,\varphi,\theta)=\sum_{r=1}^{\infty}\cos(2r-1)\eta\left\{\frac{1}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{2\cos\xi}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+1}\right.$$

$$\left.+\frac{2\cos 2\xi}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}-\frac{2\cos 3\xi}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+3^2}+\frac{2\cos 4\xi}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+4^2}-\dots\dots\right\}.\quad(73)$$

Дальнѣйшее вычисленіе будетъ основано на одной формулѣ Эйлера, легко провѣряемой посредствомъ извѣстныхъ формулъ, съ помощью которыхъ функція между извѣстными предѣлами представляется тригонометрическимъ рядомъ. Впрочемъ эту формулу можно найти въ большинствѣ подробныхъ учебниковъ Анализа (напримѣръ, Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, zweiter Band, страница 142).

Легко доказать, что для ξ, *удовлетворяющаго условіямъ*

$$\pi\geqq\xi\geqq-\pi,$$

$$\frac{\pi}{a}\cdot\frac{e^{a\xi}+e^{-a\xi}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{a^2}-\frac{2\cos\xi}{a^2+1^2}+\frac{2\cos 2\xi}{a^2+2^2}-\dots,\quad(74)$$

гдѣ a, какая угодно, постоянная величина.

Положивъ $a=r-\frac{1}{2}$, мы можемъ, слѣдовательно, вмѣсто формулы (73) написать:

$$M(x,y,z,\varphi,\theta)=2\pi\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{\left(r-\frac{1}{2}\right)\xi}+e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)\xi}}{e^{\left(r-\frac{1}{2}\right)\pi}-e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)\pi}}\cdot\frac{\cos(2r-1)\eta}{2r-1}.$$

Употребляя же обозначенія:

$$q=e^{-\pi},\ \alpha=\eta+\frac{1}{2}\xi i+\frac{1}{2}\pi,\ \beta=\eta-\frac{1}{2}\xi i+\frac{1}{2}\pi,\quad(75)$$

получаемъ

$$M(x,y,z,\varphi,\theta)$$

$$=2\pi\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{2r-1}\cdot\frac{q^{\frac{1}{2}(2r-1)}}{1-q^{2r-1}}\Big\{sin(2r-1)\alpha+sin(2r-1)\beta\Big\}. \quad (76)$$

Бріо и Буке, выводя въ своемъ учебникѣ теоріи эллиптическихъ функцій формулу (2) первой главы нашего сочиненія, доказываютъ, что эта формула вѣрна для всѣхъ такихъ x, у которыхъ мнимая часть заключается между $+\frac{K'\pi i}{2K}$ и $-\frac{K'\pi i}{2K}$. Замѣнимъ въ формулѣ (2) первой главы x черезъ $\frac{\pi}{2}-x$; тогда получаемъ

$$\frac{2Kk}{\pi}\,\frac{cos\,am\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\,am\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,lg\,\frac{1+k\,sin\,am\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\,sin\,am\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$=4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}q^{r-\frac{1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\,cos\,(2r-1)x.$$

Возьмемъ отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства интегралъ, предѣлы котораго 0 и x:

$$\frac{1}{4}\,lg\,\frac{1+k\,sin\,am\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\,sin\,am\frac{2Kx}{\pi}}=2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}q^{r-\frac{1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\cdot\frac{sin\,(2r-1)x}{2r-1};$$

эта послѣдняя формула также вѣрна для всѣхъ такихъ x, у которыхъ мнимая часть заключается между $+\frac{K'\pi i}{2K}$ и $-\frac{K'\pi i}{2K}$.

Примѣнимъ послѣднее равенство къ формулѣ (76), для которой $K'=K$:

$$M(x, y, z, \varphi, \theta) = \frac{\pi}{4} lgN \left\{ \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\, sin\, am \frac{2K\alpha}{\pi}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\, sin\, am \frac{2K\alpha}{\pi}} \right\}. \tag{77}$$

Въ формулѣ (77) N обозначаетъ «норма», а

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)}}. \tag{78}$$

Изъ предъидущихъ разсужденій слѣдуетъ, что вѣрность формулы (77) доказана въ томъ случаѣ, когда

$$\pi > \xi > -\pi;$$

поэтому вопросъ, чему равно $M(x, y, z, \varphi, \theta)$, остается открытымъ для случая $\xi = \pi$.

Разсмотримъ, какія условія должны быть соблюдены для того, чтобы ξ равнялось π. Въ такомъ случаѣ $u = 0$, и мы изъ сравненія (72) выводимъ

$$z \equiv 0\ (mod.\ P),\quad \varphi + 2\theta \equiv 0\ (mod.\ 4),\quad y \equiv 0\ (mod.\ L).$$

Если P не равно единицѣ, то первое изъ только что приведенныхъ сравненій указываетъ на случай, который намъ не за чѣмъ разсматривать, если мы желаемъ опредѣлить H (см. равенство (49')). Если $P=1$, но χ не равно 1, то сравненіе $\varphi + 2\theta \equiv 0\ (mod. 4)$ не удовлетворится. Такъ какъ случай $P=1$, $\chi=1$, $L=1$ нами не разсматривается, то заключаемъ, что формула (77) годится для нашихъ цѣлей за исключеніемъ того случая, когда $P=1$, $\chi=1$ и $y=0$. Этотъ случай, когда $P=1$, $\chi=1$ и $y=0$, мы разсмотримъ въ послѣдствіи отдѣльно.

Вспомнимъ здѣсь, кстати, что

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{4}\varphi + \frac{2x}{L} + \frac{2Az}{P} + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2} + t - \frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\theta - \frac{2y}{L} - \frac{2Bz}{P}\right] i,$$

гдѣ t—произвольное цѣлое число; это t можно приравнять нулю, ибо отъ этого вторая часть равенства (77) не измѣнится.

Займемся преобразованіями формулы (77), при чемъ на короткое время будемъ различать четыре случая: $\chi=1$, $\chi=i$, $\chi=1+i$, $\chi=i(1+i)$.

Если $\chi=1$, то, пользуясь формулою

$$k\, sin\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}+K\pm K'i\right)=\frac{\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}}{cos\, am\frac{2Kx}{\pi}}$$

(Durège, Theorie der elliptischen Functionen, zweite Auflage, страница 29) и вспомнивъ, что въ этомъ случаѣ $\varphi=0$, $\theta=0$, получаемъ

$$M(x,y,z,\varphi,\theta)+M(x,y,z,-\varphi,\theta)=\frac{\pi}{2}lgN\left\{\frac{cos\, am\frac{2K\gamma}{\pi}+\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi}}{cos\, am\frac{2K\gamma}{\pi}-\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi}}\right\}, \quad (79)$$

$$\gamma=\frac{2\pi(x-yi)}{L}+\frac{2(A-Bi)z\pi}{P}=\frac{2\pi(x-yi)}{L}+\frac{2z\pi}{A+Bi}. \quad (79')$$

Если $\chi=i$, то $\varphi=0$, $\theta=1$; воспользуемся въ этомъ случаѣ формулою (Durège, Theorie der elliptischen Functionen, страница 28)

$$sin\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}+K\right)=\frac{cos\, am\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}}.$$

$$M(x, y, z, \varphi, \theta)+M(x, y, z, -\varphi, \theta)$$

$$=\frac{\pi}{2}lgN\left\{\frac{\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi}+\sqrt{\frac{1}{2}}cos\, am\frac{2K\gamma}{\pi}}{\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi}-\sqrt{\frac{1}{2}}cos\, am\frac{2K\gamma}{\pi}}\right\}, \quad (80)$$

гдѣ γ—то же, что и въ (79′).

Если $\chi=1+i$, то $\varphi=1$, $\theta=0$. Въ Theorie der elliptischen Functionen von Durège на страницѣ 114 находимъ

$$\left(1 \pm k \sin am \frac{2K(a+b)}{\pi}\right)\left(1 \mp k \sin am \frac{2K(a-b)}{\pi}\right)$$

$$= \frac{\left[\Delta\, am \frac{2Ka}{\pi} \pm k \sin am \frac{2Kb}{\pi} \cos am \frac{2Ka}{\pi}\right]^2}{1-k^2 \sin^2 am \frac{2Kb}{\pi} \sin^2 am \frac{2Ka}{\pi}}. \tag{81}$$

Положимъ въ формулѣ (81)

$$a=\gamma,\ b=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi i}{4};$$

замѣтимъ при этомъ, во первыхъ, что отъ замѣны x черезъ $x \pm \pi$ эллиптическая функція $\sin am \frac{2Kx}{\pi}$ мѣняетъ знакъ и, во вторыхъ что при модулѣ $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\sin am \frac{K(1+i)}{2} = \sqrt{1+i},\quad \sin am \frac{K(1-i)}{2} = \sqrt{1-i}. \tag{82}$$

Принимая все предъидущее въ разсчетъ, выводимъ:

$$M(x, y, z, \varphi, \theta) + M(x, y, z, -\varphi, \theta)$$

$$= \frac{\pi}{2} lg\, N \left\{ \frac{\Delta\, am \frac{2K\gamma}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{1+i}} \cos am \frac{2K\gamma}{\pi}}{\Delta\, am \frac{2K\gamma}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{1+i}} \cos am \frac{2K\gamma}{\pi}} \right\}. \tag{83}$$

Если $\chi=i(1+i)$, то дѣлаемъ въ формулѣ (81)

$$a=\gamma,\ b=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi i}{4};$$

принимая въ разсчетъ первое изъ равенствъ (82), получаемъ

$$M(x, y, z, \varphi, \theta) + M(x, y, z, -\varphi, \theta)$$

$$= \frac{\pi}{2} lg\, N \left\{ \frac{\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{1-i}} \cos am\frac{2K\gamma}{\pi}}{\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{1-i}} \cos am\frac{2K\gamma}{\pi}} \right\}. \qquad (84)$$

Легко всѣ четыре формулы (79), (80), (83) и (84) совмѣстить въ одну:

$$M(x, y, z, \varphi, \theta) + M(x, y, z, -\varphi, \theta)$$

$$= \frac{\pi}{2} lg\, N \left\{ \frac{\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi} + \psi \cos am\frac{2K\gamma}{\pi}}{\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi} - \psi \cos am\frac{2K\gamma}{\pi}} \right\}, \qquad (85)$$

гдѣ $\psi = 1$ *при* $\chi = 1$; $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *при* $\chi = i$; $\psi = \frac{1}{\sqrt{1+i}}$ *при* $\chi = 1 + i$;

$\psi = \frac{1}{\sqrt{1-i}}$ *при* $\chi = i(1+i)$.

Обратимся теперь къ случаю $P=1$, $\chi=1$, $y=0$. Вспомнивъ то, что мы говорили о формулѣ (69), видимъ, что въ этомъ случаѣ задача приводится къ опредѣленію двойной суммы

$$M(x, 0, 0, 0, 0) = 4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{2(4h+1)x\pi}{L}}{(4h+1)^2 + 4n^2},$$

ибо мнимыя части формулы (69) намъ не за чѣмъ разсматривать. Послѣднее равенство можемъ написать такъ:

$$M(x, 0, 0, 0, 0) = 4 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2(2h-1)x\pi}{L}}{(2h-1)^2} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2(2h-1)x\pi}{L}}{(2h-1)^2 + 4n^2}.$$

Для произведенія перваго суммированія относительно h подставимъ въ формулу (74) $\pi - \xi$ вмѣсто ξ:

$$\frac{\pi}{a}\cdot\frac{e^{a(\pi-\xi)}+e^{-a(\pi-\xi)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{a^2}+\frac{2\cos\xi}{a^2+1^2}+\frac{2\cos 2\xi}{a^2+2^2}+\ldots\ldots;$$

эта формула вѣрна для всякаго ξ, удовлетворяющаго условіямъ

$$0\leqq\xi\leqq 2\pi.$$

Вычтемъ почленно равенство (74) изъ только что полученнаго равенства:

$$\frac{\pi}{a}e^{-a\xi}-\frac{\pi}{a}\frac{(e^{a\xi}+e^{-a\xi})e^{-a\pi}}{1+e^{-a\pi}}=\frac{4\cos\xi}{a^2+1^2}+\frac{4\cos 3\xi}{a^2+3^2}+\ldots\ldots$$

Послѣднее равенство вѣрно до тѣхъ поръ, пока

$$0\leqq\xi\leqq\pi.$$

Замѣтимъ еще, что развертываніе въ тригонометрическій рядъ по способу Фурье даетъ намъ для ξ, удовлетворяющаго только что приведеннымъ условіямъ,

$$\frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\pi-\xi\right)=\cos\xi+\frac{1}{9}\cos 3\xi+\frac{1}{25}\cos 5\xi+\ldots\ldots$$

(Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, zweiter Band, страница 142).

Примѣнимъ только что приведенныя формулы къ $M(x, 0, 0, 0, 0)$:

$$M(x,0,0,0,0)=\pi\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{2x\pi}{L}\right)+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{4nx\pi}{L}}}{n}$$

$$-2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\cos\frac{4nx\pi i}{L},\quad q=e^{-\pi}.$$

Предъидущая формула вѣрна, если

$$0<x<\frac{L}{2}.$$

Если же

$$\frac{L}{2} < x < L,$$

то можемъ положить $x = L - x'$ и тогда

$$M(x, 0, 0, 0, 0) = M(x', 0, 0, 0, 0) = M(L - x, 0, 0, 0, 0).$$

Замѣтивъ, что

$$-\frac{2x\pi}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{4nx\pi}{L}} = -lg\left(e^{\frac{2x\pi}{L}} - e^{-\frac{2x\pi}{L}}\right) = -lg\left(-2i sin\frac{2x\pi i}{L}\right)$$

получаемъ

$$\frac{1}{\pi} M(x, 0, 0, 0, 0) = -lg\left(-2iq^{\frac{1}{2}} sin\frac{2x\pi i}{L}\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} cos\frac{4nx\pi i}{L}.$$

Дюрежъ на 241 страницѣ своего учебника даетъ:

$$lg\sqrt{\frac{1 - \Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}}{1 + \Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}}} = lg 2\sqrt{q} + lg\, sin\, x + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} cos 2nx;$$

легко доказать, что эта формула вѣрна для всякаго x, мнимая часть котораго заключается между $-\frac{\pi K' i}{K}$ и $+\frac{\pi K' i}{K}$ [1]). Примѣняя этотъ рядъ къ нашей задачѣ, получаемъ

$$M(x, 0, 0, 0, 0) = \pi\, lg\sqrt{\frac{\Delta\, am\frac{4Kxi}{L} + 1}{\Delta\, am\frac{4Kxi}{L} - 1}}.$$

[1]) Относительно рядовъ, подобныхъ предъидущему, можно найти великолѣпное объясненіе на страницахъ 421—434 въ Compendium der höheren Analysis von Schlömilch, zweiter Band, zweite Auflage.

25*

Такъ какъ $\Delta\, am(4K'i - u) = \Delta\, am u$, то предъидущая формула вѣрна для всѣхъ x, заключающихся между 0 и L.

Замѣтивъ, что

$$\Delta\, am\, iu = \frac{\Delta\, am(u, k')}{\cos am(u, k')}$$

(Durège, Theorie der elliptischen Functionen, страница 23), можемъ написать:

$$M(x, 0, 0, 0, 0) = \pi\, lg \sqrt{\frac{\cos am\frac{4Kx}{L} + \Delta\, am\frac{4Kx}{L}}{\Delta\, am\frac{4Kx}{L} - \cos am\frac{4Kx}{L}}}.$$

Если u дѣйствительно, то

$$-1 \leqq \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u} = \sin am(K - u) \leqq +1;$$

отсюда заключаемъ, что въ предъидущемъ равенствѣ, опредѣляющемъ $M(x, 0, 0, 0, 0)$, подъ корнемъ стоитъ положительная величина; поэтому можемъ написать:

$$M(x, 0, 0, 0, 0) = \frac{\pi}{4} lg\, N \left\{\frac{\cos am\frac{4Kx}{L} + \Delta\, am\frac{4Kx}{L}}{\cos am\frac{4Kx}{L} - \Delta\, am\frac{4Kx}{L}}\right\}.$$

Слѣдовательно формулы (79) и (85) вѣрны и для случая $P = 1$, $\chi = 1$, $y = 0$.

Обративъ теперь вниманіе на (49) равенство, мы легко выводимъ изъ формулы (85)

$$H = \frac{N(\chi)}{2\, lg\, \sigma} \sum_{x,\, y,\, z} \left(\frac{x^2 + y^2}{L}\right)\left(\frac{z}{P}\right) lg\, N \left\{\frac{\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi} + \psi \cos am\frac{2K\gamma}{\pi}}{\Delta\, am\frac{2K\gamma}{\pi} - \psi \cos am\frac{2K\gamma}{\pi}}\right\}. \quad (86)$$

Если $P=1$, то въ формулѣ (86) должно положить $\left(\frac{z}{P}\right)=1$ и не производить суммированіе относительно z; подобное же должно сказать и о случаѣ $L=1$. Если же и $P=1$, и $L=1$, то

$$H=\frac{N(\chi)}{2\, lg\, \sigma}\, lg\, N\frac{1+\psi}{1-\psi}. \tag{86'}$$

При суммированіи въ формулѣ (86) можно поступать двояко: 1) измѣнять x и y отъ 0 до $L-1$, а z отъ 1 до $P-1$ съ условіемъ, чтобы x^2+y^2 не равнялось нулю; 2) придавать x, y и z только такія значенія, при которыхъ x^2+y^2—число первое съ L, а z—число первое съ P, при чемъ предѣлы для x, y и z тѣ же, что и въ первомъ способѣ суммированія. Оба способа суммированія тождественны вслѣдствіе того, что

$$\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{z}{P}\right)$$

обращаются въ нули, если x^2+y^2 имѣетъ общіе дѣлители съ L, а z—съ P.

§ 86. Сдѣлаемъ для случая, когда PL не равно 1, два преобразованія въ формулѣ (86): во первыхъ, упростимъ выраженіе γ и вмѣстѣ съ тѣмъ упростимъ выраженіе произведенія двухъ символовъ; во вторыхъ, замѣнимъ K черезъ то ω, которое мы употребляли въ предъидущей главѣ.

Если x^2+y^2 число первое съ L, то $x-yi$ также число первое съ L, и наоборотъ, если $x-yi$ число первое съ L, то x^2+y^2 число первое съ L. Положимъ теперь, что числамъ x и y придаются такія положительныя или равныя нулю значенія, меньшія L, что $x-yi$ и x^2+y^2 числа первыя съ L; тогда $x-yi$ при своемъ измѣненіи составитъ полную систему вычетовъ, первыхъ съ L, по модулю L. Также легко видѣть, что z въ формулѣ (86) при второмъ способѣ суммированія составитъ полную систему вычетовъ, первыхъ съ $A+Bi$ и P, по модулю $A+Bi$. Если будемъ x, y и z измѣнять такъ, какъ это только что было объяснено, то формула

$$Lz+(A+Bi)(x-yi)$$

при своемъ измѣненіи составитъ полную систему вычетовъ, первыхъ съ $LA+LBi$, по модулю $L(A+Bi)$. Положимъ, что

$$Lz+(A+Bi)(x-yi)\equiv\alpha+\beta i \;(mod.\; LA+LBi),$$

гдѣ $\alpha+\beta i$ одинъ изъ членовъ нѣкоторой полной системы вычетовъ, первыхъ съ $L(A+Bi)$, по модулю $L(A+Bi)$; тогда въ формулѣ (86) можно положить

$$\gamma=\frac{2(\alpha+\beta i)\pi}{L(A+Bi)}, \tag{87}$$

ибо отъ прибавленія къ аргументу γ кратныхъ 2π и $\dfrac{2\pi K'i}{K}$ норма дроби, входящей въ формулу (86), не измѣнится. Кромѣ того извѣстно, что

$$\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right)=\left[\frac{x-yi}{L}\right]^2=\left[\frac{\alpha+\beta i}{L}\right]^2\left[\frac{A+Bi}{L}\right]^2,$$

$$\left(\frac{L}{P}\right)\left(\frac{z}{P}\right)=\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)=\left[\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right]^2,$$

$$\left[\frac{A+Bi}{L}\right]^2=\left(\frac{P}{L}\right),\;\left(\frac{P}{L}\right)\left(\frac{L}{P}\right)=1;$$

послѣднее равенство мы пишемъ вслѣдствіе того, что P—вида $4n+1$. Слѣдовательно

$$\left(\frac{x^2+y^2}{L}\right)\left(\frac{z}{P}\right)=\left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2, \tag{88}$$

при чемъ въ формулѣ (86) послѣ введенія числа $\alpha+\beta i$ вмѣсто x, y и z сумму должно будетъ распространять на всѣ $\alpha+\beta i$, составляющія какую нибудь полную систему вычетовъ, первыхъ съ

$LA+LBi$, по модулю $LA+LBi$. Предъидущее заключеніе, понятно, вѣрно и въ случаѣ $L=1$, и въ случаѣ $P=1$.

Будемъ теперь подъ x, y, z, t подразумѣвать не то, что подразумѣвалось до сихъ поръ, а вообще нѣкоторыя величины. Пусть

$$t=\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}},\quad K=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}}.$$

Тогда $x=\sin am\, t$, $\sqrt{1-x^2}=\cos am\, t$, $\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}=\Delta\, am\, t$. Положимъ теперь $x=\sqrt{1-y^2}$; тогда послѣ нѣкоторыхъ вычисленій получимъ

$$t\sqrt{\frac{1}{2}}=\int\limits_y^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}},\quad K\sqrt{\frac{1}{2}}=\int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=\omega;$$

4ω есть періодъ лемнискатныхъ функцій. Пусть

$$z=\int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=(K-t)\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Положимъ $t=hK$, гдѣ h—вообще нѣкоторое дробное или цѣлое Гауссово число; тогда, отличая по прежнему лемнискатныя функціи значкомъ, получимъ

$$\sin am\, t=\cos' am\, (K-t)\sqrt{\frac{1}{2}}=\cos' am (1-h)\omega.$$

Легко также вычислить

$$\cos am\, hK=\frac{\cos' am\, h\omega}{\Delta'\, am\, h\omega},\quad \Delta\, am\, hK=\frac{1}{\Delta'\, am\, h\omega}. \tag{89}$$

Такимъ образомъ вмѣсто формулы (86) можемъ написать

$$H=\frac{N(\chi)}{2lg\sigma}\sum_{\alpha+\beta i}\left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 lgN\left\{\frac{1+\psi\, cos'\, am\,\dfrac{4(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}}{1-\psi\, cos'\, am\,\dfrac{4(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}}\right\}, \quad (90)$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ $\alpha+\beta i$, первыя съ $LA+LBi$ и принадлежащія къ одной и той же полной системѣ вычетовъ по модулю $LA+LBi$; ψ въ формулѣ (90) имѣетъ тѣ же значенія, что въ формулѣ (85); χ равно или 1, или i, или $1+i$, или $i(1+i)$; въ первыхъ двухъ случаяхъ $N(\chi)=1$, въ двухъ послѣднихъ $N(\chi)=2$. Вспомнимъ еще, что

$$\sigma=N(T+U\sqrt{D}),$$

гдѣ T и U—основныя рѣшенія уравненія

$$t^2-Du^2=1;\ D=\chi L(A+Bi).$$

Преобразуемъ нѣсколько формулу (90).

Мы знаемъ, что всегда можно найти такое число $\gamma+\delta i$, которое удовлетворяло бы сравненію

$$\alpha+\beta i\equiv(1+i)(\gamma+\delta i)\ (mod.\ LA+LBi),$$

ибо $LA+LBi$ не дѣлится на первоначальное число $1+i$. Если $\alpha+\beta i$ получаетъ всевозможныя значенія, первыя съ $LA+LBi$ и принадлежащія къ одной и той же полной системѣ вычетовъ по модулю $LA+LBi$, то $\gamma+\delta i$ можемъ придавать тѣ же значенія, что и $\alpha+\beta i$, но въ другомъ порядкѣ. Такъ какъ отъ прибавленія какого нибудь кратнаго 4ω къ аргументу $cos'am$ величина $cos'am$ не измѣняется, то

$$cos'am\,\frac{4(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}=cos'am\,\frac{4(1+i)(\gamma+\delta i)\omega}{LA+LBi},$$

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2=\left[\frac{(1+i)(\gamma+\delta i)}{LA+LBi}\right]^2.$$

Отсюда заключаемъ, что въ формулѣ (90) можемъ $\alpha+\beta i$ замѣнить черезъ $(1+i)(\alpha+\beta i)$.

Замѣнивъ $\alpha+\beta i$ черезъ $(1+i)(\alpha+\beta i)$, воспользуемся извѣстною формулою:

$$\cos am\, 2u = \frac{\cos^2 am\, u - \sin^2 am\, u \Delta^2 am\, u}{1 - k^2 \sin^4 am\, u}.$$

Такимъ образомъ вмѣсто (90) получимъ

$$H = (-1)^\mu \frac{N(\chi)}{2 lg \sigma} \sum_{\alpha+\beta i} \left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 lg N \frac{1+\xi^4+\psi(1-2\xi^2-\xi^4)}{1+\xi^4-\psi(1-2\xi^2-\xi^4)}, \quad (91)$$

$$(-1)^\mu = \left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2, \quad \xi = \sin' am \frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}. \quad (91')$$

Это—формула для случая, когда $LA+LBi$ не равно ± 1; въ случаѣ же $LA+LBi = \pm 1$ имѣемъ формулу (86′).

§ 87. Обратимъ теперь вниманіе на нѣкоторые частные случаи, когда формула (91) значительно упрощается.

Если $\chi = 1$, то вмѣсто формулы (91) получаемъ

$$H = \left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2 \cdot \frac{1}{2 lg \sigma} \sum_{\alpha+\beta i} \left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 lg N \frac{1-\xi^2}{\xi^2(1+\xi^2)}. \quad (92)$$

Полную систему вычетовъ по модулю $LA+LBi$ мы часто будемъ дѣлить на *половины* и *четверти*. Пусть m' какое нибудь Гауссово цѣлое число, не дѣлящееся на $LA+LBi$. Вычеркнемъ изъ полной системы вычетовъ по модулю $LA+LBi$ числа, сравнимыя съ $m', -m', im'$ и $-im'$ по модулю $LA+LBi$. Пусть m'' цѣлое Гауссово число, не дѣлящееся на $LA+LBi$ и оставшееся послѣ вычеркиванія въ полной системѣ вычетовъ. Вычеркнемъ изъ полной системы вычетовъ числа, сравнимыя по модулю $LA+LBi$ съ m'', $-m''$, im'' и $-im''$. Продолжая такъ дѣйствовать, мы всю полную систему вычетовъ за исключеніемъ числа, дѣлящагося на $LA+LBi$, раздѣлимъ на группы изъ четырехъ чиселъ. Возьмемъ изъ каждой группы по одному числу; тогда мы и получимъ то, что будемъ называть *четвертью системы вычетовъ*. Очевидно, въ каждой *четверти* будетъ одинаковое число вычетовъ первыхъ съ $LA+LBi$.

Мы могли бы вмѣсто того, чтобы группировать числа по четыре, группировать ихъ по два слѣдующимъ образомъ. Если m какое нибудь число, не дѣлящееся на $LA+LBi$, то въ полной системѣ вычетовъ по модулю $LA+LBi$ непремѣнно найдется число, сравнимое съ $-m$ по модулю $LA+LBi$. Поэтому всю полную систему вычетовъ, не считая числа кратнаго $LA+LBi$, можно раздѣлить на такія пары, что сумма вычетовъ, принадлежащихъ одной парѣ, дѣлится на $LA+LBi$. Беря изъ каждой пары по одному вычету, мы составимъ то, что впредь будемъ называть *половиною полной системы вычетовъ*.

Если полная система вычетовъ вся составлена изъ дѣйствительныхъ чиселъ, то для обоихъ модулей $A+Bi$ и $A-Bi$ *четверти* и *половины* совпадаютъ.

Пусть n и m такія два Гауссовы цѣлыя числа, что

$$n \equiv i^{\rho} m \ (mod.\ LA+LBi);$$

ρ—дѣйствительное цѣлое число; тогда

$$sin'^2\, am \frac{2(1+i)n\omega}{LA+LBi} = (-1)^{\rho}\, sin'^2 \frac{2(1+i)m\omega}{LA+LBi}.$$

Если $N(LA+LBi) \equiv 1$ $(mod.\ 8)$, то

$$\left[\frac{n}{LA+LBi}\right]^2 = \left[\frac{m}{LA+LBi}\right]^2;$$

поэтому, если придавать m только тѣ значенія $\alpha+\beta i$, которыя принадлежатъ *одной четверти системы вычетовъ*, а ρ приравнивать 0, 1, 2, 3 и распространять сумму только на разныя m, то въ формулѣ (92) и въ числителѣ, и въ знаменателѣ дроби, отъ которой берется lgN, явятся члены $(1-\xi^4)^2$; эти члены сократятся. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ вмѣсто формулы (92) имѣемъ

$$H = -\frac{1}{lg\sigma}\left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2 \sum_{\alpha+\beta i}^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 lgN sin'^4 am \frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}$$

$$= -\frac{1}{lg\sigma}\left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2 \sum_{\alpha+\beta i} \left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 lgN\, sin' am \frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{LA+LBi}. \quad (93)$$

Значокъ $\frac{1}{4}$ мы будемъ ставить надъ суммою для обозначенія того, что сумма распространяется только на вычеты, принадлежащіе къ *одной четверти системы вычетовъ*. Значокъ $\frac{1}{2}$ будетъ обозначать, что сумма распространяется на тѣ вычеты, которые принадлежатъ къ *одной половинѣ системы вычетовъ*. Отсутствіе значка на верху суммы будетъ показывать, что сумма распространяется на всѣ вычеты извѣстнаго характера, которые принадлежатъ *полной системѣ вычетовъ*.

Если $N(LA+LBi)\equiv 5$ $(mod.\ 8)$, то

$$\left[\frac{n}{LA+LBi}\right]^2=(-1)^\rho\left[\frac{m}{LA+LBi}\right]^2;$$

поэтому множитель ξ^2 въ знаменателѣ формулы (92) исчезаетъ. Если въ формулѣ (92) сумму пожелаемъ распространить только на *четверть системы вычетовъ*, то $1+\xi^2$ и $1-\xi^2$ явятся въ четвертыхъ степеняхъ, первый—въ знаменателѣ, второй—въ числителѣ. Такимъ образомъ для этого случая имѣемъ

$$H=\frac{1}{lg\sigma}\left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2\sum_{\alpha+\beta i}^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 lgN\frac{(1-\xi^2)^2}{(1+\xi^2)^2}$$

$$=\frac{1}{lg\sigma}\left[\frac{1+i}{LA+LBi}\right]^2\sum_{\alpha+\beta i}\left[\frac{\alpha+\beta i}{LA+LBi}\right]^2 lgN(1-\xi^2)\,, \qquad (94)$$

гдѣ ξ означаетъ то же, что въ формулѣ (92).

§ 88. Формулы, полученныя нами, даютъ намъ H въ трансцендентной формѣ, между тѣмъ какъ H должно быть цѣлое, положительное число. Интересно доказать, что наши формулы для H всегда должны давать цѣлое рѣшеніе. На такое доказательство нельзя смотрѣть, какъ на простую повѣрку выводовъ: такого рода изслѣдованія могутъ дать нѣкоторыя свойства числа H, общія или частныя для различныхъ случаевъ; для того, чтобы убѣдиться въ послѣднемъ, стоитъ только внимательно прочесть §§ 107, 108, 109 и 110 учебника Дирикле. Прежде чѣмъ приступить къ этой

поверкѣ, мы должны пополнить наши свѣдѣнія относительно лемнискатныхъ функцій, а также относительно циклическихъ функцій 1-аго и 2-го порядковъ.

Если $m=2h+1+2ni$, гдѣ h и n—какія нибудь цѣлыя числа

если m—первоначальное Гауссово число, если

$$p=N(m),\ x=\sin' am\, u,\ y=\sin' am\, mu,$$

то нами выведена въ главѣ V формула

$$y=\pm\frac{x(x^{p-1}+mF(x^4)\pm m)}{1+mF_1(x^4)},\tag{95}$$

въ которой $F(x^4)$ и $F_1(x^4)$—цѣлыя, съ цѣлыми коэффиціентами, функціи x^4, не имѣющія постоянныхъ членовъ, первая изъ нихъ степени $\frac{1}{4}(p-5)$, вторая степени $\frac{1}{4}(p-1)$. Въ дроби (95) верхніе знаки должно брать, если $m\equiv1$ ($mod.$ $2+2i$), а нижніе, если $m\equiv-1$ ($mod.$ $2+2i$).

Умножимъ аргументъ y на другое первоначальное число m' опять вида $2h+1+2ni$; тогда $z=\sin' am\, mm'u$ опредѣлится формулою

$$z=\pm\frac{y(y^{p'-1}+m'F_2(y^4)\pm m')}{1+m'F_3(y^4)},\tag{96}$$

гдѣ $p'=N(m')$, а $F_2(y^4)$ и $F_3(y^4)$—функціи, подобныя $F(x^4)$ и $F_1(x^4)$.

Легко теперь сообразить, что z выразится черезъ x такимъ образомъ:

$$z=\pm\frac{x(x^{pp'-1}+f(x^4)\pm mm')}{1+f_1(x^4)},\tag{97}$$

гдѣ $f(x^4)$—цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами, функція x^4 степени $\frac{1}{4}(pp'-5)$, а $f_1(x^4)$—такая же функція степени $\frac{1}{4}(pp'-1)$; $f(x^4)$ и $f_1(x^4)$ дѣлятся на x^4. Если знаки передъ m и m' въ формулахъ (95) и (96) одинаковы, то передъ mm', а также передъ дробью должно ставить знакъ $+$, въ противномъ случаѣ $-$; это правило

иначе выражается такъ: если $mm' \equiv 1$ (*mod.* $2+2i$), то изъ двухъ знаковъ въ (97) должно брать $+$; если же $mm' \equiv -1$ (*mod.* $2+2i$), то изъ двухъ знаковъ въ (97) должно брать $-$.

Пусть $M = mm'm''m'''\ldots\ldots$, $P = N(M)$; пусть $m, m', m'', m''', \ldots\ldots$ первоначальныя числа, различныя между собою; пусть всѣ эти числа вида $2h+1+2ni$; пусть

$$x = \sin' am\, u,\quad y = \sin' am\, Mu.$$

Составляя съ помощью равенства (97) подобное же равенство для случая M, состоящаго изъ трехъ первоначальныхъ множителей, потомъ такимъ же образомъ составляя формулу для M, составнаго изъ четырехъ множителей, и продолжая разсуждать такимъ же образомъ далѣе, легко заключаемъ, что

$$y = \pm \frac{x\left(x^{P-1} + A_1 x^{P-5} + A_2 x^{P-9} + \ldots\ldots \pm M\right)}{1 + A'_1 x^4 + A'_2 x^8 + \ldots\ldots + A'_{\frac{1}{4}(P-1)} x^{P-1}}. \qquad (98)$$

Въ формулѣ (98) $A_1, A_2, \ldots\ldots A'_1, A'_2, \ldots\ldots A'_{\frac{1}{4}(P-1)}$ — цѣлыя Гауссовы числа; если $M \equiv +1$ (*mod.* $2+2i$), то изъ двухъ знаковъ должно брать $+$; если же $M \equiv -1$ (*mod.* $2+2i$), то должно брать $-$.

Легко доказать, что дробь, стоящая въ правой сторонѣ равенства (98), несократима. Дѣйствительно, выраженіе $\sin' am \dfrac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M}$ дастъ всевозможныя значенія x, при которыхъ $y = 0$, если $\alpha + \beta i$ придадимъ различныя значенія изъ полной системы вычетовъ по модулю M; эти значенія x опредѣляются, за исключеніемъ случая $\alpha + \beta i \equiv 0$ (*mod.* M), уравненіемъ

$$x^{P-1} + A_1 x^{P-5} + A_2 x^{P-9} + \ldots\ldots \pm M = 0. \qquad (99)$$

Пусть $\alpha + \beta i$ и $\alpha' + \beta' i$ — два числа, не сравнимыя по модулю M; тогда нельзя написать

$$\sin' am \frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M} = \sin' am \frac{2(1+i)(\alpha'+\beta' i)\omega}{M},$$

ибо это послѣднее равенство полагаетъ, что аргументы различаются на кратное $2(1+i)\omega$. Итакъ всѣ P величинъ

$$sin'am\,\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M},$$

въ которыхъ $\alpha+\beta i$ составляютъ полную систему вычетовъ по модулю M, различны; а потому степень числителя дроби (98) не можетъ быть менѣе P.

Доказывая, что дробь (98) несократима, мы вмѣстѣ съ тѣмъ доказали, что уравненіе (99) не имѣетъ равныхъ корней.

Вспомнимъ, что y и x связаны дифференціальнымъ равенствомъ

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=\frac{Mdx}{\sqrt{1-x^4}};$$

если въ этомъ равенствѣ x замѣнимъ черезъ $\frac{1}{x}$, то y измѣнится въ $\mp\frac{1}{y}$. Замѣняя въ формулѣ (98) x черезъ $\frac{1}{x}$, а y черезъ $\pm\frac{1}{y}$, мы легко выведемъ

$$A_1'=A_1,\ A_2'=A_2,\ A_3'=A_3,\ldots A'_{\frac{1}{4}(P-1)}=\pm M;$$

такимъ образомъ вмѣсто формулы (98) имѣемъ

$$y=\pm\frac{x(x^{P-1}+A_1x^{P-5}+A_2x^{P-9}+\ldots\ldots\pm M)}{1+A_1x^4+A_2x^8+\ldots\pm Mx^{P-1}}. \qquad (100)$$

Если $u=\omega$, то

$$sin'am\,u=1,\quad y=sin'am\,Mu=\pm1.$$

Но если $M\equiv1$ ($mod.$ $2+2i$), то $sin'am\,M\omega=sin'am\,\omega$; если же $M\equiv-1$ ($mod.$ $2+2i$), то $sin'am\,M\omega=-sin'am\,\omega$; поэтому правило на знаки въ формулѣ (100) тѣ же, что и въ формулѣ (98).

Теорема. *Коэффиціенты* A_1, A_2, $A_3\ldots\ldots\pm M$ *въ формулѣ (100) удовлетворяютъ условіямъ:*

$$\left.\begin{array}{l} 1+A_1+A_2+A_3+\ldots\ldots\pm M=(-1)^{\sigma}(1+i)^{\frac{1}{2}(P-1)}, \\ 1-A_1+A_2-A_3+\ldots\ldots\pm(-1)^{\frac{1}{4}(P-1)}M=i^{\rho}(1+i)^{\frac{3}{4}(P-1)}, \end{array}\right\} \quad (101)$$

гдѣ σ *и* ρ*—цѣлыя числа, которыя намъ не за чѣмъ опредѣлять.* M *можетъ быть и первоначально.*

Доказательство. Будемъ называть корни уравненія (99) черезъ

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ldots\ldots\xi_{P-1}. \quad (102)$$

Будетъ ли число M первоначальное или составное, эти корни могутъ выразиться формулою

$$\sin' am\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M}, \quad (102')$$

гдѣ $\alpha+\beta i$ не кратно M. Всѣ корни получатся, если $\alpha+\beta i$ придавать различныя значенія изъ полной системы вычетовъ по модулю M. Такъ какъ $1+i$ число первое съ M, то тѣ же корни тѣмъ же путемъ получатся изъ формулы

$$\sin' am\frac{4(\alpha+\beta i)\omega}{M}. \quad (102'')$$

Разсмотримъ теперь два произведенія:

$$\left.\begin{array}{c} (1+\xi_1)(1+\xi_2)(1+\xi_3)\ldots\ldots(1+\xi_{P-1}), \\ (1+\xi_1\sqrt{i})\,(1+\xi_2\sqrt{i})\,(1+\xi_3\sqrt{i})\ldots\ldots(1+\xi_{P-1}\sqrt{i}). \end{array}\right\} \quad (103)$$

Раздѣлимъ всѣ вычеты по модулю M, кромѣ вычета кратнаго M, на *четыре четверти*, какъ мы это дѣлали на страницахъ 395 и 396. Пусть, придавая $\alpha+\beta i$ въ формулѣ (102′) значенія изъ *одной четверти полной системы вычетовъ*, мы получимъ корни

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\ldots\ldots\xi_{\frac{1}{4}(P-1)};$$

тогда, вмѣсто двухъ произведеній (103) получимъ,

$$\left.\begin{aligned}(1-\xi_1^{\,4})(1-\xi_2^{\,4})\ldots(1-\xi^4_{\frac14(P-1)})&=1+A_1+A_2+\ldots\pm M,\\(1+\xi_1^{\,4})(1+\xi_2^{\,4})\ldots(1+\xi^4_{\frac14(P-1)})&=1-A_1+A_2-\ldots\pm(-1)^{\frac14(P-1)}M.\end{aligned}\right\}\quad(103')$$

Мы еще прежде употребляли формулу

$$sin'am(1+i)u=\frac{(1+i)x}{\sqrt{1-x^4}},\ x=sin'am\,u;\qquad(104)$$

изъ этой формулы получаемъ

$$\xi_\eta^{\,2}(1-\xi_\pi^{\,4})=2i\,\xi_\pi^{\,2},\qquad(104')$$

гдѣ ξ_η получается изъ ξ_π умноженіемъ аргумента ξ_π на $1+i$. Будемъ π придавать значенія: 1, 2, 3, 4...... $\frac{1}{4}(P-1)$; тогда

$$\Pi\xi_\eta^{\,4}=\Pi\xi_\pi^{\,4};$$

а слѣдовательно

$$(1-\xi_1^{\,4})^2(1-\xi_2^{\,4})^2(1-\xi_3^{\,4})^2\ldots\ldots(1-\xi^4_{\frac14(P-1)})^2=(1+i)^{P-1}.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей равенства квадратный корень, получаемъ

$$(1-\xi_1^{\,4})(1-\xi_2^{\,4})(1-\xi_3^{\,4})\ldots\ldots(1-\xi^4_{\frac14(P-1)})=(-1)^\sigma(1+i)^{\frac12(P-1)}.\quad(105)$$

Легко вывести формулы:

$$cos'am(1+i)u\ \Delta'am(1+i)u=\frac{1+x^4}{1-x^4},\ x=sin'am\,u,\qquad(106)$$

$$(1-x^4)^2(1-x^4_{i+1})=(1+x^4)^2,\ x_{1+i}=sin'am(1+i)u.\qquad(106')$$

Замѣнимъ x через $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ldots\ldots\xi_{\frac14(P-1)}$; тогда x_{1+i} замѣнится такими выраженіями (102″), четвертыя степени которыхъ различны между собою; слѣдовательно

$$(1+\xi_1{}^4)^2(1+\xi_2{}^4)^2(1+\xi_3{}^4)^2\ldots(1+\xi^4_{\frac{1}{4}(P-1)})^2=(-1)^{3\sigma}(1+i)^{\frac{3}{2}(P-1)};$$

$$(1+\xi_1{}^4)(1+\xi_2{}^4)\ldots(1+\xi^4_{\frac{1}{4}(P-1)})=i^{\sigma}(1+i)^{\frac{3}{4}(P-1)}. \qquad (107)$$

Такимъ образомъ теорема доказана.

§ 89. Корни уравненія (99) распадаются на двѣ категоріи. Дѣло въ томъ, что $\alpha+\beta i$ можетъ быть первымъ съ M; тогда $sin'am\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M}$ корень первой категоріи; для краткости, будемъ называть такой корень черезъ x_M. Вторая категорія состоитъ изъ такихъ корней $sin'am\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M}$, въ которыхъ $\alpha+\beta i$ имѣетъ общій дѣлитель съ M. Предположимъ, что по сокращеніи $\alpha+\beta i$ съ M мы получимъ

$$sin'am\frac{2(1+i)(\gamma+\delta i)\omega}{N},$$

и что $\gamma+\delta i$ и N—первыя между собою; такой корень будемъ обозначать черезъ x_N.

Корни x_m (m, m', m'' . . . по прежнему обозначаютъ первоначальныя числа вида $2h+1+2ni$) опредѣляются уравненіемъ

$$x^{p-1}+mF(x^4)\pm m=0.$$

Корни $x_{m'}$ опредѣляются уравненіемъ

$$x^{p'-1}+m'F_2(x^4)\pm m'=0.$$

Уравненіе же

$$x^{pp'-1}+f(x^4)\pm mm'=0$$

опредѣляетъ и корни x_m, и корни $x_{m'}$, и корни $x_{mm'}$. Если желаемъ найти уравненіе, опредѣляющее только $x_{mm'}$, то мы должны

$$x^{pp'-1}+f(x^4)\pm mm'$$

раздѣлить на произведеніе

$$(x^{p-1}+mF(x^4)\pm m)(x^{p'-1}+m'F_2(x^4)\pm m').$$

Такъ какъ въ этомъ произведеніи коэффиціентъ у высшей степени x есть единица, то при дѣленіи не могутъ явиться дробные коэффиціенты. Послѣдній членъ частнаго получится, если мы $\pm mm'$ раздѣлимъ сначала на $\pm m$, а потомъ на $\pm m'$. Выше было доказано, что знакъ у $\pm mm'$ тотъ же, что и у $(\pm m)(\pm m')$; слѣдовательно послѣдній коэффиціентъ искомаго частнаго есть $+1$. Корни $x_{mm'}$ опредѣляются уравненіемъ вида

$$x^{(p-1)(p'-1)}+L(x^4)+1=0,$$

гдѣ $L(x^4)$—цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами, функція x^4, которая дѣлится на x^4 и степень которой менѣе $\frac{1}{4}(p-1)(p'-1)$.

Положимъ, что доказана теорема: если число (r) множителей m, m', m'',.... въ произведеніи

$$M_r=mm'm''m'''\ldots..$$

не превышаетъ $n-1$ и не менѣе 2, и если всѣ множители m, m', m'',.... различны между собою, то корни

$$x_{M_r}=x_{mm'm''}\ldots..$$

опредѣляются уравненіемъ

$$x^{(p-1)(p'-1)(p''-1)\ldots}+H(x^4)+1=0,$$

гдѣ $H(x^4)$—нѣкоторая цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами, функція x^4, дѣлящаяся на x^4, степень которой менѣе

$$\frac{1}{4}(p-1)(p'-1)(p''-1)(p'''-1)\ldots..$$

Докажемъ теперь, что при допущеніи такой теоремы для $r<n$ эта теорема вѣрна и для $r=n$. Будемъ вмѣсто M_n писать просто M.

Дѣйствительно, корни $x_m, x_{m'}, x_{m''} \dots x_{mm'}, x_{mm''} \dots x_M$ опредѣляются всѣ уравненіемъ (99). Уравненіе же, опредѣляющее только x_M, получится, если первую часть уравненія (99) раздѣлить на произведеніе

$$\prod_{m,\, m',\, m'' \dots} (x^{(p-1)(p'-1)\dots} + H(x^4) + 1) \dots \dots$$

$$\prod_{m,\, m',\, m''} \left\{ x^{(p-1)(p'-1)(p''-1)} + T(x^4) + 1 \right\} \prod_{m,\, m'} \left\{ x^{(p-1)(p'-1)} + L(x^4) + 1 \right\}$$

$$\prod_{m} \left\{ x^{p-1} + mF(x^4) \pm m \right\}.$$

Ставя значекъ *m* подъ знакомъ произведенія, мы указываемъ на то, что произведеніе распространяется на всѣ первоначальные дѣлители числа *M*. Значекъ *m*, *m'* указываетъ, что произведеніе распространяется на всѣ комбинаціи по парамъ первоначальныхъ дѣлителей *M*. Подобныя же значенія имѣютъ и всѣ другіе значки подъ знаками произведеній. Отъ вышеупомянутаго дѣленія, очевидно, получится выраженіе

$$x^{(p-1)(p'-1)(p''-1)\dots(p^{(n-1)}-1)} + S(x^4) + 1,$$

гдѣ $S(x^4)$—цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами, функція x^4, степень которой менѣе $\frac{1}{4}(p-1)(p'-1)\dots(p^{(n-1)}-1)$ и которая дѣлится на x^4. Отсюда заключаемъ, что *корни* x_M *опредѣляются уравненіемъ*

$$x^{\varphi(P)} + S(x^4) + 1 = 0, \qquad (108)$$

$$\varphi(P) = (p-1)(p'-1)(p''-1)\dots(p^{(n-1)}-1). \qquad (108')$$

Обозначимъ корни уравненія (108) черезъ

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ \eta_4 \dots \eta_{\varphi(P)}$$

и положимъ, что между величинами

$$\eta'_1,\ \eta'_2,\ \eta'_3,\ldots\ldots\eta'_{\frac{1}{4}\varphi(P)}$$

нѣтъ равныхъ. Разсуждая также, какъ мы это дѣлали для вывода уравненія (108), легко выводимъ изъ равенствъ (105) и (107) слѣдующія равенства:

$$(1-\eta'^4_1)(1-\eta'^4_2)\ldots(1-\eta'^4_{\frac{1}{4}\varphi(P)})=(-1)^\sigma(1+i)^{\frac{1}{2}\varphi(P)}, \quad (109)$$

$$(1+\eta'^4_1)(1+\eta'^4_2)\ldots\ldots(1+\eta'^4_{\frac{1}{4}\varphi(P)})=i^\rho(1+i)^{\frac{3}{4}\varphi(P)} \quad . \quad (110)$$

Для большей ясности послѣдняго и предпослѣдняго доказательствъ напомню теорему, помѣщенную у Леженъ Дирикле (Vorlesungen über Zahlentheorie, zweite Auflage) въ концѣ § 14:

$$\Sigma\varphi(n)=m,$$

гдѣ m—положительное цѣлое число, а n—всякій дѣлитель этого числа.

Т е о р е м а. *Каждый корень уравненія* (108) *опредѣляется цѣлою, но вообще съ дробными коэффиціентами, функціею всякаго другаго корня уравненія* (108).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта теорема доказана для случая M первоначальнаго на страницахъ 305 и 306. Такъ какъ каждый корень уравненія (108) можетъ получиться изъ всякаго другаго корня этого уравненія умноженіемъ аргумента въ этомъ послѣднемъ корнѣ на нечетное число [1]), то въ доказательствѣ страницы 306 ничего нѣтъ требующаго непремѣнно, чтобы M было первоначальное число.

Тутъ будетъ у мѣста доказать еще другое свойство корней уравненія (108), свойство, уже доказанное на страницахъ 328 и 329 подъ нумеромъ (121) для того случая, когда лемниската дѣлится на первоначальное число.

[1]) Это слѣдуетъ изъ того, что можно всегда найти x изъ сравненія

$$(\alpha+\beta i)x\equiv\gamma+\delta i\ (mod.\ M),$$

если $\alpha+\beta i$ и M—числа первыя между собою.

Изъ формулы (104), а также изъ формулы

$$sin'am2u = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4},\ x = sin'am\ u \qquad (111)$$

легко получаемъ

$$(1+\eta^4)\eta_{1+i}\eta_2 = 2(1+i)\eta^2, \qquad (111')$$

гдѣ η, η_{1+i} и η_2—корни уравненія (108); η_{1+i} и η_2 получаются изъ η умноженіемъ аргумента η на $1+i$ и 2. Умножимъ обѣ части послѣдняго равенства на всѣ корни (η_1, η_2, $\eta_3 \ldots$) уравненія (108), кромѣ η_{1+i} и η_2. Произведеніе корней уравненія (108) равно единицѣ; слѣдовательно

$$1+\eta^4 = 2(1+i)\, f(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots);$$

гдѣ $f(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots)$—цѣлая, съ цѣлыми коэффиціентами, функція корней уравненія (108).

Придавая знаку $\equiv$ то же *условное значеніе,* что и на страницѣ 328, получаемъ

$$1+sin'^4am\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M} \equiv 0\ (mod.\ 2+2i), \qquad (112)$$

гдѣ $\alpha+\beta i$—число первое съ M.

Корни уравненія (108) могутъ быть представлены въ иномъ видѣ, чѣмъ мы до сихъ поръ ихъ представляли. Пусть

$$M = M_1 m = M_1' m' = M_1'' m'' = \ldots\ldots\ldots;$$

гдѣ M_1, M_1', M_1'', ... составныя, а m, m', m'', ... первоначальныя числа вида $2h+1+2ni$; предполагается по прежнему, что M не содержитъ квадратныхъ множителей. Положимъ, что x, x', x'', x''', ... такія цѣлыя Гауссовы числа, которыя удовлетворяютъ условіямъ:

$$x \equiv \alpha+\beta i\ (mod.\ m),\ x' \equiv \alpha+\beta i\ (mod.\ m'),$$

$$x'' \equiv \alpha+\beta i\ (mod.\ m''), \ldots\ldots\ldots \qquad (113)$$

Если $\alpha+\beta i$ приравняемъ двумъ различнымъ вычетамъ изъ полной системы вычетовъ по модулю M, то хотя одно изъ чиселъ x, x', x'',.... получитъ такія два значенія, которыя не будутъ сравнимы по модулю, стоящему съ этимъ x въ одномъ и томъ же изъ сравненій (113). Кромѣ того, если $\alpha+\beta i$ число первое съ M, то x не дѣлится на m, x'—на m', x''—на m'',..... Вслѣдствіе этого, когда $\alpha+\beta i$ пробѣгаетъ полную систему вычетовъ по модулю M, первыхъ съ M, то x пробѣгаетъ полную систему вычетовъ по модулю m, не кратныхъ m, x'—полную систему вычетовъ по модулю m', не кратныхъ m', и такъ далѣе.

Изъ сравненій (113) выводимъ слѣдующія сравненія:

$$M_1 hx+M_1'h'x'+M_1''h''x''+M_1'''h'''x'''+.....\equiv\alpha+\beta i \ (mod.\ M), \quad (114)$$

$$M_1 h\equiv1 \ (mod.\ m),\ M_1'h'\equiv1 \ (mod.\ m'),\ M_1''h''\equiv1 \ (mod.\ m''),.....(114')$$

$$M_1 hx+mHy\equiv\alpha+\beta i \ (mod.\ M), \quad (115)$$

$$M_1 h\equiv1 \ (mod.\ m),\ mH\equiv1 \ (mod.\ M_1). \quad (115')$$

Если придавать $\alpha+\beta i$ всѣ значенія, первыя съ M, изъ полной системы вычетовъ по модулю M, то y получитъ всѣ значенія, первыя съ M_1, изъ полной системы вычетовъ по модулю M_1.

Изъ сравненій (114) и (115), вспоминая, что $(2+2i)\omega$ есть періодъ функціи $sin'am$, выводимъ

$$sin'am\,\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M}=sin'am\,2(1+i)\omega\left(\frac{hx}{m}+\frac{Hy}{M_1}\right)$$

$$=sin'am\,2(1+i)\omega\left[\frac{hx}{m}+\frac{h'x'}{m'}+\frac{h''x''}{m''}+....\right]. \quad (116)$$

Такъ какъ h—число первое съ m, то hx пробѣгаетъ полную систему вычетовъ по модулю m, когда x пробѣгаетъ полную систему вычетовъ; то же можно сказать и о Hy, $h'x'$, $h''x''$,.....

Кстати замѣтимъ, что изъ (114) и (115) также слѣдуетъ:

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{M}\right]=\left[\frac{\alpha+\beta i}{m}\right]\left[\frac{\alpha+\beta i}{m'}\right]\left[\frac{\alpha+\beta i}{m''}\right]\ldots\ldots.$$

$$=\left[\frac{x}{m}\right]\left[\frac{y}{M_1}\right]=\left[\frac{x}{m}\right]\left[\frac{x'}{m'}\right]\left[\frac{x''}{m''}\right]\left[\frac{x'''}{m'''}\right]\ldots\ldots. \quad (117)$$

Условимся, далѣе, обозначать *черезъ g первообразный корень для модуля m, черезъ g'—первообразный корень модуля m', черезъ g''—такой же корень для модуля m'', и такъ далѣе.* Замѣтимъ, что мы можемъ всегда положить

$$x=g^n,\ x'=g'^{n'},\ x''=g''^{n''};\ x'''=g'''^{n'''},\ldots\ldots, \quad (118)$$

гдѣ n, n', n'', n''',.... нѣкоторыя цѣлыя, не отрицательныя числа.

§ 90. Пополнивъ, на сколько намъ надобно, наши свѣдѣнія о лемнискатныхъ функціяхъ, перейдемъ къ изученію циклическихъ функцій корней уравненія (108).

Мы будемъ называть циклическою функціею 1-го порядка корней уравненія (*108*) *всякую цѣлую, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, функцію выраженій* (*116*), *которая не мѣняетъ своей величины отъ замѣны x черезъ gx, а также отъ замѣны x' черезъ $g'x'$ или отъ замѣны x'' черезъ $g''x''$, и такъ далѣе.*

Теорема. *Циклическая функція 1-го порядка корней уравненія* (108) *равна цѣлому Гауссову числу.*

Доказательство. Будемъ обозначать, ради краткости, циклическую функцію 1-го порядка черезъ $F(x,x',x'',....)$. Эту функцію можно всегда представить въ видѣ цѣлой, но съ дробными коэффиціентами, функціи любаго изъ корней уравненія (108), напримѣръ η, такъ что

$$F(x, x', x'',....)=f(\eta).$$

Если вмѣсто x, x', x'',.... будемъ послѣдовательно въ предъидущемъ равенствѣ ставить $g^n x$, $g'^{n'} x'$, $g''^{n''} x''$,......, гдѣ n—цѣлое число, измѣняющееся отъ 0 до $p-2$, n' измѣняется отъ 0 до $p'-2$, n''—отъ 0 до $p''-2$, и такъ далѣе, то η въ функціи $f(\eta)$ замѣнится различными корнями уравненія (108); поэтому

$$(p-1)(p'-1)(p''-1)\ldots\ldots.\ F(x,\ x',\ x'',....)=\Sigma f(\eta),$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ корни уравненія (108). Но

$$\Sigma f(\eta)=a_0+a_1\Sigma\eta+a_2\Sigma\eta^2+a_3\Sigma\eta^3+......,$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, a_3,.... вообще дробныя числа.

$$\Sigma\eta,\ \Sigma\eta^2,\ \Sigma\eta^3,....$$

—цѣлыя Гауссовы числа; слѣдовательно $\Sigma f(\eta)$, а также и $F(x, x', x'',....)$ раціональныя Гауссовы числа. По теоремѣ же страницы 298 $F(x, x', x'',....)$—не только раціональное, но и цѣлое число.

Мы будемъ называть циклическою функціею 2-го порядка всякую цѣлую, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, функцію $F_1(x, x', x'',....)$ *выраженій* (116), *удовлетворяющую условіямъ:*

$$F_1(gx, x', x'', x''',.....)=F_1(x, g'x', x'', x''',....)=F_1(x, x', g''x'', x''')$$

$$=F_1(x, x', x'', g'''x''',.....)=.......=-F_1(x, x', x'', x''',.....).$$

Чтобы вывести главное свойство циклическихъ функцій 2-го порядка, намъ надо обобщить нѣсколько понятіе о циклическихъ функціяхъ; такое обобщеніе намъ будетъ полезно и независимо отъ возможности доказать вышеупомянутое главное свойство. *Допустимъ, что циклическія функціи корней уравненія (108) могутъ содержать еще другія, хотя бы и ирраціональныя или трансцендентныя, величины; эти величины могутъ быть и неопредѣленныя, но вообще онѣ всегда независимы отъ корней уравненія* (108).

Разсмотримъ двѣ функціи:

$$W_1=\Pi[yf(x)-zf_1(x)],\quad W_2=\Pi[yf(gx)-zf_1(gx)];\tag{119}$$

мы обозначаемъ черезъ $f(x)$ и $f_1(x)$ нѣкоторыя цѣлыя, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, функціи выраженій

$$\sin'am\frac{2(1+i)x\omega}{m}=\sin'am\frac{2(1+i)g^n\omega}{m};\tag{120}$$

m—число первоначальное вида $2h+1+2li$; n—цѣлое, положительное число или нуль; y и z обозначаютъ или неопредѣленныя величины, или опредѣленныя, независимыя отъ выраженій (120). Положимъ, что множитель

$$yf(g^2x) - zf_1(g^2x)$$

входитъ въ произведеніе W_1.

Функція $W_1 + W_2$ есть циклическая перваго порядка, а $W_1 - W_2$ —циклическая 2-го порядка. Очевидно, что коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y и z въ функціи $W_1 + W_2$ будутъ циклическія функціи 1-го порядка, а въ функціи $W_1 - W_2$—2-го порядка; поэтому эти коэффиціенты въ $W_1 + W_2$ будутъ цѣлыя Гауссовы числа, а въ $W_1 - W_2$—цѣлыя же Гауссовы числа, умноженныя на $\sqrt{m}$. Слѣдовательно

$$W_1 + W_2 = \Phi(y,\ z),\ W_1 - W_2 = X(y,\ z)\sqrt{m}, \tag{121}$$

гдѣ $\Phi(y,\ z)$ и $X(y,\ z)$—цѣлыя, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, однородныя функціи y и z.

Если намъ извѣстно, что въ функціяхъ$(W_1 + W_2):\lambda$ и$(W_1 - W_2):\mu$ (λ и μ обозначаютъ цѣлыя Гауссовы числа) коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y и z выражаются посредствомъ цѣлыхъ, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, функцій выраженій (120), то можемъ написать:

$$\frac{1}{\lambda}(W_1 + W_2) = \Phi(y,\ z),\ \frac{1}{\mu}(W_1 - W_2) = X(y,z)\sqrt{m}. \tag{122}$$

Дѣйствительно, изъ равенствъ (121) слѣдуетъ, что всѣ коэффиціенты въ функціяхъ

$$\frac{1}{\lambda}(W_1 + W_2),\quad \frac{1}{\mu^2}(W_1 - W_2)^2$$

суть раціональныя числа; а слѣдовательно, по теоремѣ страницы 298, они—цѣлыя числа.

Т е о р е м а. *Всякая циклическая функція втораго порядка корней уравненія (108) равна $\lambda\sqrt{M}$, гдѣ λ—цѣлое Гауссово число; M, по обыкновенію, обозначаетъ составное нечетное число вида $2h + 1 + 2ni$; слово «циклическая» должно понимать такъ, какъ оно опредѣлено на страницѣ 409.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положимъ, что $M = M_1 m$, гдѣ M_1 и m—числа вида $2h + 1 + 2ni$, первое—составное (или первоначальное),

а второе—первоначальное (n можетъ равняться и нулю). Положимъ, что теорема доказана для того случая, когда въ уравненіи (108) M замѣнено черезъ M_1. Пусть по прежнему

$$P=N(M),\ P_1=N(M_1),\ p=N(m).$$

Разсмотримъ двѣ функціи V_1 и V_2, которымъ будемъ придавать различныя значенія, смотря по тому, сравнимо ли P съ 1 или съ 5 по модулю 8. Если $P\equiv 1 (mod.\ 8)$, то

$$\left.\begin{aligned} V_1&=\prod sin^2 am\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M},\\ V_2&=\prod sin^2 am\frac{2(1+i)(\gamma+\delta i)\omega}{M};\end{aligned}\right\}\qquad(123)$$

если же $P\equiv 5\ (mod.\ 8)$, то

$$\left.\begin{aligned} V_1&=\prod cos'^2 am\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M},\\ V_2&=\prod cos'^2 am\frac{2(1+i)(\gamma+\delta i)\omega}{M}.\end{aligned}\right\}\qquad(124)$$

Въ формулахъ (123) и (124) $\alpha+\beta i$ и $\gamma+\delta i$ обозначаютъ числа, удовлетворяющія условіямъ:

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{M}\right]^2=+1,\ \left[\frac{\gamma+\delta i}{M}\right]^2=-1.\qquad(125)$$

Произведенія въ формулахъ (123) и (124) должно распространять на всѣ числа $\alpha+\beta i$ или $\gamma+\delta i$ (понятно, это числа первыя съ M), принадлежащія одной и той же полной системѣ вычетовъ по модулю M.

Принимая во вниманіе формулы (116) и (117), видимъ, что функцію V_2 можно получить изъ функціи V_1 замѣною или x черезъ gx, или x' черезъ $g'x'$, или x'' черезъ $g''x''$, и такъ далѣе; употребляемъ обозначенія формулъ (116) и (117). Также видимъ, что отъ замѣны x черезъ g^2x или другой подобной замѣны функціи V_1 и V_2 не измѣняются. Отсюда заключаемъ, что функціи

V_1+V_2 и V_1-V_2 циклическія, первая—1-аго порядка, а вторая—2-аго порядка.

Легко замѣтить, что V_1 и V_2, отмѣченныя нумеромъ (123), можно представить въ видѣ произведеній четвертыхъ степеней различныхъ $sin'am$, потому что

$$\left[\frac{i^\rho}{M}\right]^2=+1$$

въ этомъ случаѣ. Поэтому вслѣдствіе формулы (112)

$$V_1\equiv\pm1\ (mod.\ 2+2i),\quad V_2\equiv\pm1\ (mod.\ 2+2i),$$

гдѣ сравненія надо понимать въ томъ же смыслѣ, какъ и сравненіе (112). Слѣдовательно

$$\frac{1}{2}(V_1+V_2)\text{ и }\frac{1}{4}(V_1-V_2)^2$$

—цѣлыя Гауссовы числа.

То же самое вѣрно и для функцій V_1 и V_2, отмѣченныхъ нумеромъ (124). Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ

$$\left[\frac{i^\rho}{M}\right]^2=(-1)^\rho;$$

поэтому каждому производителю

$$1-sin'^2am\,\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M},$$

входящему въ произведеніе V_1, соотвѣтствуетъ въ произведеніи V_2 множитель

$$1+sin'^2am\frac{2(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M};$$

поэтому V_1 и V_2 можно представить въ видѣ алгебраическихъ суммъ, въ которыхъ члены могутъ различаться только знаками. Слѣдовательно $\frac{1}{2}(V_1+V_2)$ и $\frac{1}{2}(V_1-V_2)$ суть цѣлыя, съ цѣлыми коэф-

фиціентами, функціи корней уравненія (108).

Было выше объяснено (формулы (116) и (117)), что можно всегда положить

$$\frac{\alpha+\beta i}{M}=\frac{Hu}{M_1}+\frac{hx}{m},\quad \frac{\gamma+\delta i}{M}=\frac{Hu_1}{M_1}+\frac{hx_1}{m},\tag{126}$$

$$\left[\frac{u}{M_1}\right]^2\left[\frac{x}{m}\right]^2=+1,\quad \left[\frac{u_1}{M_1}\right]^2\left[\frac{x_1}{m}\right]^2=-1.\tag{126'}$$

Если g первообразный корень по модулю m, то

$$g^{\frac{1}{2}(p-1)}\equiv-1\ (mod.m),\ \left[\frac{g^{\frac{1}{2}(p-1)}}{m}\right]^2=+1.$$

Отсюда заключаемъ: произведеніе V_1 можно раздѣлить на $\frac{1}{4}\varphi(P)$ множителей, при чемъ каждый множитель будетъ состоять изъ двухъ производителей съ аргументами:

$$\frac{Hu}{M_1}+\frac{hx}{m},\ \frac{Hu}{M_1}-\frac{hx}{m};$$

то же вѣрно и для V_2. Но

$$sin'am2(1+i)\omega\left\{\frac{Hu}{M_1}+\frac{hx}{m}\right\}sin'am\,2(1+i)\omega\left\{\frac{Hu}{M_1}-\frac{hx}{m}\right\}$$

$$=\frac{sin'^2am\dfrac{2(1+i)Hu\omega}{M_1}-sin'^2am\dfrac{2(1+i)hx\omega}{m}}{1+sin'^2am\dfrac{2(1+i)Hu\omega}{M_1}sin'^2am\dfrac{2(1+i)hx\omega}{m}},\tag{127}$$

$$cos'^2am2(1+i)\omega\left\{\frac{Hu}{M_1}+\frac{hx}{m}\right\}cos'^2am2(1+i)\omega\left\{\frac{Hu}{M_1}-\frac{hx}{m}\right\}=$$

$$\frac{\left(cos'^2am\dfrac{2(1+i)Hu\omega}{M_1}-\Delta'^2am\dfrac{2(1+i)Hu\omega}{M_1}sin'^2am\dfrac{2(1+i)hx\omega}{m}\right)^2}{\left(1+sin'^2am\dfrac{2(1+i)Hu\omega}{M_1}sin'^2am\dfrac{2(1+i)hx\omega}{m}\right)^2}.\tag{128}$$

Пользуясь формулами (127) и (128), представимъ V_1 и V_2 въ видѣ дробей; числители этихъ дробей назовемъ черезъ Z_1 и Z_2, а знаменатели—черезъ Y_1 и Y_2. Такимъ образомъ

$$V_1 = \frac{Z_1}{Y_1}, \quad V_2 = \frac{Z_2}{Y_2}. \tag{129}$$

Въ выраженіяхъ (119) сдѣлаемъ послѣдовательно четыре предположенія:

$$1)\ y = sin'^2 am \frac{2(1+i)Hu\omega}{M_1},\ f(x)=1,\ z=1,\ f_1(x) = sin'^2 am \frac{2(1+i)hx\omega}{m};$$

$$2) \text{ и } 3)\ y=1, f(x)=1,\ z=-sin'^2 am \frac{2(1+i)Hu\omega}{M_1},$$

$$f_1(x) = sin'^2 am \frac{2(1+i)hx\omega}{m};$$

$$4)\quad y = cos'^2 am \frac{2(1+i)Hu\omega}{M_1},\ f(x)=1,\ z=\Delta'^2 am \frac{2(1+i)Hu\omega}{M_1},$$

$$f_1(x) = sin'^2 am \frac{2(1+i)hx\omega}{m}.$$

Во всѣхъ четырехъ случаяхъ u полагается постояннымъ; а x для 1) и 2) случаевъ получаетъ различныя значенія, не кратныя m, изъ *половины* системы вычетовъ; въ 3) и 4) же случаяхъ x получаетъ различныя значенія, не кратныя m, изъ полной системы вычетовъ. Множитель $yf(x)-zf_1(x)$ зачисляется въ произведеніе W_1 или произведеніе W_2, смотря по тому, какое изъ равенствъ

$$\left[\frac{x}{m}\right]^2 = +1, \left[\frac{x}{m}\right]^2 = -1$$

имѣетъ мѣсто. Будемъ называть черезъ W_1' и W_2' результаты отъ первой подстановки, черезъ W_1'' и W_2''—результаты отъ второй подстановки; результаты же третьей и четвертой подстановокъ назовемъ черезъ W_1''', W_2''', W_1^{IV}, W_2^{IV}.

Если $p \equiv 1$ (*mod.* 8), то W_1', W_2', W_1'', W_2'' каждое состоитъ изъ $\frac{1}{8}(p-1)$ производителей вида

$$y^2 - z^2 sin'^4 am \frac{2(1+i)hx\omega}{m},$$

а W_1''', W_2''', W_1^{v}, W_2^{v} каждое изъ $\frac{1}{4}(p-1)$ такихъ же производителей. Коэффиціенты при нулевой степени z въ функціяхъ $W_1^{(n)} + W_2^{(n)}$, $W_1^{(n)} - W_2^{(n)}$ [1]), очевидно, дѣлятся на 2, ибо это— или 0, или удвоенная степень y. Коэффиціенты же при другихъ степеняхъ z^2 въ функціяхъ $W_1^{(n)} + W_2^{(n)}$, $W_1^{(n)} - W_2^{(n)}$ состоятъ изъ четнаго числа членовъ вида

$$\prod sin'^4 am \frac{2(1+i)hx\omega}{m},$$

потому что, сколько членовъ въ коэффиціентѣ $W_1^{(n)}$, столько же и въ коэффиціентѣ $W_2^{(n)}$. Принимая въ соображеніе формулу (112), видимъ, что функціи

$$\frac{1}{2}(W_1^{(n)} + W_2^{(n)}),\ \frac{1}{4}(W_1^{(n)} - W_2^{(n)})^2$$

имѣютъ цѣлыя коэффиціенты при различныхъ степеняхъ z, если $p \equiv 1$ $(mod.\ 8)$.

Если $p \equiv 5$ $(mod.\ 8)$, то i—квадратичный невычетъ по модулю m, и слѣдовательно каждому множителю въ $W_1^{(n)}$ вида $y - z\, sin'^2 am \frac{2(1+i)hx\omega}{m}$ соотвѣтствуетъ въ $W_2^{(n)}$ производитель вида $y + z\, sin'^2 am \frac{2(1+i)hx\omega}{m}$. Слѣдовательно коэффиціенты при различныхъ степеняхъ z въ функціи $W_1^{(n)}$ могутъ различаться отъ такихъ же коэффиціентовъ въ функціи $W_2^{(n)}$ только знаками; а потому при сложеніи или вычитаніи этихъ функцій коэффиціенты у различныхъ степеней z будутъ дѣлиться на 2.

Такимъ образомъ можемъ написать:

$$\frac{1}{2}(W_1^{(n)} + W_2^{(n)}) = \Phi^{(n)}(\xi),\ \frac{1}{2}(W_1^{(n)} - W_2^{(n)}) = X^{(n)}(\xi)\sqrt{m}, \quad (130)$$

[1]) Подъ значкомъ$^{(n)}$ мы будемъ подразумѣвать разомъ четыре значка $'$, $''$, $'''$, ^{v}.

$$\xi = sin'^2 am \frac{2(1+i)Hu\omega}{M_1}; \qquad (130')$$

$\Phi^{(n)}(\xi)$ и $X^{(n)}(\xi)$—цѣлыя, съ цѣлыми коэффиціентами, функціи ξ.

Послѣ всего предъидущаго легко сообразить, что

$$\left.\begin{array}{c} Z_1 \text{ и } Y_1 \text{ равны} \\ \prod_\eta \left\{\Phi^{(n)}(\eta)+X^{(n)}(\eta)\sqrt{m}\right\} \prod_{\eta_1} \left\{\Phi^{(n)}(\eta_1)-X^{(n)}(\eta_1)\sqrt{m}\right\}, \\ Z_2 \text{ и } Y_2 \text{ равны} \\ \prod_\eta \left\{\Phi^{(n)}(\eta)-X^{(n)}(\eta)\sqrt{m}\right\} \prod_{\eta_1} \left\{\Phi^{(n)}(\eta_1)+X^{(n)}(\eta_1)\sqrt{m}\right\}; \end{array}\right\} \qquad (131)$$

$$\left.\begin{array}{l} \eta = sin'^2 am \dfrac{2(1+i)Hu\omega}{M_1}, \left[\dfrac{u}{M_1}\right]^2 = +1, \\ \eta_1 = sin'^2 am \dfrac{2(1+i)Hu_1\omega}{M_1}, \left[\dfrac{u_1}{M_1}\right]^2 = -1. \end{array}\right\} \qquad (132)$$

Произведенія въ (131) должно распространять на всѣ u и u_1, первыя съ M_1 и принадлежащія къ одной и той же полной системѣ вычетовъ по модулю M_1.

Изъ формулъ (114) и (117) слѣдуетъ, что всегда можно написать:

$$\frac{u}{M_1} = \frac{h_1'x'}{m'} + \frac{h_1''x''}{m''} + \frac{h_1'''x'''}{m'''} + \ldots, \left[\frac{u}{M_1}\right]^2 = \left[\frac{x'}{m'}\right]^2 \left[\frac{x''}{m''}\right]^2 \left[\frac{x'''}{m'''}\right]^2 \ldots \qquad (133)$$

и подобныя же формулы—для u_1. Если въ формулахъ (133) замѣнимъ или x' черезъ $g'x'$, или x''—черезъ $g''x''$, или x'''—черезъ $g'''x'''$, и такъ далѣе, то η обратится въ η_1, u—въ u_1, функція Z_1—въ функцію Z_2, а функція Y_1—въ Y_2. Такъ какъ кромѣ того Z_2 и Y_2 состоятъ изъ произведеній функцій $\Phi^{(n)}(\eta)$, $X^{(n)}(\eta)$, $\Phi^{(n)}(\eta_1)$ и $X^{(n)}(\eta_1)$, отличающихся только знаками отъ такихъ же произведеній въ Z_1 и Y_1, то $\frac{1}{2}(Z_1+Z_2)$ и $\frac{1}{2}(Y_1+Y_2)$—циклическія функ-

ціи перваго порядка корней уравненія, получаемаго изъ (108) замѣною M черезъ M_1; что же касается до функцій

$$\frac{1}{2\sqrt{m}}(Z_1-Z_2),\quad \frac{1}{2\sqrt{m}}(Y_1-Y_2),$$

то онѣ—циклическія функціи втораго порядка тѣхъ же выраженій η и η_1. Поэтому вслѣдствіе допущенія, сдѣланнаго въ началѣ доказательства,

$$\frac{1}{2}(Z_1+Z_2)=\mu,\quad \frac{1}{2}(Y_1+Y_2)=\mu_1,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{m}}(Z_1-Z_2)=\nu\sqrt{M_1},\quad \frac{1}{2\sqrt{m}}(Y_1-Y_2)=\nu_1\sqrt{M_1},$$

гдѣ μ, μ_1, ν и ν_1—цѣлыя Гауссовы числа.

Такимъ образомъ получаемъ

$$Z_1=\mu+\nu\sqrt{M},\ Z_2=\mu-\nu\sqrt{M},\ Y_1=\mu_1+\nu_1\sqrt{M},\ Y_2=\mu_1-\nu_1\sqrt{M}, \tag{134}$$

$$\frac{1}{2}(V_1-V_2)=\frac{\mu_1\nu-\mu\nu_1}{\mu_1^2-M\nu_1^2}\sqrt{M}=\frac{\sigma}{\sigma_1}\sqrt{M}. \tag{135}$$

Доказано уже, что $M\sigma^2:\sigma_1^2$—цѣлое число. Такъ какъ M не содержитъ квадратныхъ дѣлителей, то каждый дѣлитель σ_1 долженъ быть дѣлителемъ σ; а потому $\sigma^2:\sigma_1^2$ есть квадратъ цѣлаго числа. Итакъ

$$\frac{1}{2}(V_1+V_2)=\tau,\ \frac{1}{2}(V_1-V_2)=\rho\sqrt{M}, \tag{136}$$

гдѣ τ и ρ—цѣлыя Гауссовы числа.

Если теперь $F_1(x, x', x'', \ldots)$ по прежнему означаетъ какую нибудь циклическую функцію втораго порядка корней уравненія (108) и если h, h_1, h_2 и λ обозначаютъ цѣлыя Гауссовы числа, то

$$\frac{1}{2}F_1(x, x', x'', \ldots)(V_1-V_2)=h,\ F_1(x, x', x'', \ldots)^2=h_1,$$

$$h^2=h_1\rho^2M,\ h_1M=h_2^2,\ h_1=\lambda^2M.$$

Слѣдовательно

$$F_1(x, x', x'', x''', \ldots) = \lambda\sqrt{M}. \qquad (137)$$

Этимъ доказана наша теорема. Дѣйствительно, легко повторить тѣ же разсужденія, полагая M_1 первоначальнымъ числомъ, и тогда эти разсужденія будутъ безусловно вѣрны. Доказавъ теорему для случая, когда M состоитъ изъ двухъ первоначальныхъ множителей, полагаемъ, что M_1 состоитъ изъ двухъ первоначальныхъ множителей, и тогда предъидущія разсужденія укажутъ на вѣрность теоремы въ случаѣ M, состоящаго изъ трехъ множителей. Продолжая такъ разсуждать, докажемъ теорему для всякаго M, имѣющаго видъ $2h+1+2ni$.

§ 91. Теперь мы можемъ приступить къ доказательству того, что вторая часть равенства (91) есть дѣйствительное цѣлое число.

Начнемъ съ формулы (93). Эту формулу можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$H = \pm\frac{1}{lg\sigma}lgN\frac{V_1}{V_2} = \pm\frac{1}{lg\sigma}lgN\frac{V_1^{\,2}}{V_1 V_2}, \qquad (138)$$

гдѣ V_1 и V_2 функціи, отмѣченныя нумеромъ (123).

$V_1 V_2$ есть произведеніе всѣхъ корней уравненія (108) въ случаѣ, когда $D=M$, числу составному; въ случаѣ же, когда $D=m$, числу первоначальному, $V_1 V_2$ есть произведеніе всѣхъ корней того уравненія, которое мы называли $U=0$ на страницахъ 305—309. Слѣдовательно для D составнаго $V_1 V_2=1$, для D же первоначальнаго $V_1 V_2 = \pm D$.

Вспоминая равенства (136), имѣемъ

$$V_1 = t + u\sqrt{D},\quad V_2 = t - u\sqrt{D},$$

гдѣ t и u—цѣлыя Гауссовы числа. Если D составное, то

$$t^2 - Du^2 = 1.$$

Если же D первоначально, то

$$t^2 - Du^2 = \pm D.$$

Но послѣднее равенство указываетъ на то, что t дѣлится на D. Полагая

$$t = i^{\rho} D u_1, \quad u = i^{\rho} t_1,$$

гдѣ ρ—цѣлое число, можемъ ρ такъ выбрать, что

$$t_1^2 - D u_1^2 = 1.$$

Поэтому всегда можемъ написать:

$$H = \pm \frac{2 lg N(t + u\sqrt{D})}{lg N(T + U\sqrt{D})}, \quad t^2 - Du^2 = 1, \quad T^2 - DU^2 = 1. \tag{139}$$

T и U суть основныя рѣшенія того же уравненія, которому удовлетворяютъ и t съ u; слѣдовательно

$$H = \pm \frac{2 lg N\{\pm (T + U\sqrt{D})^h\}}{lg N(T + U\sqrt{D})} = \pm 2h, \tag{140}$$

гдѣ h—дѣйствительное цѣлое число. Итакъ H есть *четное, дѣйствительное цѣлое число*.

Перейдемъ къ формулѣ (94). Въ такомъ случаѣ опять имѣемъ равенства (138); но въ нихъ подъ V_1 и V_2 должно подразумѣвать функціи, отмѣченныя нумеромъ (124). Въ этомъ случаѣ

$$V_1 V_2 = (1 - \eta_1^4)^2 (1 - \eta_2^4)^2 (1 - \eta_3^4)^2 \ldots\ldots = (1 + i)^{\varphi(P)}; \tag{141}$$

см. равенство (109), гдѣ $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots\ldots$ означаютъ то же, что и въ (141).

Функціи V_1 и V_2 можно представить такъ:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \Pi(1 - 2\eta_1^2 + \eta_1^4)\Pi(1 + 2\eta_2^2 + \eta_2^4), \\ V_2 &= \Pi(1 + 2\eta_1^2 + \eta_1^4)\Pi(1 - 2\eta_2^2 + \eta_2^4), \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

$$\eta_1 = sin' am \frac{2(1+i) y \omega}{M}, \left[\frac{y}{M}\right]^2 = +1, \quad \eta_2 = sin' am \frac{2(1+i) y_1 \omega}{M}, \left[\frac{y_1}{M}\right]^2 = -1.$$

Произведенія въ формулахъ (142) должны распространяться на всѣ y и y_1, принадлежащія къ одной и той же *четверти* системы

вычетовъ по модулю M. Такъ какъ $1+\eta_1{}^4$ и $1+\eta_2{}^4$ выражаются черезъ такія цѣлыя функціи корней уравненія (108), у которыхъ коэффиціенты—цѣлыя Гауссовы числа, кратныя $2+2i$, то

$$\frac{1}{2}(V_1+V_2)\equiv 0 \ (mod.\ 2^{\frac{1}{4}\varphi(P)}),\quad \frac{1}{4}(V_1-V_2)^2\equiv 0 \ (mod.\ 2^{\frac{1}{2}\varphi(P)}).$$

Слѣдовательно

$$V_1=(1+i)^{\frac{1}{2}\varphi(P)}(t+u\sqrt{D}),\ V_2=(1+i)^{\frac{1}{2}\varphi(P)}(t-u\sqrt{D}),\quad (143)$$

гдѣ t и u—цѣлыя Гауссовы числа; вслѣдствіе равенства (141), числа t и u удовлетворяютъ уравненію

$$t^2-Du^2=1.\quad (143')$$

Такимъ образомъ формулы (139) и (140) вѣрны и для этого случая.

Изъ формулы (140) выводимъ: *число классовъ первоначальныхъ формъ перваго рода съ опредѣлителемъ вида* $2l+1+2ni$, *не содержащимъ квадратныхъ множителей,—четно.*

Обратимся теперь къ тому случаю, когда въ формулѣ (91)

$$\chi=i,\ \psi=1:\sqrt{2}=\sqrt{i}:(1+i).$$

Въ такомъ случаѣ конецъ формулы (91) можно написать такъ:

$$\left[\frac{g^{\nu}}{m}\right]^2\left[\frac{g'^{\nu'}}{m'}\right]^2\ldots\ldots lgN\,\frac{(1+i)(1+\xi^4)+(1-2\xi^2-\xi^4)\sqrt{i}}{(1+i)(1+\xi^4)-(1-2\xi^2-\xi^4)\sqrt{i}},\quad (144)$$

$$D=Mi=mm'm''\ldots..i,\ \xi=sin'am\ 2(1+i)\omega\left\{\frac{hg^{\nu}}{m}+\frac{h'g'^{\nu'}}{m'}+\ldots..\right\};\quad (144')$$

въ этихъ формулахъ ν, ν', ν'',..... положительныя цѣлыя числа или нули, значеніе же другихъ обозначеній то же, что и въ формулахъ (116) и (118). Самую же формулу (91) можно написать такъ:

$$H = \pm \frac{1}{lg\sigma}\, lgN \frac{f(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots) + f_1(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)\sqrt{i}}{f(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots) - f_1(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)\sqrt{i}}\,; \quad (145)$$

въ формулѣ (145) $\eta, \eta_1, \eta_2 \ldots$ опредѣляются тою же формулою, какъ ξ въ равенствѣ (144′); $f(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)$ и $f_1(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)$ обозначаютъ цѣлыя, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, функціи $\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots$ Для полученія формулы (145) мы въ формулѣ (91) $\alpha + \beta i$ придаемъ всѣ значенія, первыя съ M и принадлежащія къ одной и той же *половинѣ системы вычетовъ* по модулю M; вслѣдствіе этого-то 2 въ знаменателѣ передъ $lg\sigma$ полагается сократившимся.

Будемъ подъ значкомъ $^{(n)}$ подразумѣвать безразлично какой нибудь изъ значковъ: $'$, $''$, $'''$, $''''$ и такъ далѣе. Если въ формулѣ (144′), опредѣляющей $\eta, \eta_1, \eta_2 \ldots, h^{(n)}$ замѣнимъ черезъ $h^{(n)} g^{(n)}$, то $f(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots) + f_1(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)\sqrt{i}$ измѣнится въ $f(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots) - f_1(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)\sqrt{i}$, аэта послѣдняя измѣнится въ первую; если же $h^{(n)}$ замѣнимъ черезъ $h^{(n)} g^{(n)2}$, то $f(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots) + f_1(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)\sqrt{i}$, а также $f(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots) - f_1(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)\sqrt{i}$ не измѣнятся; слѣдовательно $f(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)$ есть функція циклическая 1-аго порядка, а $f_1(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2 \ldots)$—функція циклическая 2-аго порядка. Итакъ

$$H = \pm \frac{1}{lg\sigma}\, lgN \frac{\lambda + \mu\sqrt{Mi}}{\lambda - \mu\sqrt{Mi}} = \pm \frac{1}{lg\sigma}\, lgN \frac{(\lambda + \mu\sqrt{Mi})^2}{\lambda^2 - Mi\mu^2}\,, \quad (146)$$

гдѣ λ и μ обозначаютъ цѣлыя Гауссовы числа.

Для вычисленія $\lambda^2 - Mi\mu^2$ вспомнимъ, какъ мы перешли отъ формулы (90) къ формулѣ (91); тогда будетъ ясно, что

$$\lambda^2 - Mi\mu^2 = \prod (1 + \eta^4) \prod_{\frac{1}{2}} \left\{ 2i - i\, cos'^2 am \frac{4(1+i)(\alpha + \beta i)\omega}{M} \right\};$$

первое произведеніе должно распространять на всѣ корни уравненія (108), если M составное, и на всѣ корни уравненія $U = 0$, [1])

[1]) Подъ $U = 0$ подразумѣваемъ то же уравненіе, которое такъ обозначается на страницахъ 293—309.

если $M = m$, первоначальному числу; второе произведеніе должно распространять на всѣ $\alpha+\beta i$, первыя съ M и принадлежащія одной и той же *половинѣ системы вычетовъ* по модулю M. Если впредь будетъ поставленъ значокъ $\frac{1}{4}$ подъ произведеніемъ, то это будетъ обозначать, что $\alpha+\beta i$ берется только изъ одной *четверти* системы вычетовъ по модулю M. Равенство, опредѣляющее $\lambda^2 - Mi\mu^2$, можно изобразить такъ:

$$\lambda^2 - Mi\mu^2 = (-1)^{\frac{1}{4}\varphi(P)} \prod_{\frac{1}{4}} (1+\eta^4)^4 (1-\eta^4);$$

поэтому, обозначая черезъ ρ дѣйствительное цѣлое число, имѣемъ

$$\lambda^2 - Mi\mu^2 = (-1)^\rho (1+i)^{\frac{7}{2}\varphi(P)}; \tag{147}$$

$\varphi(P)$ означаетъ то же, что въ уравненіи (108).

Что касается до $\lambda+\mu\sqrt{Mi}$, то это выраженіе можно представить въ видѣ произведенія $\frac{1}{4}\varphi(P)$ множителей вида

$$\{(1+i)(1+\xi^4) + (1-2\xi^2-\xi^4)\sqrt{i}\}$$

$$\times\{(1+i)(1+\xi^4) + (1+2\xi^2-\xi^4)(-1)^{\frac{1}{4}(P-1)}\sqrt{i}\} = C + D\sqrt{i};$$

стало быть C и D—цѣлыя, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, функціи ξ^2. Если $P \equiv 1 \pmod{8}$, то

$$C = 2i(1+\xi^4)^2 + i(1-\xi^4)^2 - 4i\xi^4,\quad D = 2(1+i)(1+\xi^4)(1-\xi^4).$$

Въ случаѣ, когда $P \equiv 5 \pmod{8}$,

$$C = 2i(1+\xi^4)^2 + 4i\xi^4 - i(1-\xi^4)^2,\quad D = -4(1+i)(1+\xi^4)\xi^2.$$

Вспомнивъ *условное* сравненіе (112), имѣемъ

$$2i(1+\xi^4)^2 \equiv 0 \pmod{(1+i)^8},\quad D \equiv 0 \pmod{(1+i)^8},$$

$$(1-\xi^4)^2 - 4\xi^4 = (1+\xi^4)^2 - 8\xi^4 \equiv 0 \pmod{(1+i)^6}.$$

Поэтому всегда можно положить

$$C=(1+i)^6(2N+I),\quad D=2(1+i)^6F,$$

гдѣ N, I и F—цѣлыя, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, функціи корней: η, η_1, η_2....

$$(\lambda+\mu\sqrt{Mi})^2=(1+i)^{3\varphi(P)}\prod_{\frac{1}{4}}\left\{I^2+4I(N+F\sqrt{i})+4(N+F\sqrt{i})^2\right\}.\quad(148)$$

Изъ формулы (111′) выводимъ

$$(1+\xi^4)^4\xi^4_{i+1}\xi^4_2=-64\xi^8,$$

гдѣ ξ_{i+1} и ξ_2 получаются изъ ξ умноженіемъ аргумента ξ на $1+i$ и 2. Если R и S означаютъ цѣлыя, съ цѣлыми Гауссовыми коэффиціентами, функціи η, η_1, η_2..., то имѣемъ

$$(1+\xi^4)^4(1+2(1+i)R)=-64+(1+i)^{15}S;$$

$$(1+\xi^4)^4+64\equiv 0\ (mod.\ (1+i)^{15});$$

послѣднее сравненіе—*условное*. Такъ какъ

$$16(1+\xi^4)^2\equiv 0\ (mod.\ (1+i)^{14}),$$

то послѣдовательно заключаемъ

$$\{(1+\xi^4)^2-8\xi^4\}^2\equiv\{(1+\xi^4)^2-8\}^2\equiv 0\ (mod.\ (1+i)^{14}),$$

$$(1+i)^{12}I^2=-\{(1+\xi^4)^2-8\xi^4\}^2\equiv 0\ (mod.\ (1+i)^{14}),\ I^2\equiv 0\ (mod.\ 2).$$

Слѣдовательно изъ (148) можно вывести

$$\lambda^2+Mi\mu^2\equiv 0\ (mod.\ (1+i)^{\frac{7}{2}\varphi(P)}),\quad(149)$$

$$2\lambda\mu\equiv 0\ (mod.\ (1+i)^{\frac{7}{2}\varphi(P)+2}).\quad(150)$$

Въ сравненіи (150) мы ставимъ $\frac{7}{2}\varphi(P)+2$ показателемъ степени $1+i$ вслѣдствіе того, что $\sqrt{i}$ умножается на 4, а не на 2 въ кривыхъ скобкахъ формулы (148). Изъ (147) и (149) слѣдуетъ:

$$2\mu^2 \equiv 2\lambda^2 \equiv 0 \ (mod.\ (1+i)^{\frac{7}{2}\varphi(P)});$$

поэтому можемъ положить

$$\lambda = (1+i)^{\frac{7}{4}\varphi(P)-1}\lambda_1,\ \mu = (1+i)^{\frac{7}{4}\varphi(P)-1}\mu_1;$$

λ_1 и μ_1—цѣлыя Гауссовы числа. Числа λ_1 и μ_1 удовлетворяютъ сравненіямъ

$$\lambda_1^2 + Mi\mu_1^2 \equiv 0 \ (mod.\ 2),\ \lambda_1\mu_1 \equiv 0 \ (mod.\ 2).$$

Такъ какъ Mi нечетно, то изъ перваго сравненія заключаемъ, что λ_1 и μ_1 или оба четны, или оба нечетны; изъ втораго же сравненія ясно, что λ_1 и μ_1 оба четны. Итакъ мы можемъ положить

$$\lambda = (1+i)^{\frac{7}{4}\varphi(P)}i^{\rho}t,\ \mu = (1+i)^{\frac{7}{4}\varphi(P)}i^{\rho}u; \tag{151}$$

$$t^2 - Du^2 = 1. \tag{152}$$

Такимъ образомъ, вмѣсто формулы (146), получаемъ

$$H = \pm\frac{2lgN(t+u\sqrt{D})}{lgN(T+U\sqrt{D})} = \pm\frac{2lgN(T+U\sqrt{D})^h}{lgN(T+U\sqrt{D})} = \pm 2h; \tag{153}$$

т. е. мы доказали, что и въ этомъ случаѣ H—*цѣлое, четное число*.

Разсмотримъ теперь случай, когда

$$\chi = 1+i,\ \psi = 1 : \sqrt{1+i} = \sqrt{1+i} : (1+i);$$

при этомъ позволимъ себѣ употреблять тѣ же обозначенія, что въ случаѣ $\chi = i$, безъ оговорокъ.

Конецъ формулы (91) изобразится такъ:

$$\left[\frac{g^{\nu}}{m}\right]^2\left[\frac{g'^{\nu'}}{m'}\right]^2 \ldots\ldots lgN\frac{(1+i)(1+\xi^4)+(1-2\xi^2-\xi^4)\sqrt{1+i}}{(1+i)(1+\xi^4)-(1-2\xi^2-\xi^4)\sqrt{1+i}}; \tag{154}$$

$$D = (1+i)M = (1+i)\,mm'm''\ldots\ldots$$

$$\xi = sin'am\,2(1+i)\omega\left\{\frac{hg^{\nu}}{m}+\frac{h'g'^{\nu'}}{m'}+\ldots\ldots\right\}; \tag{154'}$$

самую же формулу (91) можемъ написать слѣдующимъ образомъ (при этомъ сумма въ этомъ случаѣ распространяется на всѣ $\alpha+\beta i$, первыя съ $LA+LBi$ и принадлежащія къ одной *полной системѣ вычетовъ* по модулю $EA+LBi$):

$$H=\pm\frac{1}{lg\sigma}lgN\frac{f(\eta^2,\ \eta^2_1,\ \eta^2_2....)+f_1(\eta^2,\ \eta^2_1,\ \eta^2_2....)\sqrt{1+i}}{f(\eta^2,\ \eta^2_1,\ \eta^2_2....)-f_1(\eta^2,\ \eta^2_1,\ \eta^2_2....)\sqrt{1+i}}. \quad (155)$$

Легко замѣтить, что и здѣсь $f(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2....)$—циклическая функція 1-аго порядка, а $f_1(\eta^2, \eta^2_1, \eta^2_2....)$—циклическая функція 2-аго порядка; поэтому

$$H=\pm\frac{1}{lg\sigma}lgN\frac{\lambda+\mu\sqrt{M(1+i)}}{\lambda-\mu\sqrt{M(1+i)}}=\pm\frac{1}{lg\sigma}lgN\frac{(\lambda+\mu\sqrt{D})^2}{\lambda^2-D\mu^2}, \quad (156)$$

гдѣ λ и μ—цѣлыя **Гауссовы** числа.

Вычислимъ $\lambda^2-M(1+i)\mu^2$. Если вспомнимъ, какъ мы перешли отъ формулы (90) къ формулѣ (91), то будетъ ясно, что

$$\lambda^2-M(1+i)\mu^2=\prod(1+\eta^4)^2.\prod\left[2i-(1+i)cos^2 am\frac{4(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M}\right]$$

$$=(1+i)^{\varphi(P)}\prod(1+\eta^4)^2(i+\eta^2)=(1+i)^{\varphi(P)}\prod_{\frac{1}{4}}(1+\eta^4)^{10}$$

$$=\pm(1+i)^{\frac{17}{2}\varphi(P)}.$$

Изъ равенства

$$\lambda^2-(1+i)M\mu^2=(-1)^\rho(1+i)^{\frac{17}{2}\varphi(P)} \quad (157)$$

заключаемъ, что λ дѣлится на $1+i$; слѣдовательно

$$\lambda=(1+i)\lambda_1\,,\ (1+i)\lambda_1{}^2-M\mu^2=(-1)^\rho(1+i)^{\frac{17}{2}\varphi(P)-1}.$$

Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что μ дѣлится на $1+i$, такъ что можно положить

$$\mu=(1+i)\mu_1\ ;\ \lambda_1{}^2-(1+i)M\mu_1{}^2=(-1)^\rho(1+i)^{\frac{17}{2}\varphi(P)-2}.$$

Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что λ_1 дѣлится на $1+i$, и такъ далѣе, и такъ далѣе. Изъ этихъ разсужденій заключаемъ, что можно положить

$$\lambda=(1+i)^{\frac{17}{4}\varphi(P)}i^{\rho}t,\quad \mu=(1+i)^{\frac{17}{4}\varphi(P)}i^{\rho}u, \tag{158}$$

гдѣ t и u—цѣлыя Гауссовы числа.

Замѣняя въ равенствѣ (156) λ и μ черезъ ихъ выраженія подъ нумеромъ (158), получаемъ послѣдовательно

$$H=\pm\frac{1}{lg\,\sigma}\,lg\,N\frac{(t+u\sqrt{D})^2}{t^2-Du^2},\quad t^2-Du^2=1, \tag{159}$$

$$H=\pm\frac{2\,lg\,N(t+u\sqrt{D})}{lg\,N(T+U\sqrt{D})}=\pm\frac{2\,lg\,N(T+U\sqrt{D})^h}{lg\,N(T+U\sqrt{D})}=\pm 2h. \tag{159'}$$

Изъ равенства (159′) заключаемъ, что H—*цѣлое, четное число.*

Для случая, когда $\chi=i(1+i)$, легко выводимъ

$$H=\pm\frac{1}{lg\,\sigma}\,lg\,N\frac{(\lambda+\mu\sqrt{D})^2}{\lambda^2-D\mu^2}, \tag{160}$$

$$\lambda^2-D\mu^2=\prod(1+\eta^4)^2\left[2i-(1+i)i\cos'^2 am\,\frac{4(1+i)(\alpha+\beta i)\omega}{M}\right]$$

$$=(1+i)^{\varphi(P)}\prod(1+\eta^4)^2(1+i\eta^2)$$

$$=(1+i)^{\varphi(P)}\prod_{\frac{1}{4}}(1+\eta^4)^{10}=(-1)^{\rho}(1+i)^{\frac{17}{2}\varphi(P)}.$$

Опять выведемъ, что λ и μ дѣлятся на

$$(1+i)^{\frac{17}{4}\varphi(P)};$$

а потому формулы (159) и (159′) вѣрны и въ этомъ случаѣ, только $D=i(1+i)M$. И въ этомъ случаѣ H—*цѣлое, четное число.*

Итакъ H всегда четно за исключеніемъ тѣхъ случаевъ, когда опредѣлитель формъ равенъ $\pm\chi$ (случай, когда опредѣлитель

формъ равенъ ± 1, совсѣмъ нами не разсматривается). Разсмотримъ въ заключеніе этой главы формулу (86').

Если $D=\pm\chi=\pm i$, то

$$H=\frac{1}{2\,lg\,\sigma}lg\,N\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{lg\,N(i+(1+i)\sqrt{i})}{lg\,N(T+U\sqrt{i})}=1,$$

ибо $T=i$, $U=1+i$.

Если опредѣлитель формъ $D=\pm\chi=\pm(1+i)$, то

$$H=\frac{1}{lg\,\sigma}lg\,N\frac{\sqrt{1+i}+1}{\sqrt{1+i}-1}=\frac{lg\,N(\sqrt{1+i}+1)^2}{lg\,N(T+U\sqrt{1+i})}.$$

Легко однако же вычислить: $T=-1+2i$, $U=2i$; слѣдовательно

$$H=\frac{lg\,N(2+i+2\sqrt{1+i})}{lg\,N(-1+2i+2i\sqrt{1+i})}=\frac{lg\,N(2+i+2\sqrt{1+i})}{lg\,N(2+i+2\sqrt{1+i})}=1.$$

Точно также, если опредѣлитель формъ $D=\pm i(1+i)$, то $H=1$.

ГЛАВА VII.

Какимъ образомъ теорія умноженія на мнимыя количества аргументовъ эллиптическихъ функцій связана съ Кронекеровыми формулами. Нѣсколько словъ о формулахъ Гирстера.

§ 92. Пусть

$$\left.\begin{aligned} C&=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},\quad C'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-(1-c^2)x^2)}},\quad \sigma=\frac{C'i}{C},\\ K&=\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},\quad K'=\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-(1-k^2)y^2)}},\quad \tau=\frac{K'i}{K};\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

пусть дѣйствительныя части въ $\tau : i$ и $\sigma : i$—положительны и не равны нулю.

Въ тѣсномъ смыслѣ задача преобразованія эллиптическихъ функцій состоитъ въ слѣдующемъ: *при данномъ c найти условія, которымъ должны удовлетворять k и a, чтобы y, $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1-k^2y^2}$, опредѣляемыя дифференціальнымъ уравненіемъ*

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}=\frac{a\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},\tag{2}$$

выражались раціонально черезъ x, $\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{1-c^2x^2}$; при этомъ полагается $y=0$ при $x=0$. $\frac{1}{a}$ называется множителемъ преобразованія, c—даннымъ модулемъ, k—преобразованнымъ модулемъ.

Условія необходимыя и достаточныя, чтобы высказанное требованіе исполнилось, состоятъ въ удовлетвореніи двухъ равенствъ:

$$C=a(a_0K+a_1K'i),\quad C'i=a(b_0K+b_1K'i), \tag{3}$$

въ которыхъ a_0, a_1, b_0 и b_1—такія цѣлыя числа, что

$$n=a_0b_1-a_1b_0$$

—число положительное. Число n называется степенью преобразованія въ томъ случаѣ, когда a_0, a_1, b_0 и b_1 не имѣютъ, всѣ четыре разомъ, общихъ дѣлителей; если $n=1$, то преобразованіе—линейное. Изъ равенствъ (3) слѣдуетъ:

$$\sigma=\frac{b_1\tau+b_0}{a_1\tau+a_0},\quad \tau=\frac{-a_0\sigma+b_0}{a_1\sigma-b_1}. \tag{4}$$

Положимъ, что $C=K$, $C'=K'$; въ такомъ случаѣ

$$c^2=k^2,\quad C=a(a_0C+a_1C'i),\quad C'i=a(b_0C+b_1C'i), \tag{5}$$

$$a_1\sigma^2+(a_0-b_1)\sigma-b_0=0. \tag{6}$$

Если равенство (6) удовлетворяется для всякаго σ, то мы имѣемъ умноженіе на дѣйствительное цѣлое число аргумента эллиптическихъ функцій. Если же это равенство не удовлетворяется тождественно, то имѣемъ для σ одно значеніе, если только $4n-(a_0+b_1)^2>0$:

$$\sigma=h_1+i\sqrt{h_2}, \tag{7}$$

гдѣ h_1 и h_2—раціональныя числа, $h_2>0$. При значеніи σ, опредѣляемомъ (7), мы можемъ умножать аргументъ такой эллиптической функціи на нѣкоторыя мнимыя количества. Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ

$$\frac{1}{a}=a_0+a_1h_1+a_1i\sqrt{h_2},\quad \frac{1}{a}=\pm(m_1+i\sqrt{m_2}), \tag{8}$$

гдѣ m_1 и m_2—раціональныя числа, $m_2>0$.

Извѣстно, что при данномъ n всѣ значенія $\sqrt[4]{k}$, при которыхъ возможно преобразованіе эллиптическихъ функцій, опредѣляются черезъ $\sqrt[4]{c}$ съ помощью модулярнаго уравненія и линейныхъ преобразованій. Изъ этого ясно, что нѣкоторые модули c^2, при которыхъ существуетъ умноженіе на мнимыя количества, получатся, если изъ модулярнаго уравненія преобразованій n-ой степени

$$f(u,\ v)=0\ (u=\sqrt[4]{k},\ v=\sqrt[4]{c}) \tag{9}$$

и изъ какой нибудь изъ шести формулъ линейныхъ преобразованій:

$$k^2=c^2,\ k^2+c^2=1,\ k^2=\frac{1}{c^2},\ k^2=\frac{c^2-1}{c^2},\ k^2=\frac{c^2}{c^2-1},\ k^2=\frac{1}{1-c^2} \tag{10}$$

исключить $u=\sqrt[4]{k}$.

Возьмемъ второе изъ равенствъ (10) и напишемъ его такъ:

$$u^8+v^8=1. \tag{11}$$

Положимъ, что исключеніе u изъ (9) и (11) даетъ намъ уравненіе

$$G(n,\ v^8)=0;\ ^{1)} \tag{12}$$

здѣсь n полагается нечетнымъ. Пусть a, b, c, d..... первоначальныя числа и пусть

$$n=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots.. \tag{13}$$

Мы будемъ опредѣлять степень уравненія (12) относительно v^8 двумя способами: алгебраическимъ и ариѳметическимъ; приравнивая оба выраженія степени уравненія (12), мы и получимъ одну изъ Кронекеровыхъ формулъ.

§ 93. Все модулярное уравненіе (9) состоитъ изъ членовъ вида $Au^m v^l$, гдѣ A—постоянное. Требуется найти наибольшее значеніе $m+l$ во всемъ модулярномъ уравненіи; для этого надо вспомнить кое-что изъ теоріи модулярнаго уравненія для нечетнаго n.

u и v, связаннымъ модулярнымъ уравненіемъ (9), соотвѣтствуютъ τ и σ, связанныя равенствомъ

[1]) Что первая часть уравненія (12) должна быть раціональною функціею v^8, прямо слѣдуетъ изъ опредѣленія модулярнаго уравненія для n нечетнаго.

$$\tau=\frac{n'\sigma+16t}{n''},\ n'n''=n,\ n'>0,\ n''>0,\ n''>t\geqq 0, \tag{14}$$

при чемъ n', n'' и t не дѣлятся, всѣ три разомъ, на одно и то же число. Вспомнивъ, что

$$v=\sqrt{2}.\ \sqrt[8]{q}.\ \Pi(1+q^{2s}):\Pi(1+q^{2s-1}),\ q=e^{\pi\tau i}, \tag{15}$$

гдѣ s— цѣлое, положительное число, и что q дѣлается равнымъ нулю, когда $v=0$, заключаемъ, что u будетъ безконечно мало, когда v будетъ безконечно мало. Обыкновенно при составленіи модулярнаго уравненія u получается изъ v такъ: σ замѣняется черезъ τ, опредѣляемое равенствомъ (14), а потомъ величина, полученная отъ такой замѣны, умножается на символъ Якоби $\left(\frac{2}{n'}\right)$. Допуская такое образованіе u, мы легко выведемъ изъ формулъ (15) слѣдующее: когда u и v дѣлаются безконечно малыми, то u опредѣляется черезъ v съ помощью формулы

$$u=\left(\frac{2}{n'}\right).\ 2^{\frac{n''-n'}{2n''}}\ e^{\frac{2\pi ti}{n''}}\ v^{\frac{n'}{n''}}. \tag{16}$$

Раздѣлимъ всѣ τ, опредѣляемыя (14), и соотвѣтствующія имъ u на группы; въ каждой группѣ n'' будетъ одно и то же. Если n'' число первое съ n', то въ группѣ, характеризуемой n'', будетъ $p=n''$ корней модулярнаго уравненія; если же n'' и n' имѣютъ общіе первоначальные дѣлители a', b', c'....., то корней въ группѣ

$$p=n''\left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right)\left(1-\frac{1}{c'}\right)\ldots\ldots \tag{17}$$

Число всѣхъ корней модулярнаго уравненія

$$\nu=n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right)\ldots\ldots \tag{18}$$

Расположимъ всѣ n'' такъ, чтобы большій предшествовалъ меньшему, и подъ каждымъ n'' подпишемъ соотвѣтствующія ему n', p и $\frac{n'}{n''}$; пусть тогда получится таблица:

$$\left.\begin{array}{l} n,\ n_1'',\ n_2'',\ n_3'',\ldots\ldots n_3',\ n_2',\ n_1',\ 1; \\ 1,\ n_1',\ n_2',\ n_3',\ldots\ldots n_3'',\ n_2'',\ n_1'',\ n; \\ n,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ldots\ldots r_3,\ r_2,\ r_1,\ 1; \\ \frac{1}{n},\frac{n_1'}{n_1''},\frac{n_2'}{n_2''},\frac{n_3'}{n_3''},\ldots\ldots\frac{n_3''}{n_3'},\frac{n_2''}{n_2'},\frac{n_1''}{n_1'},n. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Очевидно, что въ послѣднемъ рядѣ каждая послѣдующая дробь болѣе предъидущей.

Положимъ $u=u_0\, v^{\frac{1}{n}}$. Если подставимъ въ модулярное уравненіе $u_0\, v^{\frac{1}{n}}$ вмѣсто u, то модулярное уравненіе будетъ опредѣлять u_0 черезъ v: раздѣлимъ послѣ такой замѣны обѣ части модулярнаго уравненія на нисшую изъ всѣхъ степеней v, входящихъ въ различные члены уравненія. Раздѣливъ, сдѣлаемъ $v=0$; тогда преобразованное модулярное уравненіе, очевидно, дастъ n конечныхъ корней для u_0 и $\nu-n$ корней нулевыхъ; т. е. уравненіе приметъ видъ:

$$u_0^{\,\nu}+A_1 u_0^{\,\nu-1}+\ldots\ldots\ldots+A_n u_0^{\,\nu-n}=0. \qquad (20)$$

$-A_n$ есть произведеніе конечныхъ изъ корней; слѣдовательно A_n не равно нулю. Прежде, чѣмъ мы дѣлили модулярное уравненіе на степень v, вмѣсто $u_0^{\,\nu}$ стояло u^{ν}; слѣдовательно мы дѣлили модулярное уравненіе на $v^{\frac{\nu}{n}}$. Если въ одночленѣ $A_n u_0^{\,\nu-n} v^{\frac{\nu}{n}}$ замѣнимъ u_0 черезъ $uv^{-\frac{1}{n}}$, то, очевидно, получимъ тотъ членъ модулярнаго уравненія, изъ котораго получился одночленъ $A_n u_0^{\,\nu-n}$: этотъ членъ есть $A_n u^{\nu-n} v$. Такъ какъ уравненіе (20) не даетъ безконечныхъ корней для u_0, то кромѣ u^{ν} нѣтъ другихъ членовъ въ модулярномъ уравненіи, не содержащихъ v. Изъ предъидущаго также слѣдуетъ: для всякаго члена модулярнаго уравненія $Au^m v^l$

$$l+\frac{m}{n} \geqq \frac{\nu}{n}=1+(\nu-n)\cdot\frac{1}{n}. \qquad (21)$$

Положимъ теперь $u=u_1 v^{n_1' : n_1''}$ и подставимъ это выраженіе въ модулярное уравненіе; послѣ подстановки раздѣлимъ обѣ части

уравненія на v^ζ, гдѣ ζ—наименьшій показатель степени v. При $v=0$ преобразованное уравненіе дастъ для u_1 n корней безконечныхъ, p_1 конечныхъ и $\nu-n-p_1$ корней нулевыхъ; поэтому коэффиціенты при $u_1^{\nu-n}$ и $u_1^{\nu-n-p_1}$ не могутъ равняться нулю, и уравненіе имѣетъ видъ:

$$A_n u_1^{\nu-n}+A_{n+1}u_1^{\nu-n-1}+\ldots\ldots+A_{n+p_1}u_1^{\nu-n-p_1}=0.$$

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что

$$\zeta=1+(\nu-n)\frac{n_1'}{n_1''},$$

что при $m=\nu-n-p_1$ наименьшее l въ членахъ $Au^m v^l$ модулярнаго уравненія есть $l=1+p_1 n_1':n_1''=1+r_1$. Также изъ предъидущаго выводимъ, что для всякаго члена $Au^m v^l$ модулярнаго уравненія

$$l+\frac{mn_1'}{n_1''}\geqq 1+(\nu-n)\frac{n_1'}{n_1''}=1+r_1+(\nu-n-p_1)\frac{n_1'}{n_1''}. \quad (22)$$

Положимъ далѣе $u=u_2 v^{n_2':n_2''}$; подставимъ и раздѣлимъ обѣ части модулярнаго уравненія на v^η. Тогда преобразованное уравненіе дастъ для u_2 $n+p_1$ корней безконечныхъ, p_2 конечныхъ и $\nu-n-p_1-p_2$ нулевыхъ корней при $v=0$. Уравненіе, опредѣляющее u_2, будетъ

$$A_{n+p_1}u_2^{\nu-n-p_1}+A_{n+p_1+1}u_2^{\nu-n-p_1-1}+\ldots$$

$$\ldots\ldots+A_{n+p_1+p_2}u_2^{\nu-n-p_1-p_2}=0;$$

вслѣдствіе этого

$$\eta=1+r_1+(\nu-n-p_1)\frac{n_2'}{n_2''}.$$

Тѣ же разсужденія, что выше, укажутъ намъ, что наименьшее l при $m=\nu-n-p_1-p_2$ есть $l=1+r_1+r_2$; также докажемъ, что для всякаго члена $Au^m v^l$ модулярнаго уравненія

$$l+\frac{mn_2'}{n_2''}\geqq 1+r_1+r_2+(\nu-n-p_1-p_2)\frac{n_2'}{n_2''}. \quad (23)$$

Продолжая такъ разсуждать, видимъ, что въ модулярномъ уравненіи всегда существуютъ такіе члены $Au^m v^l$, что

$$\left.\begin{array}{l} m=\nu-n,\ \nu-n-p_1,\ \nu-n-p_1-p_2,\ \nu-n-p_1-p_2-p_3,\ldots\ldots, \\ l=1,\quad 1+r_1,\quad 1+r_1+r_2,\quad 1+r_1+r_2+r_3,\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{24}$$

Также видимъ, что для всякаго члена $Au^m v^l$ модулярнаго уравненія (обозначаемъ черезъ s нѣкоторое цѣлое, положительное число)

$$l+\frac{mn_s'}{n_s''}\geqq 1+r_1+r_2+\ldots+r_s+(\nu-n-p_1-\ldots-p_s)\frac{n_s'}{n_s''}. \tag{25}$$

Разсматривая члены $Au^m v^l$, существованіе которыхъ нами доказано и для которыхъ m и l опредѣляются формулами (24), въ томъ порядкѣ, въ какомъ мы ихъ получали, легко замѣтимъ, что въ этихъ членахъ $m+l$ сначала уменьшается до тѣхъ поръ, пока $n''>n'$, а потомъ увеличивается, когда $n''<n'$; легко теперь опредѣлить наименьшее $m+l$ для такихъ членовъ. Если n—не квадратъ и если $\frac{n_s'}{n_s''}$—наибольшая изъ дробей $\frac{n'}{n''}$, меньшихъ единицы, то наименьшее $m+l$ будетъ тогда, когда

$$m=l=\nu-n-p_1-p_2-\ldots-p_s=p(n). \tag{26}$$

Если же n—квадратъ и если $\frac{n_s'}{n_s''}=1$, то наименьшее $m+l$ будетъ тогда, когда

$$\left.\begin{array}{l} m=\nu-n-p_1-p_2-\ldots-p_s=p(n)-\frac{1}{2}p_s, \\ l=\nu-n-p_1-p_2-\ldots-p_{s-1}=p(n)+\frac{1}{2}p_s. \end{array}\right\} \tag{27}$$

Докажемъ теперь, что minimum $m+l$ для особыхъ членовъ есть minimum для всѣхъ членовъ $Au^m v^l$ модулярнаго уравненія. Если n—квадратъ и $\frac{n_s'}{n_s''}=1$, то изъ неравенства (25) имѣемъ

$$l+m \geqq p(n)+\frac{1}{2}p_s+p(n)-\frac{1}{2}p_s=2p(n).$$

Если же n—не квадратъ и мы обозначимъ черезъ $\frac{h_1}{h_2}$ наибольшую изъ дробей $\frac{n'}{n''}$, меньшихъ единицы, то неравенство (25) даетъ

$$l+\frac{mh_1}{h_2} \geqq p(n)\left\{1+\frac{h_1}{h_2}\right\}.$$

Положить $l<p(n)$, $m<p(n)$ мы не можемъ, ибо тогда

$$l+\frac{mh_1}{h_2}<p(n)\left\{1+\frac{h_1}{h_2}\right\}.$$

Положить $l<p(n)$, $m>p(n)$, $l+m<2p(n)$ тоже нельзя. Дѣйствительно, такъ какъ $\frac{h_1}{h_2}<1$, то изъ $l+m<2p(n)$ вытекаетъ въ этомъ случаѣ

$$l+\frac{mh_1}{h_2}<p(n)\left\{1+\frac{h_1}{h_2}\right\}.$$

Но модулярное уравненіе обладаетъ свойствомъ не измѣняться отъ замѣны u черезъ $\left(\frac{2}{n}\right)v$ и v черезъ u; слѣдовательно, если допустить членъ, у котораго будетъ $l>p(n)$, $m<p(n)$, $l+m<2p(n)$, то существуетъ и членъ, у котораго $l<p(n)$, $m>p(n)$, $l+m<2p(n)$. Итакъ всегда

$$l+m \geqq 2p(n). \tag{28}$$

Извѣстно, что модулярное уравненіе не измѣнится, если замѣнимъ v черезъ $\frac{1}{v}$ и u черезъ $\frac{1}{u}$, а потомъ умножимъ обѣ части уравненія на $u^\nu v^\nu$. Если сдѣлаемъ такую замѣну, то каждый членъ $u^m v^l$ обратится въ $u^{\nu-m}v^{\nu-l}$; поэтому наибольшая величина $m+l$ есть

$$2\nu-2p(n). \tag{29}$$

Будемъ называть черезъ δ всякій дѣлитель n, черезъ d—такой дѣлитель n, который болѣе $\sqrt{n}$, черезъ h— общій дѣлитель d и $n{:}d$, черезъ $\varphi(h)$—число чиселъ, положительныхъ, первыхъ съ h и меньшихъ h; легко тогда сообразить, что для n не квадрата

$$2\nu-2p(n)=2n+2p_1+2p_2+\ldots+2p_s=2\sum\frac{d}{h}\varphi(h), \tag{30}$$

а въ случаѣ, если n—квадратъ,

$$2\nu-2p(n)=2n+2p_1+\ldots+2p_{s-1}+p_s=2\sum\frac{d}{h}\varphi(h)+\varphi(\sqrt{n}). \tag{30'}$$

Если исключимъ u изъ (9) и (11), то получимъ уравненіе (12), степень котораго относительно v^8 выразится или формулою (30), или формулою (30′).

Найдемъ теперь всевозможные квадратные дѣлители n, назовемъ ихъ черезъ A^2 и составимъ модулярныя уравненія для преобразованій степеней $n:A^2$; будемъ обозначать модулярное уравненіе для преобразованій степени $n:A^2$ черезъ

$$f\left(\frac{n}{A^2},\ u,\ v\right)=0. \tag{31}$$

Уравненіе (9) заключается въ (31); надо только для полученія (9) положить $A^2=1$. Если n—квадратъ, то при $A^2=n$ уравненіе (31) будетъ $u-v=0$. Измѣняя всячески A, перемножимъ почленно всѣ (31); тогда пусть

$$K(u,\ v)=\Pi f\left(\frac{n}{A^2},\ u,\ v\right)=0. \tag{32}$$

Первая часть уравненія (32) состоитъ изъ членовъ вида $Bu^m v^l$; очевидно, что наибольшая величина $m+l$ въ случаѣ, если n—не квадратъ, будетъ

$$2\sum\left\{\frac{d}{h}\sum\varphi\left(\frac{h}{s}\right)\right\}=2\sum d; \tag{33}$$

подъ s мы подразумѣваемъ дѣлитель h; $\sum\varphi\left(\frac{h}{s}\right)$ берется для всѣхъ дѣлителей h. Если n—квадратъ, то наибольшая величина $m+l$ будетъ

$$2\sum\left\{\frac{d}{h}\sum\varphi\left(\frac{h}{s}\right)\right\}+\sum\varphi\left(\frac{\sqrt{n}}{s}\right)=2\sum d+\sqrt{n}. \qquad (33')$$

Если черезъ $\Phi(n)$ обозначимъ сумму всѣхъ дѣлителей n, а черезъ $\Psi(n)$—разность между суммою дѣлителей n, большихъ $\sqrt{n}$, и суммою дѣлителей n, меньшихъ $\sqrt{n}$, то наибольшая величина $m+l$ выразится во всякомъ случаѣ формулою

$$\Phi(n)+\Psi(n). \qquad (34)$$

Если исключить u изъ уравненій (32) и (11), то получимъ

$$H(v^8)=\Pi G\left(\frac{n}{A^2}, v^8\right)=0; \qquad (35)$$

степень этого уравненія относительно v^8 равна $\Phi(n)+\Psi(n)$.

§ 94. Прежде, чѣмъ обратиться къ ариѳметическому способу опредѣленія степени уравненія (35), мы должны вспомнить нѣкоторыя малоизвѣстныя свойства линейныхъ преобразованій.

Пусть $\tau=x+yi$ и $\tau'=x'+y'i$ какія либо мнимыя количества, у которыхъ коэффиціенты передъ i, y и y', положительны; положимъ, что τ и τ' связаны между собою линейною подстановкою:

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\tau,\ \alpha\delta-\beta\gamma=1; \qquad (36)$$

α, β, γ и δ—цѣлыя числа. τ' и τ, связанныя равенствами (36), будемъ называть *эквивалентными числами*.

Будемъ измѣнять α, β, γ, δ; въ такомъ случаѣ всегда можно выбрать α, β, γ и δ такъ, что

$$-\frac{1}{2}\leqq x'<\frac{1}{2},\ x'^2+y'^2\geqq 1. \qquad (37)$$

Дѣйствительно, между всевозможными нормами $N(\gamma\tau+\delta)$, въ которыхъ γ и δ—числа первыя между собою, непремѣнно существуетъ наименьшая. Пусть же $N(\gamma\tau+\delta)$—наименьшая; рѣшая уравненіе $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, найдемъ $\alpha=\alpha'-m\gamma$, $\beta=\beta'-m\delta$, гдѣ m можетъ равняться всякому цѣлому числу. Выберемъ число m такъ, чтобы

$$N\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=N\left(\frac{\alpha'\tau+\beta'}{\gamma\tau+\delta}-m\right)$$

имѣла наименьшую величину при данныхъ γ и δ; въ такомъ случаѣ

$$N(x'+y'i)\leqq N(x'+y'i\pm1),\ \ N(x'+y'i)\geqq1;$$

послѣднее—вслѣдствіе того, что

$$N(\gamma\tau+\delta)\leqq N(\alpha\tau+\beta).$$

Изъ предъидущихъ неравенствъ прямо слѣдуютъ неравенства (37) передъ $\frac{1}{2}$ мы поставили только $<$ вслѣдствіе того, что прибавленіемъ 1 къ τ мы производимъ линейное преобразованіе.

Итакъ для всякаго числа τ можно найти ему эквивалентное число, удовлетворяющее условіямъ (37). Спрашивается, при какихъ условіяхъ два эквивалентныя числа могутъ удовлетворять неравенствамъ (37)?

Называя черезъ a, c, a_1, c_1, D и D_1 нѣкоторыя положительныя числа, а черезъ b и b_1 какія нибудь дѣйствительныя числа, мы можемъ всегда положить

$$\tau=\frac{b+i\sqrt{D}}{a},\ \tau'=\frac{b_1+i\sqrt{D_1}}{a_1},\ D=ac-b^2,\ D_1=a_1c_1-b_1^{\,2}. \qquad (38)$$

Если τ и τ' связаны равенствами (36), то, придавая a и a_1 приличныя значенія, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} D_1&=D,\ \alpha\delta-\beta\gamma=1,\\ a_1&=a\delta^2+2b\gamma\delta+c\gamma^2,\\ b_1&=a\beta\delta+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+c\alpha\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Если τ и τ' удовлетворяютъ условіямъ (37), то

$$2(b)\leqq a\leqq c,\ \ 2(b_1)\leqq a_1\leqq c_1, \qquad (40)$$

гдѣ (b) и (b_1) означаютъ абсолютныя величины b и b_1. Изъ условій (40) выводимъ

$$(b) \leqq \sqrt{\frac{D}{3}},\ (b_1) \leqq \sqrt{\frac{1}{3}D},\ a \leqq \sqrt{\frac{4}{3}D},\ a_1 \leqq \sqrt{\frac{4}{3}D}.$$

Такъ какъ

$$aa_1 = (a\delta + b\gamma)^2 + D\gamma^2,$$

то γ можетъ равняться только или 0, или ± 1.

Если $\gamma = 0$, то $\alpha = \delta = \pm 1$, $a_1 = a$, $x' - x = \pm \beta$. Послѣднее равенство невозможно, такъ какъ x' и x удовлетворяютъ (37).

Если $\gamma = \pm 1$, то $a_1 = a\delta^2 \pm 2b\delta + c$, $a = a_1\alpha^2 \mp 2b_1\alpha + c_1$. Если $a_1 \leqq a$, то $a\delta^2 \pm 2b\delta \leqq 0$. Но изъ неравенствъ $2(b) \leqq a$, $(\delta) \leqq \delta^2$ слѣдуетъ $a\delta^2 \pm 2b\delta \geqq 0$; поэтому можно только положить $a\delta^2 \pm 2b\delta = 0$. Слѣдовательно $a_1 = c$, а также $a_1 = a$, ибо полагалось, что $a_1 \leqq a$. Послѣднее изъ равенствъ (39) даетъ

$$b + b_1 = a\beta\delta + 2b\alpha\delta \pm c\alpha = a(\beta\delta \mp \alpha\delta^2 \pm \alpha).$$

Итакъ $b + b_1$ должно дѣлиться на a; но это, вслѣдствіе (40), можетъ быть только въ двухъ случаяхъ: $b + b_1 = 0$ или абсолютная величина $b + b_1$ равна a. Въ послѣднемъ случаѣ $b = b_1$, $\tau' = \tau$. Въ случаѣ же, когда $b = -b_1$, $a = c = a_1 = c_1$, $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1$. Такой же результатъ получили бы, предполагая $a_1 \geqq a$.

Итакъ два эквивалентныя числа только тогда могутъ оба удовлетворять условіямъ (37), когда ихъ нормы равны единицѣ, а дѣйствительныя части имѣютъ равныя абсолютныя величины, но знаки разные; поэтому, если желаемъ имѣть условія, которымъ не могли бы удовлетворять два эквивалентныя числа разомъ, то къ условіямъ (37) должно прибавить слѣдующее: *если норма числа равна единицѣ, то дѣйствительная часть числа отрицательна или* 0. Число τ, удовлетворяющее (37) и дополнительному условію, будемъ называть *приведеннымъ числомъ*.

Два числа σ' и σ [1]), связанныя не тождественною линейною подстановкою (т. е. не подстановкою $\sigma' = \sigma$), только въ немногихъ

[1]) Ниже мы всегда будемъ полагать, что числа, обозначаемыя черезъ σ и τ со значками и безъ значковъ, имѣютъ положительные коэффиціенты при i. Иногда впрочемъ будемъ допускать, что коэффиціентъ при i равенъ нулю.

частныхъ случаяхъ равны между собою. Для послѣдующаго будетъ очень важно знать эти немногіе случаи. Пусть

$$\sigma'=\frac{\alpha\sigma+\beta}{\gamma\sigma+\delta}=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma,\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1; \tag{41}$$

будемъ полагать σ приведеннымъ числомъ. Чтобы σ' равнялось σ, σ должно удовлетворять равенству

$$(2\gamma\sigma+\delta-\alpha)^2=(\alpha+\delta)^2-4. \tag{41'}$$

Такъ какъ мнимая часть у σ не можетъ обращаться въ нуль, то могутъ быть только два случая (не считаемъ случай, когда $\sigma=\infty\,.\,i$): $\alpha+\delta=0$, $\alpha+\delta=\pm1$.

1-ый случай. Если $\alpha+\delta=0$, то $\sigma=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{i}{(\gamma)}$; слѣдовательно $\alpha^2+1\geqq\gamma^2\geqq4\alpha^2$. Изъ неравенства $\alpha^2+1\geqq4\alpha^2$ слѣдуетъ $\alpha=-\delta=0$; поэтому $\beta=-\gamma=\pm1$. Изъ предъидущаго заключаемъ, что $\sigma=i$. И дѣйствительно, число i преобразовывается само въ себя посредствомъ линейной подстановки $\sigma'=\frac{-1}{\sigma}$.

Для всякаго числа σ', получаемаго линейнымъ преобразованіемъ изъ числа i, очевидно, будетъ существовать одна линейная подстановка, преобразовывающая σ' въ σ'; именно, если σ' получается изъ i преобразованіемъ (41), то

$$\sigma'=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta, & -\beta\\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}\sigma'.$$

2-ой случай. Если $\alpha+\delta=\pm1$, то

$$\sigma=\frac{2\alpha\mp1}{2\gamma}+\frac{\sqrt{-3}}{2\gamma};$$

мы принимаемъ γ за положительное число. Въ такомъ случаѣ $(2\alpha\mp1)^2\leqq\gamma^2\leqq\left(\alpha\mp\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, откуда слѣдуетъ

$$(2\alpha\mp1)^2=1,\ \gamma=1,\ \sigma=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}=\rho.$$

Относительно α, β, γ и δ могутъ быть два случая: a) $\gamma=1$, $\alpha=0$, $\delta=1$, $\beta=-1$, b) $\alpha=+1$, $\gamma=1$, $\delta=0$, $\beta=-1$. Такимъ образомъ видимъ, что число ρ переходитъ само въ себя съ помощью двухъ линейныхъ преобразованій:

$$\sigma'=\frac{-1}{\sigma+1},\ \sigma'=\frac{-\sigma-1}{\sigma}.$$

Для всякаго числа σ', получаемаго изъ ρ линейнымъ преобразованіемъ, очевидно, будутъ существовать двѣ линейныя подстановки, преобразующія σ' въ σ'.

Наконецъ число $\sigma=\infty.i$ преобразуется само въ себя безчисленнымъ числомъ преобразованій $\sigma'=\sigma+m$, гдѣ m—цѣлое, дѣйствительное число. Числу $\infty.i$ эквивалентны дѣйствительныя числа $\alpha:\gamma$, въ которыхъ α и γ числа первыя между собою.

Эквивалентныя числа часто раздѣляются на группы, которыя характеризуются извѣстными свойствами тѣхъ линейныхъ преобразованій, съ помощью которыхъ всѣ эквивалентныя числа извѣстной группы получаются изъ одного числа. Мы будемъ въ нашемъ сочиненіи дѣлить эквивалентныя числа только такимъ образомъ: пусть

$$\sigma'=\frac{\alpha\sigma+\beta}{\gamma\sigma+\delta},\ \sigma''=\frac{\alpha'\sigma+\beta'}{\gamma'\sigma+\delta'};\tag{42}$$

числа σ' и σ'' мы будемъ причислять къ одной или разнымъ группамъ, смотря по тому, удовлетворяются или нѣтъ сравненія:

$$\alpha\equiv(-1)^{\mu}\alpha',\ \beta\equiv(-1)^{\mu}\beta',\ \gamma\equiv(-1)^{\mu}\gamma',\ \delta\equiv(-1)^{\mu}\delta'\ (mod.\ p),\tag{42'}$$

въ которыхъ μ произвольное цѣлое число, одинаковое для всѣхъ четырехъ сравненій; *p для насъ всегда будетъ первоначальнымъ числомъ*. Если сравненія (42') удовлетворяются, то σ' и σ'' будутъ называться *эквивалентными относительно модуля p*.

Если $p=2$, то эквивалентныя числа раздѣляются на шесть группъ, ибо числа α, δ, β, γ, удовлетворяющія $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, характеризуются шестью системами сравненій относительно модуля 2. Дѣйствительно, изъ четырехъ чиселъ α, β, γ, δ одно можетъ быть четно, всѣ же остальныя нечетны; это даетъ четыре группы чиселъ, эквивалентныхъ относительно модуля 2; къ этимъ четыремъ груп-

намъ можно прибавить еще двѣ группы, характеризуемыя слѣдующими сравненіями:

$$1)\ \alpha\equiv 1,\ \beta\equiv 0,\ \gamma\equiv 0,\ \delta\equiv 1\ (mod.\ 2);$$

$$2)\ \alpha\equiv 0,\ \beta\equiv 1,\ \gamma\equiv 1,\ \delta\equiv 0\ (mod.\ 2).$$

Если p нечетное число, то сравненіе

$$\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1\ (mod.\ p) \tag{43}$$

имѣетъ $p(p^2-1)$ рѣшеній. Дѣйствительно, если число α не дѣлится на p, то, придавъ β и γ произвольныя значенія, получимъ всегда для δ одно рѣшеніе; такимъ образомъ имѣемъ $p^2(p-1)$ рѣшеній сравненія (43). Если же α дѣлится на p, то δ произвольно, β не дѣлится на p, а γ имѣетъ опредѣленное значеніе для извѣстнаго β: такимъ образомъ имѣемъ еще $p(p-1)$ рѣшеній сравненія (43). Каждое рѣшеніе сравненія (43) дастъ безчисленное множество рѣшеній уравненія $\alpha\delta-\beta\gamma=1$; но всѣ рѣшенія $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, получаемыя изъ одного рѣшенія сравненія (43), удовлетворяютъ сравненіямъ (42′). Такъ какъ α, β, γ, δ и $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ даютъ по нашему опредѣленію числа σ' и σ'', принадлежащія къ одной группѣ, то группъ чиселъ, эквивалентныхъ относительно модуля p, будетъ

$$\frac{1}{2}p(p^2-1).$$

Далѣе мы будемъ называть двѣ линейныя подстановки $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$ обратными, если тождественно удовлетворяется равенство

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\sigma=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\sigma. \tag{44}$$

Легко доказать, что $\alpha'=(-1)^\mu\delta$, $\beta'=-(-1)^\mu\beta$, $\gamma'=-(-1)^\mu\gamma$, $\delta'=(-1)^\mu\alpha$ (μ—произвольное цѣлое число) и что другаго рѣшенія для равенства (44) нѣтъ, если σ вполнѣ произвольно.

§ 95. Если n какое нибудь цѣлое (четное или нечетное), положительное число и если $ad-bc=n$, при чемъ a, b, c и d не имѣютъ общихъ дѣлителей всѣ четыре разомъ, то всякое преобразованіе n-ой степени характеризуется равенствомъ

$$\tau=\frac{a\sigma+b}{c\sigma+d}=\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\sigma, \tag{45}$$

гдѣ σ и τ—числа, опредѣленныя въ § 92. Будемъ называть равенство (45) подстановкою n-ой степени.

Будетъ ли n четно или нечетно, всегда можно найти такую линейную подстановку $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, что

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\tau=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\sigma=\frac{A\sigma+B}{D}, \tag{45'}$$

гдѣ $AD=n$ и A, B, D не имѣютъ общихъ дѣлителей всѣ три разомъ.

Дѣйствительно, если желаемъ удовлетворить равенству (45′) такъ, чтобы $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, то должны положить

$$\alpha=\frac{Ad-Bc}{n},\ \beta=\frac{Ba-Ab}{n},\ \gamma=-\frac{Dc}{n},\ \delta=\frac{Da}{n}. \tag{45''}$$

Чтобы α, β, γ и δ были цѣлыми числами, необходимо и достаточно удовлетворить слѣдующимъ условіямъ: 1) A должно быть общимъ наибольшимъ дѣлителемъ a и c, 2) B должно удовлетворять двумъ сравненіямъ:

$$\frac{a}{A}B\equiv b\ (mod.\ D),\ \frac{c}{A}B\equiv d\ (mod.\ D). \tag{46}$$

Если одно изъ сравненій (46) удовлетворено, то и другое можетъ быть удовлетворено, потому что

$$\frac{a}{A}d-\frac{c}{A}b=D\equiv 0\ (mod.\ D).$$

Совмѣстныя сравненія (46) имѣютъ одно рѣшеніе, ибо числа $\frac{a}{A}$, $\frac{c}{A}$, D по предположенію не имѣютъ общихъ дѣлителей. Итакъ всегда можно удовлетворить равенству (45′) и только однимъ способомъ, если не различать рѣшенія, въ которыхъ различныя B сравнимы по модулю D.

Примѣняя къ равенству (45′) обратную линейную подстановку, получаемъ

$$\tau=\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\sigma=\begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A, & B \\ 0, & D \end{pmatrix}\sigma. \tag{47}$$

Подстановки

$$\begin{pmatrix} A, & B \\ 0, & D \end{pmatrix},$$

въ которыхъ A и D связаны только равенствомъ $AD=n$, а B получаетъ различныя значенія, первыя съ общимъ дѣлителемъ T чиселъ A и D, изъ полной системы вычетовъ по модулю D, будемъ называть *представителями* преобразованій n—ой степени. Легко вычислить, что *представителей* n—ой степени всегда

$$N=n\prod\left(1+\frac{1}{p}\right), \tag{48}$$

гдѣ p—первоначальный дѣлитель n, а произведеніе распространяется на всѣ первоначальные дѣлители n.

§ 96. Разсмотримъ теперь квадратное уравненіе

$$P\sigma^2+Q\sigma+R=0,\ Q^2-4PR=\varkappa^2-4n, \tag{49}$$

въ которомъ P, Q, R, $\varkappa$, n—цѣлыя числа, при чемъ $\varkappa^2<4n$; $\varkappa$ можетъ равняться и нулю. Называя черезъ ε или положительную, или отрицательную единицу, мы можемъ представить равенство (49) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sigma=\frac{\frac{1}{2}(-Q+\varepsilon\varkappa)\sigma-R}{P\sigma+\frac{1}{2}(Q+\varepsilon\varkappa)}. \tag{49′}$$

Такъ какъ $Q+\varkappa$—четное число, то въ равенствѣ (49′) σ преобразовывается само въ себя посредствомъ преобразованія n—ой степени, если Q, R, P и n не имѣютъ общихъ дѣлителей; если же у Q, R, P и n есть общій наибольшій дѣлитель T, то преобразованіе будетъ степени $\frac{n}{T^2}$. Если мы желаемъ равенство (49) представить въ видѣ $\sigma=\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\sigma$ такъ, чтобы $c=P$ и $ad-bc=n$, то это можно сдѣлать только, представивъ (49) въ видѣ (49′).

Равенство (49′) всегда можно замѣнить, какъ было выше объяснено, и однимъ только способомъ—равенствомъ (если преобразовывать только подстановку, а не σ)

$$\sigma=\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A, & B \\ 0, & D \end{pmatrix}\sigma,\ \alpha\delta-\gamma\beta=1,\ AD=n. \qquad (49'')$$

Далѣе мы будемъ полагать, что P, Q, R и n не имѣютъ общихъ дѣлителей, ибо въ противномъ случаѣ мы можемъ раздѣлить первую часть уравненія (49) на этотъ общій дѣлитель, а потомъ примѣнять нижеслѣдующія разсужденія.

Посмотримъ, будутъ ли получаться различные представители въ (49″), или одинаковые, если въ равенствѣ (49′) сначала положимъ $\varepsilon=+1$, а потомъ $\varepsilon=-1$. Чтобы для $\varepsilon=+1$ и $\varepsilon=-1$ получались тѣ же представители, числа

$$P, \frac{Q+\varkappa}{2}, n$$

должны имѣть тотъ же общій наибольшій дѣлитель A, какъ и числа

$$P, \frac{Q-\varkappa}{2}, n.$$

Во вторыхъ, должны удовлетворяться сравненія

$$\frac{Q+\varkappa}{2} B\equiv RA\ (mod.\ n),\ \frac{Q-\varkappa}{2} B\equiv RA\ (mod.\ n);$$

$$\frac{P}{A}B \equiv \frac{Q-\varkappa}{2} (mod.\ D),\ \frac{P}{A}B \equiv \frac{Q+\varkappa}{2} (mod.\ D).$$

Изъ перваго условія слѣдуетъ $\varkappa \equiv 0$ $(mod.\ A)$; изъ сравненій же слѣдуетъ $\varkappa B \equiv 0$ $(mod.\ n)$, $\varkappa \equiv 0$ $(mod.\ D)$. Такъ какъ B должно быть числомъ первымъ съ общимъ дѣлителемъ A и D, то единственное необходимое и достаточное условіе будетъ $\varkappa \equiv 0$ $(mod.\ n)$.

Поэтому, если $n > 3$, то представители въ равенствѣ (49″) при тѣхъ же P, Q, R и $\varkappa$, но при различныхъ ε не могутъ быть одинаковы за исключеніемъ, конечно, случая $\varkappa = 0$, ибо $\varkappa^2 < 4n$, слѣдовательно $\varkappa$ не можетъ дѣлиться на n.

Если $n = 3$, то кромѣ случая $\varkappa = 0$ оба представителя будутъ одинаковы для $\varkappa = 3$. Если $n = 2$, то при $\varkappa = 2$ оба представителя будутъ одинаковы.

Пусть σ—приведенное число и опредѣляется квадратнымъ уравненіемъ съ цѣлыми коэффиціентами:

$$ta\sigma^2 + tb\sigma + tc = 0;\ t^2(b^2 - 4ac) = \varkappa^2 - 4n. \tag{50}$$

Положимъ, что a, b, c не имѣютъ общихъ дѣлителей, а t не имѣетъ общихъ дѣлителей съ n; слѣдовательно t и $\varkappa$ взаимно простыя числа. Если σ и n—числа постоянныя, то a, b и c—также постоянны; но $\varkappa$ и t могутъ быть и перемѣнныя. Если черезъ Δ обозначимъ $-b^2 + 4ac$, то $\varkappa$ и t удовлетворяютъ уравненію

$$\varkappa^2 + \Delta t^2 = 4n. \tag{51}$$

Уравненіе (51) вообще можетъ имѣть нѣсколько рѣшеній, для которыхъ $\varkappa$ и t—числа первыя между собою; спрашивается, въ какихъ случаяхъ для двухъ системъ чиселъ ε, $\varkappa$, t представители въ равенствахъ вида (49″) будутъ одинаковы?

Чтобы для двухъ системъ ε, $\varkappa$, t при одинаковыхъ a, b и c представители (49″) были одинаковы, необходимо исполнить слѣдующія два условія: 1) числа

$$\frac{1}{2}(-tb + \varepsilon\varkappa),\ ta,\ n$$

должны имѣть тотъ же общій дѣлитель A, какъ и числа (называемъ черезъ ε_1, $\varkappa_1$, t_1 вторую систему ε, $\varkappa$, t)

$$\frac{1}{2}(-t_1 b+\varepsilon_1\varkappa_1),\ t_1 a,\ n;$$

2) одно и то же число B должно удовлетворять четыремъ сравненіямъ:

$$\frac{1}{2}(-tb+\varepsilon\varkappa)B\equiv -tcA\ (mod.\ n),\ \frac{1}{2}(-t_1 b+\varepsilon_1\varkappa_1)B\equiv -t_1 cA\ (mod.\ n),$$

$$\frac{ta}{A}B\equiv\frac{tb+\varepsilon\varkappa}{2}\ (mod.\ D),\ \frac{t_1 a}{A}B\equiv\frac{t_1 b+\varepsilon\varkappa}{2}\ (mod.\ D).$$

Легко видѣть, что необходимое и достаточное условіе для удовлетворенія всѣхъ этихъ требованій есть удовлетвореніе сравненія

$$\frac{1}{2}(\varepsilon\varkappa t_1-\varepsilon_1\varkappa_1 t)\equiv 0\ (mod.\ n).$$

Такимъ образомъ $\varkappa$, t, $\varkappa_1$ и t_1 должны удовлетворять тремъ равенствамъ (обозначаемъ черезъ x цѣлое число):

$$2nx=\varepsilon\varkappa t_1-\varepsilon_1\varkappa_1 t,\ 4n=\varkappa^2+\Delta t^2,\ 4n=\varkappa_1^2+\Delta t_1^2. \qquad (52)$$

Изъ равенствъ (52) выводимъ

$$\left(\varepsilon\varkappa-\frac{2t_1}{x}\right)^2+\left(\varepsilon_1\varkappa_1+\frac{2t}{x}\right)^2+(t^2+t_1^2)\left(\Delta-\frac{4}{x^2}\right)=0. \qquad (53)$$

Условіе (53) не можетъ удовлетворяться, если $\Delta>4$; въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, разныя уравненія (50) соотвѣтствуютъ разнымъ представителямъ въ формулѣ (49″). Такъ какъ мы полагали, что σ—число приведенное, то $b^2\leqq ac$ и $\Delta>2$; слѣдовательно мы должны разсмотрѣть только два случая: $\Delta=4$ и $\Delta=3$.

1) Если $\Delta=4$, то уравненіе (50) обращается въ $t\sigma^2+t=0$. Равенства (53) и (52) даютъ намъ

$$\varepsilon\varkappa=2t_1,\ \varepsilon_1\varkappa_1=-2t,\ 4n=4t^2+4t_1^2;$$

при этомъ всѣ условія (52) оказываются удовлетворенными. Такимъ образомъ два равенства:

$$t\sigma^2+t=0,\ t_1\sigma^2+t_1=0,$$

для которыхъ $\varkappa=2t_1$, $\varkappa_1=2t$, $n=t^2+t_1^2$, при представленіи ихъ въ видѣ (49″) даютъ одинаковые два представителя.

Въ случаѣ $n=2$ будетъ $t=t_1$; въ этомъ случаѣ оба уравненія сливаются въ одно.

2) Если $\Delta=3$, то уравненіе (50) обращается въ $t\sigma^2+t\sigma+t=0$. Принявъ $x=1$, видимъ, что равенства (52) обращаются въ слѣдующія:

$$4n=\varkappa^2+3t^2,\ 4n=\varkappa_1^2+3t_1^2,\ 2n=\varepsilon\varkappa t_1-\varepsilon_1\varkappa_1 t. \tag{54}$$

Раздѣливъ второе изъ (54) на первое, получаемъ

$$\frac{\varepsilon_1\varkappa_1+t_1\sqrt{-3}}{\varepsilon\varkappa+t\sqrt{-3}}\cdot\frac{\varepsilon_1\varkappa_1-t_1\sqrt{-3}}{\varepsilon\varkappa-t\sqrt{-3}}=1.$$

$$\frac{\varepsilon_1\varkappa_1+t_1\sqrt{-3}}{\varepsilon\varkappa+t\sqrt{-3}}=\frac{(\varepsilon\varepsilon_1\varkappa\varkappa_1+3tt_1)+(\varepsilon\varkappa t_1-\varepsilon_1\varkappa_1 t)\sqrt{-3}}{\varkappa^2+3t^2}=\frac{h+2n\sqrt{-3}}{4n};$$

h—нѣкоторое цѣлое число. Итакъ

$$\frac{h+2n\sqrt{-3}}{4n}\cdot\frac{h-2n\sqrt{-3}}{4n}=1;$$

$$\frac{h+2n\sqrt{-3}}{4n}=\mp\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Такъ какъ въ послѣднемъ равенствѣ стоитъ двойной знакъ, то каждому равенству $t\sigma^2+t\sigma+t=0$ будутъ соотвѣтствовать два равенства: $t_1\sigma^2+t_1\sigma+t_1=0$ и $t_2\sigma^2+t_2\sigma+t_2=0$, которыя будутъ давать тѣ же представители, если ихъ представить въ видѣ (49″), что и $t\sigma^2+t\sigma+t=0$. Легко вычислить, что

$$t_1=\frac{-t+\varepsilon\varkappa}{2},\ \varepsilon_1\varkappa_1=\frac{-\varepsilon\varkappa-3t}{2},\ t_2=\frac{\varepsilon\varkappa+t}{2},\ \varepsilon_2\varkappa_2=\frac{\varepsilon\varkappa-3t}{2}.$$

Но и здѣсь будетъ исключеніе, если $\varkappa=0$ (или $\varkappa_1=0$, или $\varkappa_2=0$); въ такомъ случаѣ два изъ уравненій, опредѣляющихъ σ, дѣлаются

одинаковыми. Въ этомъ случаѣ $n=3$ и у двухъ одинаковыхъ уравненій величины $\varkappa$ равны 3.

§ 97. Обратимся теперь къ опредѣленію ариѳметическимъ путемъ степени уравненія (35) относительно v^8. Пусть v^8 измѣняется посредствомъ какихъ нибудь линейныхъ преобразованій въ $v_1{}^8$ и $v_2{}^8$; пусть σ отъ тѣхъ же преобразованій обращается въ σ_1 и σ_2. Если σ_1 и σ_2—эквивалентны относительно модуля 2, то $v_1{}^8=v_2{}^8$; при этомъ не мѣшаетъ замѣтить, что $v_1{}^8=v_2{}^8$ только тогда, когда σ_1 и σ_2—эквивалентны относительно модуля 2 (Journal von Crelle, 83 Band, 4 Heft, статья Дедекинда). Вслѣдствіе предъидущаго, въ уравненіяхъ (9), (11) и (32) мы всегда можемъ ограничить σ тѣмъ условіемъ, что σ есть или число приведенное, или получается изъ приведеннаго числа σ' съ помощью одного изъ пяти преобразованій:

$$\sigma=\frac{-1}{\sigma'},\ \sigma=\frac{\sigma'}{\sigma'+1},\ \sigma=\frac{-1}{\sigma'+1},\ \sigma=\sigma'+1,\ \sigma=\frac{-\sigma'-1}{\sigma'}. \qquad (55)$$

Если изъ уравненій (9) и (11) (или изъ уравненій (11) и (32)) исключается u, то этимъ предполагается, что оба уравненія удовлетворяются одной и той же системою величинъ u и v; поэтому u^8 и v^8 для обоихъ уравненій—одно и то же. Въ теоріи эллиптическихъ функцій доказывается, что τ и σ, удовлетворяющія равенству (11), связаны такою линейною подстановкою $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, въ которой α и δ—четны, а γ и β—нечетны; такая линейная подстановка называется линейною подстановкою *втораго рода* [1]). Было уже сказано, что τ и σ для u и v, удовлетворяющихъ уравненію (32), связаны равенствами:

$$\tau=\frac{n'\sigma+16t}{n''},\ n'n''=n;$$

[1]) Линейная подстановка, въ которой α и δ—нечетны, а β и γ—четны, называется подстановкою перваго рода; только для σ и τ, связанныхъ подстановкою перваго рода, $u^8=v^8$.

слѣдовательно, если мы исключаемъ u изъ (11) и (32), то это значитъ, что величины $\frac{n'\sigma+16t}{n''}$ и σ, при нѣкоторыхъ значеніяхъ σ, n', n'' и t, связаны линейною подстановкою втораго рода, т. е.

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n', & 16t\\ 0, & n''\end{pmatrix}\sigma=\sigma,\ \alpha\equiv\delta\equiv0,\ \gamma\equiv\beta\equiv1\ (mod.\ 2). \quad (56)$$

Поэтому вопросъ о степени уравненія (35) приводится къ опредѣленію числа различныхъ системъ чиселъ σ, n', n'' и t, которыя удовлетворяютъ условіямъ (56).

Предполагать, что одна и та же система чиселъ σ, n', n'', t можетъ давать два корня v^8 уравненія (35), нельзя. Дѣйствительно, если были бы два корня, то удовлетворялись бы разомъ два уравненія: $u^8+v^8=1$, $u^8+d(u^8)+v^8+d(v^8)=1$, откуда слѣдуетъ $d(u^8)+d(v^8)=0$. Въ такомъ случаѣ равенству (56) удовлетворяли бы и σ, и $\sigma+\delta\sigma$, гдѣ $\delta\sigma$—безконечно-малое. Равенство (56) можно написать такъ:

$$A\sigma^2+2B\sigma+C=0; \quad (56')$$

если этому равенству удовлетворяетъ и $\sigma+\delta\sigma$, то $A\sigma+B=0$, т. е. σ—величина дѣйствительная. При ограниченіи, которому мы подвергли σ, σ можетъ имѣть только три дѣйствительныя значенія: 0, +1, —1. Если $\sigma=0$, то $C=0$; но $C=-\beta n''-16t\alpha$, т. е. C—нечетно. Если $\sigma=\pm1$, то $c^2=\infty$ и $k^2=\infty$; слѣдовательно въ такомъ случаѣ v^8 не есть корень уравненія (35), вліяющій на степень (35). (Относительно того, что c^2 приближается къ ∞, когда мнимая часть σ дѣлается безконечно малою, а дѣйствительная часть σ, не измѣняясь, остается равною несократимой дроби съ нечетными числителемъ и знаменателемъ, можно справиться въ статьѣ Дедекинда, 83 томъ журнала Крелля).

Легко вычислить, что въ равенствѣ (56′)

$$A=\gamma n',\ 2B=16\gamma t+\delta n''-\alpha n',\ C=-\beta n''-16\alpha t; \quad (56'')$$

такимъ образомъ видимъ, что въ равенствѣ (56′) A и C—нечетны. Мы будемъ полагать γ положительнымъ, что можно сдѣлать, такъ

какъ отъ одновременной перемѣны знаковъ у α, β, γ и δ подстановка не измѣняется. Замѣтимъ еще, что

$$4B^2-4AC=(16\gamma t+\delta n''+\alpha n')^2-4n=4\xi^2-4n; \tag{57}$$

понятно, надо полагать $\xi^2<n$.

Наоборотъ, если мы имѣемъ такое равенство (56′), въ которомъ A и C—нечетны и $B^2-AC=\xi^2-n$, $\xi^2<n$, то, какъ доказано въ § 96, можемъ всегда представить его въ видѣ равенства (56) однимъ способомъ, если $\xi=0$, и двумя, если $\xi^2>0$; предполагается, что σ не замѣняется $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma$, если $\sigma=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Легко сообразить, что при такомъ представленіи (56′) въ видѣ (56) непремѣнно $\alpha\equiv\delta\equiv0$, $\beta\equiv\gamma\equiv1$ $(mod.\ 2)$.

Если число σ—приведенное, то форма $Ax^2+2Bxy+Cy^2$—приведенная съ отрицательнымъ опредѣлителемъ ξ^2-n; при этомъ легко замѣтить, что двумъ эквивалентнымъ приведеннымъ формамъ соотвѣтствуетъ одно приведенное число σ. Если же σ получается изъ приведеннаго числа σ' съ помощью одного изъ преобразованій (55), то замѣняя въ уравненіи (56′) σ черезъ одну изъ дробей (55), получаемъ

$$A_1\sigma'^2+2B_1\sigma'+C_1=0; \tag{58}$$

форма $A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2$ будетъ приведенная. Замѣтимъ, что $B_1{}^2-A_1C_1=B^2-AC$, потому что замѣна σ черезъ $\dfrac{\alpha\sigma'+\beta}{\gamma\sigma'+\delta}$, гдѣ $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, значитъ то же, что замѣна въ формѣ $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ перемѣнныхъ x и y черезъ $\alpha x'+\beta y'$ и $\gamma x'+\delta y'$.

Если неприведенное число σ удовлетворяетъ условіямъ (56), то и σ', полученное одною изъ подстановокъ (55) приведенное число, удовлетворяетъ равенству

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n', & 16t\\ 0, & n''\end{pmatrix}\sigma'=\sigma'; \tag{58′}$$

но здѣсь уже $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ можетъ быть подстановкою и не втораго рода. Дѣйствительно, если удовлетворяется равенство (56), то удовлетворяется и равенство

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n', & 16t\\ 0, & n''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\sigma' = \begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\sigma',$$

если только

$$\sigma = \begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\sigma'.$$

Подѣйствуемъ на обѣ части предпослѣдняго равенства подстановкою, обратною $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$; тогда получимъ

$$\frac{a\sigma'+b}{c\sigma'+d} = \sigma', \quad ad-bc = n.$$

Но предпослѣднее равенство можно всегда представить въ видѣ (58′), ибо n—нечетно. Очевидно, что изъ равенства (56) можно получить только одно равенство (58′) и, наоборотъ, изъ одного равенства (58′) можно получить только одно равенство (56) (здѣсь мы не говоримъ о случаѣ, когда σ можетъ переходить въ себя съ помощью линейнаго преобразованія).

Изъ всего вышеобъясненнаго мы видимъ, что вопросъ приводится къ изученію такихъ равенствъ $A\sigma^2+2B\sigma+C=0$, для которыхъ $Ax^2+2Bxy+Cy^2$—приведенная форма съ отрицательнымъ опредѣлителемъ ξ^2-n. Положимъ еще на время, что A, B, C и ξ не имѣютъ общихъ дѣлителей. Въ § 96 было доказано, что для всякаго такого равенства, если различать равенства съ положительными ξ отъ равенствъ съ отрицательными ξ и не брать двухъ эквивалентныхъ формъ, существуетъ за немногими исключеніями по одной системѣ чиселъ σ, n', n'', t, удовлетворяющихъ равенству (58′) и отличныхъ отъ другихъ системъ чиселъ для другихъ приведенныхъ формъ. Примѣняются ли тутъ случаи исключенія, мы лучше разсмотримъ въ послѣдствіи.

Теперь же разсмотримъ вопросъ слѣдующаго рода: дано равенство $A\sigma^2+2B\sigma+C=0$, въ которомъ σ—число приведенное; это σ замѣняемъ шестью величинами:

$$\sigma,\ -\frac{1}{\sigma},\ \frac{-\sigma}{\sigma-1},\ \frac{-\sigma-1}{\sigma},\ \sigma-1,\ \frac{-1}{\sigma+1}; \tag{59}$$

спрашивается, сколько тогда получится такихъ равенствъ $A\sigma^2 + 2B\sigma + C = 0$, въ которыхъ A и C—нечетны? Если разрѣшимъ этотъ вопросъ и примемъ во вниманіе случаи исключенія, какъ изложенныя въ § 96, такъ и другія, то будемъ знать, сколько различныхъ системъ σ, n', n'', t удовлетворяетъ условіямъ (56); но число такихъ системъ и будетъ равно степени уравненія (12) относительно v^8. Если замѣтимъ, что числа (59)—неэквивалентны относительно модуля два, и вспомнимъ, что классовъ чиселъ эквивалентныхъ относительно двухъ всего—шесть, то можемъ предстоящую задачу выразить иначе такъ: дано равенство $a\sigma^2 + 2b\sigma + c = 0$, въ которомъ σ—приведенное число; сколько существуетъ рѣшеній α, β, γ, δ сравненія $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$ (*mod.* 2), обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что въ уравненіи

$$a(\alpha\sigma + \beta)^2 + 2b(\alpha\sigma + \beta)(\gamma\sigma + \delta) + c(\gamma\sigma + \delta)^2 = 0 \qquad (60)$$

коэффиціентъ при σ^2 и членъ, независящій отъ σ,—нечетны?

Условія, которымъ должны удовлетворять α, β, γ, δ, суть, очевидно, слѣдующія:

$$a\alpha^2 + c\gamma^2 \equiv 1 \ (\textit{mod.}\ 2),\quad a\beta^2 + c\delta^2 \equiv 1 \ (\textit{mod.}\ 2),\quad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \ (\textit{mod.}\ 2).$$

1) Если a и c—четны, то нѣтъ вовсе системъ α, β, γ, δ, удовлетворяющихъ нашимъ требованіямъ.

2) Если a—четно, а c—нечетно, то $\gamma \equiv 1 \equiv \delta$ (*mod.* 2) и двѣ системы α, β, γ, δ удовлетворяютъ нашимъ требованіямъ: $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv 0$ и $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 1$ (*mod.* 2).

3) Если c—четно, а a—нечетно, то опять имѣемъ два рѣшенія: $\alpha \equiv \beta \equiv \delta \equiv 1$, $\gamma \equiv 0$ (*mod.* 2) и $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 1$, $\delta \equiv 0$ (*mod.* 2).

4) Если a и c—нечетны, то имѣемъ слѣдующія два рѣшенія: $\alpha \equiv \delta \equiv 1$ (*mod.* 2), $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ (*mod.* 2) и $\alpha \equiv \delta \equiv 0$, $\beta \equiv \gamma \equiv 1$ (*mod.* 2).

Такимъ образомъ изъ каждаго уравненія $a\sigma^2 + 2b\sigma + c = 0$, въ которомъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ a и c—нечетенъ, отъ замѣны σ черезъ величины (59) получаются всегда два уравненія, могущія быть представленными въ видѣ равенства (56); эти два уравненія даютъ два значенія для σ, σ_1 и σ_2, связанныя, какъ это явствуетъ изъ (55), линейною подстановкою $\sigma_1\sigma_2 = -1$; поэтому эти числа σ_1 и σ_2—различны между собою за

исключеніемъ случая, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = i$, т. е. когда σ—число приведенное, опредѣляемое уравненіемъ $a\sigma^2 + a = 0$.

Разсмотримъ теперь случаи исключенія, о которыхъ говорилось въ § 96. Такъ какъ въ разсматриваемомъ нами вопросѣ n—нечетно, а $\varkappa$—четно, то случаи исключенія, о которыхъ говорилось на 447 страницѣ, тутъ не могутъ имѣть мѣсто. Такъ какъ коэффиціентъ при σ въ разсматриваемыхъ нами уравненіяхъ непремѣнно четенъ, а изъ двухъ другихъ коэффиціентовъ одинъ непремѣнно нечетенъ, то уравненія вида $t\sigma^2 + t\sigma + t = 0$ въ этомъ вопросѣ не могутъ встрѣчаться. Изъ равенства $n = t^2 + t_1^2$ страницы 449 слѣдуетъ, что одно изъ чиселъ t и t_1—четно, а другое—нечетно; поэтому изъ двухъ уравненій $t\sigma^2 + t = 0$ и $t_1\sigma^2 + t_1 = 0$ въ нашемъ настоящемъ изслѣдованіи фигурируетъ только одно. Итакъ исключенія § 96 къ настоящему вопросу непримѣнимы.

Изъ всего вышеприведеннаго легко заключить нижеслѣдующее: пусть для каждаго отрицательнаго опредѣлителя $\xi^2 - n$, въ которомъ ξ равно $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, написаны всѣ неэквивалентныя приведенныя формы $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, въ которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ A и C—нечетенъ и въ которыхъ A, B, C, n не имѣютъ, всѣ четыре разомъ, общихъ дѣлителей; пусть формы вида $Ax^2 + Ay^2$ считаются за половины [1]); степень уравненія (12) относительно v^8—вдвое болѣе числа всѣхъ приведенныхъ формъ $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, удовлетворяющихъ вышеприведеннымъ условіямъ.

Повторяя тѣ же разсужденія относительно преобразованій степени $n : A^2$, придемъ къ подобнымъ же результатамъ. Очевидно, слѣдовательно, что степень уравненія (35) найдется, если удвоимъ число всѣхъ приведенныхъ, неэквивалентныхъ между собою формъ,

[1]) Здѣсь нельзя положить, что какой нибудь корень уравненія (12) произошелъ отъ того, что числа

$$\frac{\xi\sigma - A}{A\sigma + \xi}, \; -1 : \sigma$$

равны при $\sigma = i$. Дѣйствительно, выраженіе $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi, & -A \\ A, & \xi \end{pmatrix}\sigma$ не можетъ быть представлено независимо отъ значенія σ въ видѣ $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n', & 16t \\ 0, & n'' \end{pmatrix}\sigma$ такъ, чтобы удовлетворялись условія $\alpha \equiv \delta \equiv 0$ (*mod.* 2), $\gamma \equiv \beta \equiv 1$ (*mod.* 2).

у которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ крайнихъ коэффиціентовъ нечетенъ, а опредѣлители вида ξ^2-n, гдѣ $\xi^2<n$, $\xi=\ldots-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$; формы вида ax^2+ay^2 должно считать за половины. Если назовемъ нечетное число n черезъ m и будемъ употреблять обозначенія страницы 155, то степень уравненія (35) выразится формулою

$$2F(m)+4F(m-1^2)+4F(m-2^2)+4F(m-3^2)+\ldots\ldots,$$

уменьшенною на число формъ вида ax^2+ay^2 съ опредѣлителями ξ^2-m. Число формъ ax^2+ay^2 равно разности между числомъ дѣлителей m вида $4n+1$ и числомъ дѣлителей m вида $4n+3$; эту разность мы обозначали на страницѣ 153 черезъ $\varphi(m)$. Приравняемъ вновь полученное число, выражающее степень уравненія (35), числу (34):

$$2F(m)+4F(m-1^2)+4F(m-2^2)+\ldots=\Phi(m)+\Psi(m)+\varphi(m);$$

послѣднее равенство уже было выведено въ третьей главѣ и находится тамъ подъ нумеромъ (11).

§ 98. Еще болѣе просто выводится формула (85) третьей главы. Для этого должно обратиться къ величинѣ, называемой Дедекиндомъ—valenz, а Гирстеромъ и Клейномъ—*раціональнымъ инваріантомъ*.

Легко замѣтить, что величина

$$J(\sigma)=\frac{4}{27}\frac{(c^2+\rho)^3(c^2+\rho^2)^3}{c^4(1-c^2)^2}, \tag{61}$$

въ которой ρ обозначаетъ мнимый кубичный корень изъ 1, не измѣняетъ свою величину, какое бы мы ни сдѣлали линейное преобразованіе съ σ. Основываясь на свойствахъ величины c^2, можно также доказать, что $J(\sigma')$ только тогда равно $J(\sigma)$, когда σ' и σ связаны линейнымъ преобразованіемъ.

Будетъ ли n числомъ нечетнымъ или четнымъ, во всякомъ случаѣ Дедекиндъ и за нимъ другіе германскіе ученые доказываютъ существованіе для величины $J(\sigma)$ такихъ же модулярныхъ уравненій, какъ и для модуля c. Приводить въ нашемъ сочиненіи какое

нибудь изъ этихъ доказательствъ неумѣстно; мы должны только яснѣе формулировать это свойство функціи $J(\sigma)$.

Если a, b, c, d не имѣютъ общихъ дѣлителей и если

$$\tau=\frac{a\sigma+b}{c\sigma+d},\ ad-bc=n, \tag{62}$$

то $J(\tau)$ и $J(\sigma)$ связаны уравненіемъ съ цѣлыми коэффиціентами. Уравненіе это не измѣняется, если $J(\tau)$ замѣнить черезъ $J(\sigma)$, а $J(\sigma)$—черезъ $J(\tau)$. Степень этого уравненія какъ относительно $J(\tau)$, такъ и относительно $J(\sigma)$ есть ν, гдѣ ν опредѣляется формулою (18). Число ν равно числу тѣхъ представителей, о которыхъ мы говорили въ § 95. Будемъ это уравненіе писать такъ, полагая $J(\sigma)=J$, $J(\tau)=J'$:

$$f(J',\ J,\ n)=0. \tag{63}$$

Если въ уравненіи (63) положить $J(\tau)=J(\sigma)$, то получимъ уравненіе

$$f(J,\ J,\ n)=0, \tag{64}$$

опредѣляющее всѣ $J(\sigma)$, которыя равны какому нибудь $J(\tau)$. Займемся опредѣленіемъ степени уравненія (64); это опредѣленіе будетъ опять двоякое: алгебраическое и ариѳметическое.

Раздѣлимъ обѣ части уравненія (63) на $J(\tau)^\nu J(\sigma)^\nu$; тогда получимъ уравненіе

$$F\left(\frac{1}{J'},\ \frac{1}{J},\ n\right)=\frac{1}{J'^\nu J^\nu}f(J',\ J,\ n)=0, \tag{65}$$

опредѣляющее $1:J(\tau)$ черезъ $1:J(\sigma)$. Первая часть уравненія (65) состоитъ изъ членовъ вида $a:J'^m J^l$, гдѣ a—нѣкоторое цѣлое число. Опредѣлимъ наименьшую величину $m+l$.

Если выраженіе

$$1:J(\sigma)=\frac{27c^4(1-c^2)^2}{4(c^2+\rho)^3(c^2+\rho^2)^3}$$

развернуть сначала въ рядъ по восходящимъ степенямъ c^2, а потомъ вмѣсто $\sqrt[4]{c}$ подставить безконечный рядъ, выражающій $\sqrt[4]{c}$ че-

резъ q и легко получаемый изъ формулы (15), то увидимъ, что $1:J(\sigma)$ при безконечно-маломъ q измѣняется, слѣдуя формулѣ

$$1:J(\sigma)=1728q^2. \tag{66}$$

Что касается до $1:J(\tau)$, то оно при безконечно-маломъ q будетъ также безконечно-мало, ибо

$$\tau=\frac{A\sigma+B}{D},\ AD=n, \tag{67}$$

и будетъ измѣняться, слѣдуя формулѣ

$$1:J(\tau)=1728e^{\frac{2\pi Bi}{D}}q^{\frac{2A}{D}}. \tag{68}$$

Слѣдовательно, когда $1:J(\tau)$ и $1:J(\sigma)$ дѣлаются безконечно-малыми, то они связаны равенствомъ

$$1:J(\tau)=1728^{(D-A):D}e^{\frac{2\pi Bi}{D}}(1:J(\sigma))^{A:D}. \tag{69}$$

Поэтому къ уравненію (65) можно всецѣло примѣнить анализъ, который въ § 93 примѣненъ къ модулярному уравненію, связывающему u и v; то обстоятельство, что n здѣсь можетъ быть и четнымъ, нисколько не измѣнитъ разсужденія § 93. Слѣдовательно наименьшая величина $m+l$ опредѣлится формулами (26) и (27).

Умножимъ обѣ части уравненія (65) на $J'^{\nu}J^{\nu}$; тогда членъ, у котораго $m+l$ наименьшее, обратится въ членъ $aJ'^{m}J^{l}$, у котораго $m+l$ наибольшее. Очевидно, это наибольшее $m+l$ опредѣлится формулами (30) и (30'). Итакъ степень уравненія (64) опредѣлится формулами (30) и (30').

Повторимъ тѣ же разсужденія для такаго модулярнаго уравненія (63), у котораго n замѣнено черезъ $n:d^2$; тогда уже въ формулахъ (67) A, B и D имѣютъ съ n общій наибольшій дѣлитель d. Разсуждая также, какъ на страницахъ 437 и 438, увидимъ, что степень уравненія

$$\prod f\left(J, J, \frac{n}{d^2}\right)=0 \tag{70}$$

есть $\Phi(n)+\Psi(n)$, исключая случай, когда n—полный квадратъ.

Приступимъ теперь къ ариѳметическому опредѣленію степени уравненія (70), при чемъ позволимъ себѣ выражаться пократче.

Такъ какъ $J(\sigma)$ не измѣняется отъ линейнаго преобразованія σ, то можемъ предположить, что σ—величина приведенная.

Очевидно, $J(\sigma)$ только въ такомъ случаѣ будетъ корнемъ уравненія (64), когда какое нибудь τ, опредѣляемое равенствами (67) (A, B и D не имѣютъ общихъ дѣлителей), связано съ σ какимъ нибудь линейнымъ преобразованіемъ. Такъ какъ всякое линейное преобразованіе можетъ быть отнесено на любое изъ связанныхъ чиселъ τ и σ, то для всякаго корня уравненія (64), $J(\sigma)$, число σ опредѣлится изъ уравненія вида

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A, & B\\ 0, & D\end{pmatrix}\sigma=\frac{a\sigma+b}{c\sigma+d}=\sigma,\ ad-bc=n, \tag{71}$$

въ которомъ a, b, c и d не имѣютъ общихъ дѣлителей, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Итакъ для каждаго корня уравненія (64) будетъ приведенное число σ, опредѣляемое квадратнымъ уравненіемъ

$$c\sigma^2+(d-a)\sigma-b=0. \tag{72}$$

Замѣтимъ здѣсь кстати, что форма $2cx^2+2(d-a)xy-2by^2$—приведенная и что опредѣлитель этой формы есть отрицательное число

$$(d+a)^2-4n=\varkappa^2-4n; \tag{73}$$

при этомъ четыре числа c, $d-a$, b и n не имѣютъ общихъ дѣлителей.

Положимъ, что P, Q, R и n не имѣютъ общихъ дѣлителей; спрашивается, сколько для каждаго возможнаго уравненія

$$P\sigma^2+Q\sigma+R=0, \tag{74}$$

въ которомъ σ—приведенное число, а $Q^2-4PR=\varkappa^2-4n$, $\varkappa^2<4n$, можно составить уравненій вида (71)? Этотъ вопросъ уже разрѣшенъ въ § 96, и намъ остается только внимательнѣе разсмотрѣть случаи исключенія. Именно мы видѣли, что для каждаго уравненія (74) будетъ одна, отличная въ большинствѣ случаевъ отъ другихъ,

система чиселъ σ, A, B, D, если различать уравненія (74), для которыхъ $\varkappa$—положительно, отъ уравненій (74), для которыхъ $\varkappa$ —отрицательно.

Замѣтимъ, что отъ одной системы чиселъ σ, A, B, D не могутъ происходить два корня уравненія (64). Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ одновременно удовлетворялись бы равенства $J=J'$, $J+dJ=J'+dJ'$. Поэтому уравненію (71) удовлетворяли бы и σ, и $\sigma+d\sigma$; т. е. кромѣ уравненія (74) мы имѣли бы еще

$$2P\sigma+Q=0;$$

но σ не можетъ быть дѣйствительно.

Итакъ, за немногими исключеніями, изложенными въ § 96, каждое уравненіе (74) при данномъ $\varkappa$ дастъ одинъ корень $J(\sigma)$ уравненія (64).

Изъ § 96 ясно, что два уравненія $a\sigma^2+a=0$ и $a_1\sigma^2+a_1=0$, для которыхъ $a^2+a_1^2=n$, дадутъ одни и тѣ же корни уравненія (64); поэтому уравненія вида $a\sigma^2+a=0$ должны считаться за половины при вычисленіи степени уравненія (64); исключеніе составляетъ случай $n=2$, $\varkappa=\pm 2$, когда оба уравненія $a\sigma^2+a=0$ и $a_1\sigma^2+a_1=0$ сливаются. Но еще прежде въ § 96 сказано, что при $n=2$ представитель $\begin{pmatrix}A, B\\0, D\end{pmatrix}\sigma$ въ равенствѣ (49″) для случая $\varkappa=+2$ не отличается отъ такаго же представителя для случая $\varkappa=-2$. Вслѣдствіе этого каждое уравненіе $a\sigma^2+a=0$, въ которомъ a не имѣетъ общихъ дѣлителей съ n, должно считаться за $\frac{1}{2}$.

Изъ § 96 ясно, что за исключеніемъ одного случая при $n=3$ всѣ уравненія вида $a\sigma^2+a\sigma+a=0$, въ которыхъ a не имѣетъ общихъ дѣлителей съ n, раздѣляются на группы изъ трехъ уравненій, дающихъ одни и тѣ же корни уравненія (64). При $n=3$ два изъ уравненій, для которыхъ $\varkappa=3$, сливаются; но въ такомъ случаѣ, какъ это было сказано еще прежде въ § 96, въ равенствѣ (49″) представитель $\begin{pmatrix}A, B\\0, D\end{pmatrix}\sigma$—одинъ и тотъ же какъ для случая $\varepsilon=+1$, такъ и для случая $\varepsilon=-1$. Слѣдовательно при счетѣ степени уравненія (64)

всѣ формы $2ax^2 + 2axy + 2ay^2$, въ которыхъ a—число первое съ n, должны считаться за $\frac{1}{3}$.

Итакъ *число корней уравненія (64) равно числу классовъ такихъ квадратичныхъ формъ* $2Px^2 + 2Qxy + 2Ry^2$ *съ отрицательными опредѣлителями*

$$D = \varkappa^2 - 4n (\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

въ которыхъ P, Q *и* R *не имѣютъ общихъ дѣлителей съ* n, *при чемъ классы формъ, къ которымъ принадлежатъ формы* $ax^2 + ay^2$, *считаются за* $\frac{1}{2}$, *а классы формъ, къ которымъ принадлежатъ формы* $ax^2 + axy + ay^2$, *считаются за* $\frac{1}{3}$.

То же самое разсужденіе можно повторить, замѣнивъ въ (63) и (64) n черезъ $n : A^2$, гдѣ $n : A^2$—цѣлое число, не равное 1. Поэтому степень уравненія (70), если n—не квадратъ, опредѣлится формулою $\Sigma M(4n - \varkappa^2)$; употребляемъ обозначенія страницы 186.

Вспоминая число, найденное для степени уравненія (70) алгебраическимъ путемъ, получаемъ равенство

$$\Sigma M(4n - \varkappa^2) = \Phi(n) + \Psi(n), \tag{75}$$

которое уже выведено на страницѣ 186 этого сочиненія; въ формулѣ (75) n—не квадратъ.

Но и въ томъ случаѣ, когда n—квадратъ, можно употреблять формулу (75), если только положить, что $M(0) = -\frac{1}{12}$. Дѣйствительно, если n—квадратъ и если въ уравненіи (70) не брать $n = d^2$, то степень уравненія (70) будетъ $\Phi(n) + \Psi(n) - 1$; но въ такомъ случаѣ и въ первой части равенства (75) не должно считать тѣхъ формъ $2Px^2 + 2Qxy + 2Ry^2$, у которыхъ P, Q и R дѣлятся на $\sqrt{n}$; такихъ формъ, неэквивалентныхъ, приведенныхъ, только двѣ: $2x^2\sqrt{n} + 2y^2\sqrt{n}$, $2x^2\sqrt{n} + 2xy\sqrt{n} + 2y^2\sqrt{n}$. Слѣдовательно, когда n—полный квадратъ, то вторую часть равенства (75) должно уменьшить на единицу, а первую на $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} = \frac{7}{6} + 2M(0)$. Если счи-

тать $M(0)=-\frac{1}{12}$, то, очевидно, обѣ части равенства (75) можно не измѣнять. Итакъ равенство (75) вѣрно и въ томъ случаѣ, когда n—квадратъ, если только полагать $M(0)=-\frac{1}{12}$.

§ 99. Предъидущаго достаточно, чтобы понять какимъ образомъ формулы Кронекера выводятся изъ теоремъ теоріи модулярныхъ уравненій; еще болѣе ясно это будетъ послѣ изложенія главныхъ принциповъ, на которыхъ основаны выводы формулъ Гирстера. Къ сожалѣнію, объемъ статьи не дозволяетъ намъ вполнѣ изложить главныя основанія работъ, помѣщенныхъ Гирстеромъ въ XVII, XXI и XXII томахъ Mathem. Annalen, herausg. von Klein und Mayer, и относящихся къ занимающему насъ вопросу; мы ограничимся изложеніемъ помѣщеннаго въ XXI томѣ, первой тетради. Замѣтимъ кстати, что съ точки зрѣнія Гирстера формулы Кронекера суть формулы 2, 4, 8, 16 ступеней (J. Gierster, 75 страница первой тетради 17 тома Mathem. Annalen).

Въ § 94 мы уже объясняли, что такое—числа σ, эквивалентныя относительно p; легко дать другое опредѣленіе для этихъ чиселъ. Два числа σ и σ' будутъ называться эквивалентными относительно p, если

$$\sigma'=\begin{pmatrix}1+\mu p, & \nu p\\ \rho p, & 1+\mu' p\end{pmatrix}\sigma,\quad (1+\mu p)(1+\mu' p)-\nu\rho p^2=1. \tag{76}$$

Дѣйствительно, если

$$\alpha\equiv(-1)^\lambda\alpha',\ \beta\equiv(-1)^\lambda\beta',\ \gamma\equiv(-1)^\lambda\gamma',\ \delta\equiv(-1)^\lambda\delta'\ (mod.\ p),$$

то

$$\begin{pmatrix}\delta, & -\beta\\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\sigma=\begin{pmatrix}1+\mu p, & \nu p\\ \rho p, & 1+\mu' p\end{pmatrix}\sigma. \tag{76'}$$

Далѣе мы будемъ подразумѣвать подъ p *первоначальное, нечетное число.*

Клейнъ въ XVII томѣ своихъ Математическихъ Анналъ (1 тетрадь, стр. 65), а также и въ другихъ томахъ этого журнала (XII, XIV, XV) доказываетъ слѣдующее: для даннаго числа p всегда можно найти *полную систему т* функцій σ (*модулей*)

$$\mu_1(\sigma),\ \mu_2(\sigma),\ \mu_3(\sigma),\ldots\ldots\ldots\mu_m(\sigma),\qquad(77)$$

связанныхъ между собою $m-1$ равенствами. Эти модули не измѣняются только при замѣнѣ σ числомъ, эквивалентнымъ относительно p. Если σ'—неэквивалентно σ относительно p, то не могутъ разомъ удовлетворяться равенства:

$$\mu_1(\sigma')=\mu_1(\sigma),\ \mu_2(\sigma')=\mu_2(\sigma),\ \mu_3(\sigma')=\mu_3(\sigma),\ldots\mu_m(\sigma')=\mu_m(\sigma).\ (78)$$

Если σ'—эквивалентно σ, но не относительно p, то $\mu_1(\sigma')$, $\mu_2(\sigma')$, ... $\mu_m(\sigma')$ выражаются линейно черезъ величины $\mu_1(\sigma)$, $\mu_2(\sigma)$, ... $\mu_m(\sigma)$. Наконецъ всегда можно сдѣлать такъ, что всѣ величины (77) обращаются въ безконечность при $\sigma=\infty.i$. Если $m=1$, то получаемъ то, что Клейнъ называетъ *главнымъ модулемъ* (Hauptmodul); такой главный модуль можно найти для $p=3$ и $p=5$. И для другихъ нечетныхъ p существуютъ главные модули; но эти главные модули не принадлежатъ къ группѣ модулей (77). Для $p=3$ *главный модуль* будетъ *тетраэдрическая ирраціональность*; эта величина есть корень $x_1:x_2$ уравненія

$$J(\sigma)=-64\,\frac{(x_1^4-x_1x_2^3)^3}{(8x_1^3x_2+x_2^4)^3};$$

$x_1:x_2$ можно выразить слѣдующимъ образомъ черезъ модуль $q=e^{\pi\sigma i}$:

$$\frac{x_1}{x_2}=-\frac{1}{6}q^{-\frac{2}{3}}\frac{1+5q^2-7q^4-11q^{10}+13q^{14}+17q^{24}-19q^{30}\ldots\ldots\ldots}{1-3q^6+5q^{18}-7q^{36}+\ldots\ldots}.\ (79)$$

Для $p=5$ главнымъ модулемъ будетъ *икосаэдрическая ирраціональность*, которую Клейнъ изображаетъ черезъ $\eta_1:\eta_2$;

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=-q^{-\frac{2}{5}}\frac{-1+q^{10}+q^{20}-q^{50}+\ldots\ldots}{-1+q^2-q^4+q^8+q^{22}-q^{30}+\ldots}.\qquad(80)$$

(Klein. Elliptische Functionen und Gleichungen fünften Grades, стр. 154, 157 и 158 тома XIV, 2-ой тетради Mathem. Annalen). Для $p=7$ Клейнъ даетъ въ XVII томѣ Математическихъ Анналъ, какъ полную систему модулей (77), два отношенія $\lambda:\mu:\nu$, связанныя равенствомъ $\lambda^3\mu+\mu^3\nu+\nu^3\lambda=0$.

Пусть положительное цѣлое число n *не дѣлится на* p. Положимъ, что

$$\tau=\frac{a\sigma+b}{c\sigma+d},\ ad-bc=n, \tag{81}$$

$$\tau'=\frac{a'\sigma+b'}{c'\sigma+d'},\ a'd'-b'c'=n; \tag{81'}$$

положимъ, что a, b, c и d не имѣютъ, всѣ четыре разомъ, общаго дѣлителя; то же положимъ и объ a', b', c' и d'. Будемъ на время полагать a', b', c' и d' постоянными, а a, b, c и d перемѣнными. Пусть a при своемъ измѣненіи остается всегда сравнимымъ, по модулю p, съ нѣкоторымъ постояннымъ числомъ; то же положимъ и о b, c и d. Спрашивается, можно ли найти такія числа a, b, c и d, чтобы тождественно

$$\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\sigma=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a', & b'\\ c', & d'\end{pmatrix}\sigma,\ \alpha\delta-\beta\gamma=1? \tag{82}$$

Вслѣдствіе (47) можемъ положить $c'=0$, $a'=A$, $b'=B$, $d'=D$; тогда, чтобы удовлетворить равенству (82) независимо отъ σ, должно положить

$$\alpha=\frac{Da}{n},\ \beta=\frac{Ab-Ba}{n},\ \gamma=\frac{Dc}{n},\ \delta=\frac{Ad-Bc}{n}. \tag{83}$$

Напомнимъ, что a, b, c и d удовлетворяютъ сравненію

$$ad-bc\equiv n\ (mod.\ p). \tag{84}$$

Изъ равенствъ (83) заключаемъ, что a и c должны дѣлиться на A. Такъ какъ A не дѣлится на p, то всегда можно найти такія числа a_1 и c_1, что

$$Aa_1\equiv a\ (mod.\ p),\ Ac_1\equiv c\ (mod.\ p).$$

Поэтому всегда можно положить $a=Aa_1$ и $c=Ac_1$, гдѣ a_1 и c_1 сравнимы съ опредѣленными числами по модулю p. Такъ какъ D не дѣлится на p, то всегда можно найти b_1 и d_1 изъ сравненій:

$$Db_1 \equiv b - Ba_1 \ (mod.\ p),\ Dd_1 \equiv d - Bc_1 \ (mod.\ p);$$

поэтому всегда можно положить $b - Ba_1 = Db_1$, $d - Bc_1 = Dd_1$. Изъ равенствъ (83) выводимъ $\alpha = a_1$, $\beta = b_1$, $\gamma = c_1$, $\delta = d_1$, а изъ сравненія (84)

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \ (mod.\ p), \tag{85}$$

при чемъ α, β, γ и δ сравнимы только, по модулю p, съ нѣкоторыми опредѣленными числами. Изъ двухъ чиселъ α и β одно не дѣлится на p; пусть α не дѣлится на p; тогда α и β можно придать такія значенія, что α и β будутъ числами первыми между собою и что $\alpha \equiv a_1$, $\beta \equiv b_1$ $(mod.\ p)$. Пусть $\gamma_0 \equiv c_1$ $(mod.\ p)$. Уравненіе $\alpha\delta - \beta p x = 1 + \gamma_0 \beta$ непремѣнно будетъ имѣть одно рѣшеніе: $\delta = \delta_0 + \beta p t$, $x = x_0 + \alpha t$, гдѣ t—неопредѣленное, а δ_0 и x_0—опредѣленныя числа. Но при данныхъ α, β, γ рѣшеніе для δ въ сравненіи (85) одно; слѣдовательно $\delta_0 \equiv d_1$ $(mod.\ p)$. Итакъ изъ найденнаго рѣшенія сравненія (85) всегда найдется рѣшеніе уравненія $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Такимъ образомъ доказана возможность равенствъ (82) въ томъ случаѣ, если впередъ данныя величины a, b, c и d удовлетворяютъ сравненію (84).

Положимъ, что двѣ подстановки (81) и (81′) удовлетворяютъ сравненіямъ:

$$a \equiv (-1)^\lambda a',\ b \equiv (-1)^\lambda b',\ c \equiv (-1)^\lambda c',\ d \equiv (-1)^\lambda d' \ (mod.\ p). \tag{86}$$

Тогда могутъ быть два случая. Обѣ подстановки могутъ удовлетворять тождественно какимъ нибудь равенствамъ вида (82); въ такомъ случаѣ подстановка $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ непремѣнно вида (76). Но можетъ быть и такъ, что подстановки $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix}$ не могутъ тождественно удовлетворять равенствамъ вида (82). Въ первомъ случаѣ будемъ называть подстановки (81) и (81′) эквивалентными, во второмъ—неэквивалентными. Пусть a', b', c', d' имѣютъ опредѣленныя значенія; всѣхъ неэквивалентныхъ подстановокъ (81), удовлетворяющихъ сравненіямъ (86), всегда будетъ

$$\nu = n \prod \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \sum \frac{\delta}{T} \varphi(T); \tag{87}$$

въ формулѣ (87) произведеніе должно распространять на всѣ первоначальные дѣлители m числа n, а сумму—на всѣ дѣлители δ числа n, при чемъ T есть общій наибольшій дѣлитель δ и $n:\delta$, а $\varphi(T)$ означаетъ число положительныхъ цѣлыхъ чиселъ, первыхъ съ T и меньшихъ T. Дѣйствительно, представимъ всѣ представители преобразованій n—ой степени формулою

$$\tau''=\frac{A\sigma+Bp}{D}; \qquad (88)$$

тогда, какъ извѣстно, различныя τ'' будутъ неэквивалентны, если различныя B—не сравнимы по модулю D. Но изъ τ'' можно получить линейнымъ преобразованіемъ τ, опредѣляемое (81); слѣдовательно изъ каждаго представителя (88) можно получить *представитель преобразованія n—ой степени вида* (81), въ которомъ a, b, c и d удовлетворяютъ (86). Далѣе мы будемъ безъ оговорокъ говорить о *представителяхъ* (81), подразумѣвая, что a, b, c и d удовлетворяютъ (86).

Положимъ, что составлена нѣкоторая система ν *представителей* (81). Если къ σ будемъ примѣнять всевозможныя преобразованія n—ой степени изъ системы (81), то система модулей (77) будетъ измѣняться, и мы изъ системы (77) получимъ ν различныхъ системъ *преобразованныхъ модулей*

$$\mu'_1=\mu_1(\tau),\ \mu'_2=\mu_2(\tau),\ \mu'_3=\mu_3(\tau),\dots\dots\mu'_m=\mu_m(\tau). \qquad (89)$$

При измѣненіи σ мѣняется система (77), мѣняется τ, мѣняется и система (89). Такимъ образомъ между первоначальною системою модулей $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots\dots\mu_m$ и преобразованными системами модулей (89) устанавливается *соотвѣтствіе*, по которому каждымъ опредѣленнымъ значеніямъ модулей (77) *соотвѣтствуетъ* ν системъ преобразованныхъ модулей (89). Такъ какъ σ получается также изъ τ преобразованіемъ n—ой степени, характеризованнымъ нѣкоторыми сравненіями, то каждой системѣ (89) *соотвѣтствуетъ* ν системъ (77).

Сравненіе (84) имѣетъ $p(p^2-1)$ рѣшеній; это доказывается также, какъ и то, что $\alpha\delta-\beta\gamma\equiv1$ $(mod.\ p)$ имѣетъ $p(p^2-1)$ рѣшеній. Поэтому *соотвѣтствій* между первоначальными модулями (77) и

преобразованными модулями (89) будетъ $\frac{1}{2}p(p^2-1)$. Если дано одно *соотвѣтствіе*, то всѣ другія получатся, если оставлять σ неизмѣннымъ, а τ подвергать $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ линейнымъ, неэквивалентнымъ относительно p, преобразованіямъ.

Если $m=1$, то $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ соотвѣтствія обращаются въ $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ модулярныя уравненія, которыя всѣ—степени ν какъ относительно первоначальнаго, такъ и преобразованнаго главныхъ модулей.

Будемъ опять разсматривать только одно *соотвѣтствіе*. Если σ замѣнимъ черезъ $\begin{pmatrix}\delta, & -\beta\\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}\sigma'$, гдѣ $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, то τ, опредѣляемое (81), будетъ равно $\begin{pmatrix}a_1, & b_1\\ c_1, & d_1\end{pmatrix}\sigma'$, гдѣ a_1, b_1, c_1 и d_1 могутъ быть и не сравнимы по модулю p съ $(-1)^\lambda a$, $(-1)^\lambda b$, $(-1)^\lambda c$ и $(-1)^\lambda d$. Вспомнивъ равенства (82), мы заключаемъ, что есть такая линейная подстановка $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$, съ помощью которой мы опять получимъ подстановку n-ой степени $\begin{pmatrix}a'', & b''\\ c'', & d''\end{pmatrix}$, коэффиціенты которой сравнимы по модулю p съ $(-1)^\lambda a$, $(-1)^\lambda b$, $(-1)^\lambda c$, $(-1)^\lambda d$. Въ такомъ случаѣ $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\tau=\begin{pmatrix}a'', & b''\\ c'', & d''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma$. Итакъ для каждой подстановки $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ всегда найдется такая линейная подстановка $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$, что $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma$ и $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\tau$ будутъ связаны тѣмъ же *соотвѣтствіемъ*, что σ съ τ. Очевидно, α', β', γ' и δ' имѣютъ относительно модуля p опредѣленныя значенія, зависящія отъ α β, γ, δ.

Очевидно, при нѣкоторыхъ значеніяхъ σ первоначальная система модулей (77) можетъ быть тождественна съ какою нибудь изъ ν преобразованныхъ системъ модулей (89), такъ что

$$\mu_1(\sigma)=\mu_1(\tau),\ \mu_2(\sigma)=\mu_2(\tau),\ldots\ \ldots\mu_m(\sigma)=\mu_m(\tau). \qquad (90)$$

Число всѣхъ такихъ *совпаденій* системъ (77) и (89) для одного и того же *соотвѣтствія* можно опредѣлить двумя способами: ариѳметическимъ и алгебраическимъ; отъ этого двоякаго опредѣленія однихъ и тѣхъ же чиселъ и получаются формулы Гирстера.

§ 100. Очевидно, равенства (90) только тогда возможны, когда σ и τ—эквивалентны относительно p. Если τ опредѣляется (81), то мы имѣемъ, какъ слѣдствіе (90), равенство (всѣ линейныя преобразованія относимъ къ τ):

$$\begin{pmatrix} 1+\mu p, & \nu p \\ \rho p, & 1+\mu' p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\sigma = \begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix}\sigma = \sigma. \qquad (91)$$

Равенство (91) даетъ намъ

$$P_1\sigma^2 + Q_1\sigma + R_1 = 0, \qquad (92)$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 \equiv (-1)^\lambda c,\ Q_1 \equiv (-1)^\lambda (d-a),\ R_1 \equiv -(-1)^\lambda b, \\ \varepsilon\varkappa \equiv (-1)^\lambda (a+d)\ (mod.\ p), \end{aligned}\right\} \qquad (92')$$

гдѣ $Q^2_1 - 4P_1R_1 = \varkappa^2 - 4n$, а ε равно или $+1$, или -1; λ должно выбирать такъ, чтобы послѣднее изъ сравненій (92′) было вѣрно.

Такъ какъ модули (77) при всѣхъ линейныхъ преобразованіяхъ получаютъ только $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ различныхъ значеній, то можно полагать, что σ въ (92) или—приведенное число, или получается изъ приведеннаго числа $\frac{1}{2}p(p^2-1)-1$ выбранными линейными преобразованіями, неэквивалентными относительно p. Напомнимъ, что всякое линейное преобразованіе можно разсматривать, какъ состоящее изъ одного изъ *избранныхъ* $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ *преобразованій* и изъ преобразованія вида (76).

Если изъ σ, опредѣляемаго уравненіемъ (92), найдемъ линейнымъ преобразованіемъ *приведенное число* σ_1, то σ_1 можетъ оказаться или конечною величиною, или $\infty . i$; въ этомъ параграфѣ мы будемъ полагать σ_1, а стало быть, и $J(\sigma)$ конечными. σ_1 опредѣлится равенствомъ

$$P\sigma^2_1 + Q\sigma_1 + R = 0\ (\varepsilon\varkappa), \qquad (93)$$

въ которомъ $\varkappa^2$—то же, что и въ (92). P, Q, R и n не имѣютъ, всѣ четыре разомъ, общихъ дѣлителей. Такъ какъ и изъ равенства (92), и изъ равенства (93) можно получить по большей части два равенства (91), то мы будемъ отличать равенство (93), въ которомъ $\varepsilon=+1$, отъ равенства (93), въ которомъ $\varepsilon=-1$. Итакъ каждому *совпаденію* (90) соотвѣтствуетъ равенство вида (93); если узнаемъ, изъ скольких различныхъ *совпаденій* получается одно и то же равенство (93), то и узнаемъ число всѣхъ совпаденій (90).

Если σ_1 не равно i или $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, то число совпаденій (90), изъ которыхъ получается одно и то же равенство (93) и одно и то же $\varepsilon\varkappa$, равно числу g тѣхъ изъ *избранныхъ* $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ *линейныхъ преобразованій* σ_1 въ σ, которыя изъ (93) даютъ (92), удовлетворяющія (92′); g можетъ равняться нулю. Дѣйствительно, равенство (93) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\tau_1=\sigma_1=\frac{\frac{1}{2}(-Q+\varepsilon\varkappa)\sigma_1-R}{P\sigma_1+\frac{1}{2}(Q+\varepsilon\varkappa)}; \tag{93′}$$

при этомъ $J(\tau_1)=J(\sigma_1)$. Равенство (93′) можно представить въ видѣ

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\tau_1=\frac{a\sigma_1+b}{c\sigma_1+d} \tag{93″}$$

только однимъ способомъ, если $\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\sigma$ *подстановка-представитель* вида (81). Пусть мы производимъ надъ σ_1 одно изъ избранныхъ $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ преобразованій; изъ предъидущаго извѣстно, что всегда найдется такая линейная подстановка $\begin{pmatrix}\alpha'', & \beta''\\ \gamma'', & \delta''\end{pmatrix}$, что числа

$$\sigma=\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\sigma_1, \quad =\begin{pmatrix}\alpha'', & \beta''\\ \gamma'', & \delta''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\tau_1 \tag{94}$$

связаны *подстановкою—представителемъ* вида (81). Совпаденіе (90) будетъ только тогда, когда σ и τ связаны подстановкою (76); въ такомъ случаѣ мы получимъ равенство вида (91), а также и равенство (92). Что для однихъ и тѣхъ же σ и τ не могутъ быть два совпаденія, слѣдуетъ изъ того, что въ обоихъ случаяхъ μ, μ', ν, ρ, a, b, c и d будутъ одинаковы (см. (91)), между тѣмъ какъ σ имѣетъ мнимую часть. Производя надъ σ_1 $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ линейныхъ преобразованій, мы получимъ g величинъ σ, для которыхъ существуютъ совпаденія; всѣ, такъ полученныя, g паръ σ и τ можно получить изъ одной пары, примѣняя къ σ и τ эквивалентныя относительно p линейныя подстановки (это слѣдуетъ изъ (94)). Всѣ g величинъ σ будутъ различны. Итакъ одному совпаденію $J(\tau_1)=J(\sigma_1)$ соотвѣтствуютъ g совпаденій (90), и болѣе g совпаденій соотвѣтствовать не могутъ.

Не то будетъ, если $\sigma_1=i$. Въ такомъ случаѣ $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ величинъ, получаемыхъ изъ σ_1 избранными подстановками, будутъ эквивалентны попарно относительно p. Дѣйствительно, всегда можно найти такія $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и δ_1 при данныхъ α, β, γ и δ, что $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma= \begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\sigma$; при этомъ подстановка $\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}$ не эквивалентна $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ относительно p. Вслѣдствіе предъидущаго различныхъ системъ (77) при линейныхъ преобразованіяхъ σ будетъ только $\frac{1}{4}p(p^2-1)$; поэтому σ въ равенствахъ (92) должно получаться изъ σ_1 только $\frac{1}{4}p(p^2-1)$ линейными преобразованіями. Выше было доказано, что число $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}i$ не измѣняется отъ дѣйствія надъ нимъ подстановкою

$$\begin{pmatrix}r, & s\\ t, & -r\end{pmatrix}\sigma=\begin{pmatrix}\alpha\gamma+\beta\delta, & -\alpha^2-\beta^2\\ \gamma^2+\delta^2, & -\alpha\gamma-\beta\delta\end{pmatrix}\sigma,\ \alpha\delta-\beta\gamma=1; \qquad (95)$$

поэтому, если $\sigma=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}i$ удовлетворяетъ какимъ нибудь формуламъ (92) и (92′), то и всякое число, эквивалентное относительно p числу $\begin{pmatrix}r, & s\\ t, & -r\end{pmatrix}\sigma$, удовлетворяетъ нѣкоторымъ формуламъ (92) и (92′). Итакъ всѣ g подстановки, дающія изъ (93) равенства (92), удовлетворяющія (92′), попарно даютъ одну и ту же систему модулей (77); поэтому изъ $\frac{1}{4}p(p^2-1)$ подстановокъ, выбранныхъ для случая $\sigma_1=i$, только $\frac{1}{2}g$ подстановокъ даютъ уравненія (92), удовлетворяющія (92′). Однако заключать, что равенству (93) при данномъ $\varepsilon\varkappa$ соотвѣтствуютъ только $\frac{1}{2}g$ совпаденій (90), здѣсь нельзя, ибо въ этомъ случаѣ разсужденіе, немедленно слѣдующее за (94) равенствами, невѣрно. Въ случаѣ $\sigma_1=i$, σ и τ, для которыхъ существуетъ совпаденіе (90), могутъ быть связаны не только подстановкою (76), но и подстановкою

$$\begin{pmatrix}1+\mu p, & \nu p\\ \rho p, & 1+\mu' p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r, & s\\ t, & -r\end{pmatrix}. \tag{96}$$

Равенство (92) можно представить въ слѣдующихъ двухъ видахъ:

$$\sigma=\frac{a\sigma+b}{c\sigma+d},\ \sigma=\frac{-d\sigma+b}{c\sigma-a}; \tag{97}$$

слѣдовательно уравненіе (92) опредѣляетъ такое σ, для котораго одно изъ τ, опредѣляемыхъ формулами

$$\tau=\frac{a\sigma+b}{c\sigma+d},\ \tau=\frac{-d\sigma+b}{c\sigma-a}, \tag{98}$$

эквивалентно σ относительно p. σ можетъ быть связано подстановкою (96) съ тѣмъ или другимъ изъ (98); но, связывая σ съ однимъ изъ (98), мы должны помнить, что въ равенствѣ (91) коэффиціенты a, b, c и d удовлетворяютъ нѣкоторымъ сравненіямъ.

Поэтому *совпаденій* (90) получится или $\frac{1}{2}g$, или g, смотря по тому, удовлетворяютъ ли коэффиціенты одного изъ преобразованій

$$\begin{pmatrix} r, & s \\ t, & -r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\sigma, \quad \begin{pmatrix} r, & s \\ t, & -r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d, & b \\ c, & -a \end{pmatrix}\sigma \tag{99}$$

тѣмъ же сравненіямъ съ модулемъ p, что и коэффиціенты a, b, c и d.

Коэффиціенты первой изъ подстановокъ (99) не могутъ удовлетворять тѣмъ же сравненіямъ съ модулемъ p, что и a, b, c, d. Дѣйствительно, допуская возможность вышесказаннаго, получимъ четыре сравненія, изъ которыхъ слѣдуетъ $r\equiv(-1)^\lambda$ и $r\equiv-(-1)^\lambda$ $(mod.\ p)$. Итакъ разсмотримъ сравненія:

$$-rd+sc\equiv(-1)^\lambda a\ (mod.\ p),\quad rb-sa\equiv(-1)^\lambda b\ (mod.\ p),$$

$$-td-rc\equiv(-1)^\lambda c\ (mod.\ p),\quad tb+ra\equiv(-1)^\lambda d\ (mod.\ p);$$

изъ этихъ сравненій выводимъ

$$\left.\begin{aligned} nr&\equiv-(-1)^\lambda(a^2+bc)\ (mod.\ p),\ ns\equiv-(-1)^\lambda b(a+d)\ (mod.\ p),\\ nr&\equiv(-1)^\lambda(d^2+bc)\ (mod.\ p),\ nt\equiv-(-1)^\lambda c(a+d)\ (mod.\ p).\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Чтобы сравненія (100) могли удовлетворяться, необходимо, чтобы

$$a^2+d^2+2bc\equiv0\ (mod.\ p). \tag{101}$$

Условіе (101) не только необходимо, но и достаточно. Дѣйствительно, если (101) удовлетворено, то изъ (100) опредѣлятся такія r, s и t, что

$$r^2+st\equiv-1\ (mod.\ p),\quad \frac{(a^2+bc)\sigma+b(a+d)}{c(a+d)\sigma+d^2+bc}=\sigma.$$

Итакъ только въ случаѣ, когда

$$\varkappa^2\equiv2n\ (mod.\ p), \tag{102}$$

будетъ g совпаденій для равенства $P\sigma^2_1+P=0$ при данномъ $\varkappa$; иначе будетъ $\frac{1}{2}g$ совпаденій.

Мы знаемъ однако, что равенства вида $P\sigma^2+P=0$ по двое даютъ одни и тѣ же совпаденія $J(\sigma)=J(\tau)$; для такой пары равенствъ $\varkappa^2+\varkappa_1^2=4n$. Вообще $\varkappa^2$ не сравнимо съ $\varkappa_1^2$ по модулю p; а потому при разсмотрѣ *совпаденій* (90) придется обыкновенно имѣть дѣло съ однимъ только изъ равенствъ. Только въ томъ случаѣ, когда $\varkappa^2\equiv\varkappa_1^2\equiv2n$ (*mod. p*), придется разсматривать оба равенства. Поэтому заключаемъ: *равенства* $P\sigma_1^2+P=0$ *должно всегда считать за половины при опредѣленіи числа совпаденій* (90).

Анализъ, совершенно сходный съ предъидущимъ,указалъ бы намъ, что *равенства* $P\sigma_1^2+P\sigma_1+P=0$ *при счетѣ совпаденій (90) должно считать за трети.*

Перейдемъ теперь къ опредѣленію числа g. Изъ $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ выбранныхъ линейныхъ подстановокъ

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma \tag{103}$$

сколько удовлетворяютъ сравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}P\alpha^2+Q\alpha\gamma+R\gamma^2&\equiv(-1)^\lambda c\ (mod.\ p),\\ 2P\alpha\beta+Q(\alpha\delta+\beta\gamma)+2R\gamma\delta&\equiv(-1)^\lambda(d-a)\ (mod.\ p),\\ P\beta^2+Q\beta\delta+R\delta^2&\equiv-(-1)^\lambda b\ (mod.\ p),\\ \varepsilon\varkappa&\equiv(-1)^\lambda(a+d)\ (mod.\ p)?\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Въ сравненіяхъ (104) ε есть опредѣленная величина, а $\varkappa$—положительно.

Если $P\equiv Q\equiv R\equiv0$ (*mod. p*), то сравненіямъ (10) можно только удовлетворить въ томъ случаѣ, когда

$$c\equiv d-a\equiv b\equiv0\ (mod.\ p),\ \varkappa^2\equiv4n\ (mod.\ p^2). \tag{105}$$

Но если (105) удовлетворены, то всѣ подстановки (103) дадутъ *совпаденія* (90). Наоборотъ, если удовлетворены (105), то только равенства (93), для которыхъ P, Q и R дѣлятся на p, дадутъ *совпаденія* (90). Въ сравненіяхъ (104) величина λ опредѣляется величиною ε; поэтому, если не различать случаи $\varepsilon=+1$ и $\varepsilon=-1$,

то *совпаденій* (90) будетъ или 0, или $p(p^2-1)$. Замѣтимъ, что форму $2Px^2+2Qxy+2Ry^2$, въ которой P, Q и R дѣлятся на p, можно замѣнить формою $\frac{2P}{p}x^2+\frac{2Q}{p}xy+\frac{2R}{p}y^2$ при счетѣ совпаденій. Будемъ впредь обозначать черезъ $M'(r)$ *число неэквивалентныхъ приведенныхъ формъ вида* $2Px^2+2Qxy+2Ry^2$ *съ опредѣлителемъ* $-r=Q^2-4PR$, *у которыхъ* P, Q *и* R *не имѣютъ общаго дѣлителя съ* n. Изъ предъидущаго ясно: если удовлетворяются условія (105), то *совпаденій* (90) будетъ

$$p(p^2-1)\sum_{l_1} M'\left(\frac{4n-l_1^2}{p^2}\right), \tag{106}$$

гдѣ l_1—всякое *положительное* число, меньшее $\sqrt{4n}$, для котораго $l_1^2\equiv 4n$ (*mod.* p^2).

Пусть теперь условія (105) не соблюдены. Здѣсь нельзя положить, что P, Q и R, всѣ три, дѣлятся на p. Такъ какъ намъ требуется узнать, сколько классовъ чиселъ α, β, γ, δ относительно модуля p, для которыхъ удовлетворяются сравненія (104) и $\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1$ (*mod.* p), то равенство (93) можемъ всегда замѣнить равенствомъ, опредѣляющимъ σ, не приведенное, но эквивалентное σ_1; поэтому всегда можемъ полагать, что P не дѣлится на p. Сравненія (104) можно замѣнить слѣдующими:

$$\left.\begin{aligned}
&(-1)^\lambda P\equiv c\delta^2-(d-a)\gamma\delta-b\gamma^2 \ (mod.\ p),\\
&(-1)^\lambda Q+d-a\equiv -2c\beta\delta+2(d-a)\alpha\delta+2b\alpha\gamma \ (mod.\ p),\\
&(-1)^\lambda Q-d+a\equiv -2c\beta\delta+2(d-a)\beta\gamma+2b\alpha\gamma \ (mod.\ p),\\
&(-1)^\lambda R\equiv c\beta^2-(d-a)\alpha\beta-b\alpha^2 \ (mod.\ p),\\
&\alpha\delta-\beta\gamma\equiv 1 \ (mod.\ p),\ \varepsilon\varkappa\equiv(-1)^\lambda(a+d) \ (mod.\ p).
\end{aligned}\right\} \tag{107}$$

Легко доказать, что сравненія (107) удовлетворятся, если удовлетворятся сравненія:

$$\left.\begin{aligned}
&2(-1)^\lambda P\alpha\equiv 2c\delta-\{(-1)^\lambda Q+d-a\}\gamma \ (mod.\ p),\\
&2(-1)^\lambda P\beta\equiv 2b\gamma-\{(-1)^\lambda Q-d+a\}\delta \ (mod.\ p),\\
&\varepsilon\varkappa\equiv(-1)^\lambda(d+a) \ (mod.\ p);
\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

$$(-1)^\lambda P \equiv c\delta^2-(d-a)\gamma\delta-b\gamma^2 \ (mod.\ p). \qquad (109)$$

Величина λ опредѣляется изъ послѣдняго изъ (108); если поэтому γ и δ удовлетворяютъ (109), то α и β найдутся однозначно изъ (108). Итакъ дѣло въ анализѣ сравненія (109).

Пусть $\Delta=4n-\varkappa^2$. Разсмотримъ два случая.

1-ый случай. Если Δ *дѣлится на* p, то или c, или b не дѣлится на p; пусть c не дѣлится на p. Сравненіе (109) можно тогда написать такъ:

$$4(-1)^\lambda Pc \equiv \{2c\delta-(d-a)\gamma\}^2 \ (mod.\ p). \qquad (110)$$

Если $(-1)^\lambda Pc$—невычетъ, то (110) вовсе не имѣетъ рѣшеній. Если же $(-1)^\lambda Pc$—вычетъ, то (110) удовлетворяютъ $2p$ системъ чиселъ γ и δ, ибо для каждаго γ найдемъ двѣ величины δ. Но отъ одновременнаго измѣненія знаковъ у α, β, γ и δ линейное преобразованіе (103) не мѣняется; слѣдовательно для опредѣленнаго ε равенство (93) дастъ p совпаденій (90).

Если $p\equiv 1$ $(mod.\ 4)$ и $\left(\dfrac{c}{p}\right)=+1$, то для тѣхъ равенствъ (93), для которыхъ $\left(\dfrac{P}{p}\right)=-1$, вовсе не будетъ совпаденій, въ случаѣ же $\left(\dfrac{P}{p}\right)=+1$ будетъ $2p$ совпаденій: p для $\varepsilon=+1$ и p для $\varepsilon=-1$. Если же $\left(\dfrac{c}{p}\right)=-1$, то для $\left(\dfrac{P}{p}\right)=-1$ будетъ $2p$ совпаденій, а для $\left(\dfrac{P}{p}\right)=+1$ вовсе не будетъ. Будемъ означать черезъ $M'_{+1}(r)$ и $M'_{-1}(r)$ числа такихъ классовъ формъ $2Px^2+2Qxy+2Ry^2$, которые характеризуются равенствами $\left(\dfrac{P}{p}\right)=+1$ и $\left(\dfrac{P}{p}\right)=-1$, у которыхъ опредѣлитель $-r$ и коэффиціенты P, Q и R не имѣютъ, всѣ три разомъ, общихъ дѣлителей ни съ n, ни съ p. Изъ предъидущаго заключаемъ: въ разсматриваемомъ случаѣ число совпаденій (90), для которыхъ $J(\sigma)$—конечно, будетъ равно одной изъ двухъ формулъ:

$$2p\Sigma M'_{+1}(4n-l^2),\ 2p\Sigma M'_{-1}(4n-l^2), \qquad (111)$$

въ которыхъ $l^2 < 4n$, $l^2 \equiv 4n$ (*mod. p*), l—положительно. Первую изъ формулъ (111) должно употреблять при $\left(\frac{c}{p}\right) = +1$, а вторую—при $\left(\frac{c}{p}\right) = -1$ (если c дѣлится на p, то, очевидно, c должно замѣнить b).

Если $p \equiv 3$ (*mod.* 4), то при одномъ изъ значеній $(-1)^\lambda$ число $(-1)^\lambda Pc$—вычетъ, при другомъ—невычетъ; слѣдовательно въ этомъ случаѣ всѣ равенства (93), у которыхъ P, Q и R не всѣ дѣлятся на p, при $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$ дадутъ p совпаденій. Итакъ въ этомъ случаѣ совпаденій будетъ ($J(\sigma)$—конечно)

$$p\left\{\sum M'(4n-l^2) - \sum M'\left(\frac{4n-l_1^{\,2}}{p^2}\right)\right\}, \qquad (112)$$

$$l^2 < 4n,\ l^2 \equiv 4n\ (mod.\ p),\ l_1^{\,2} < 4n,\ l_1^{\,2} \equiv 4n\ (mod.\ p^2); \qquad (112')$$

l и l_1—положительны.

2-ой случай. Δ *не дѣлится на* p. Если $b \equiv c \equiv 0$ (*mod. p*), то для данныхъ λ и γ сравненіе (109) дастъ одно рѣшеніе для δ, исключая случай $\gamma \equiv 0$ (*mod. p*). Такъ какъ одновременное измѣненіе знаковъ у α, β, γ и δ не измѣняетъ подстановки (103), то равенство (93) для $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$ дастъ $p-1$ совпаденій (90). Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ всегда $\left(\frac{-\Delta}{p}\right) = +1$. Если $\varkappa^2$ дѣлится на p, но не равно 0, то совпаденій будетъ $2(p-1)$.

Пусть теперь c не дѣлится на p; тогда

$$4(-1)^\lambda Pc \equiv \{2c\delta - (d-a)\gamma\}^2 + \Delta\gamma^2\ (mod.\ p). \qquad (113)$$

Мы всегда можемъ опредѣлить x и y изъ сравненій:

$$4(-1)^\lambda Pcx \equiv -\Delta\ (mod.\ p),\ 4(-1)^\lambda Pcy \equiv 1\ (mod.\ p); \qquad (114)$$

поэтому сравненіе (113) можно написать такъ:

$$1 + x\gamma^2 \equiv y\{2c\delta - (d-a)\gamma\}^2\ (mod\ p). \qquad (115)$$

Будемъ подъ α', α'', α''',......, β', β'', β''',...... подразумѣвать то же, что на страницѣ 358. Будемъ полагать $0 \leqq \gamma < \frac{1}{2}p$.

1) Пусть y и x—вычеты. Если $\gamma=0$, то изъ (115) получаемъ два значенія для δ; изъ этихъ двухъ значеній δ беремъ только одно, которое характеризуется неравенствами $0<\delta<\frac{1}{2}p$. Если $p\equiv1$ (*mod.* 4), то можно положить $1+x\gamma^2\equiv0$ (*mod.* p), и это дастъ намъ одну подстановку (103). Остальныя подстановки (103) найдутся, если изъ ряда чиселъ

$$1+\alpha',\ 1+\alpha'',\ 1+\alpha''',\ldots\ldots. \qquad (116)$$

будемъ брать только вычеты и приравнивать ихъ $1+x\gamma^2$; каждый изъ вычетовъ (116) дастъ двѣ подстановки (103). Принимая во вниманіе страницы 359 и 360 нашего сочиненія, видимъ, что въ разбираемомъ случаѣ для опредѣленнаго λ будетъ $\frac{1}{2}(p-1)$ подстановокъ (103), дающихъ совпаденія (90).

2) Пусть y и x—невычеты. Если $p\equiv3$ (*mod.* 4), то мы имѣемъ одно рѣшеніе, соотвѣтствующее $1+x\gamma^2\equiv0$ (*mod.* p). Остальныя рѣшенія для опредѣленнаго λ найдутся, если приравнивать $1+x\gamma^2$ невычетамъ ряда

$$1+\beta',\ 1+\beta'',\ 1+\beta''',\ldots\ldots; \qquad (117)$$

каждый невычетъ дастъ двѣ подстановки (103). Вслѣдствіе теоремъ страницъ 359 и 360, и здѣсь совпаденій (90) для даннаго $(-1)^\lambda$ будетъ $\frac{1}{2}(p-1)$.

3) Пусть y—невычетъ, а x—вычетъ. Если $p\equiv1$ (*mod.* 4), то одно рѣшеніе получится изъ $1+x\gamma^2\equiv0$ (*mod.* p). Остальныя подстановки (103), удовлетворяющія (104), получатся по двѣ, когда мы $1+x\gamma^2$ будемъ приравнивать невычетамъ (116). Вслѣдствіе теоремъ страницъ 359 и 360, здѣсь подстановокъ (103), удовлетворяющихъ (104) при данномъ λ, будетъ $\frac{1}{2}(p+1)$.

4) Пусть y—вычетъ, а x—невычетъ. Если $p\equiv3$ (*mod.* 4), то будетъ одно рѣшеніе отъ сравненія $1+x\gamma^2\equiv0$ (*mod.* p). Одна подстановка (103) всегда получится отъ предположенія $\gamma=0$. Остальныя рѣшенія получатся отъ вычетовъ ряда (117). Страницы 359

и 360 убѣждаютъ насъ, что для опредѣленнаго λ здѣсь получатся $\frac{1}{2}(p+1)$ совпаденій (90).

Если $a+d$ не дѣлится на p, то для даннаго ε можно взять только одно значеніе $(-1)^\lambda$, и слѣдовательно въ такомъ случаѣ $g=\frac{1}{2}\left(p-\left(\frac{-\Delta}{p}\right)\right)$. Но если $a+d\equiv 0$, $\varkappa^2\equiv 0$ (*mod.* p), то для даннаго ε можно брать и $(-1)^\lambda=+1$, и $(-1)^\lambda=-1$, и слѣдовательно въ такомъ случаѣ $g=p-\left(\frac{-\Delta}{p}\right)$.

Итакъ въ этомъ *второмъ случаѣ всѣхъ совпаденій* (90), для которыхъ $J(\sigma)$—конечно, будетъ

$$\left\{p-\left(\frac{-\Delta}{p}\right)\right\}\sum M'(4n-h^2_m), \tag{118}$$

$$m\equiv h_m\equiv a+d \ (mod.\ p),\ h^2_m<4n. \tag{118'}$$

Въ формулѣ (118) h_m означаетъ всякое число, положительное, отрицательное, нуль, удовлетворяющее условіямъ (118′).

Анализъ, примѣненный нами къ преобразованіямъ n—ой степени, легко примѣняется къ преобразованіямъ степени $n:h^2$.

Обозначимъ черезъ $M_{+1}(n)$ и $M_{-1}(n)$ число всѣхъ классовъ формъ $2Px^2+2Qxy+2Ry^2$ съ опредѣлителемъ $-n$, которые характеризуются однимъ изъ равенствъ: $\left(\frac{P}{p}\right)=+1$, $\left(\frac{P}{p}\right)=-1$; будемъ полагать $M_{+1}(0)=M_{-1}(0)=0$. Обозначимъ черезъ различныя z число *совпаденій* (90) при $J(\sigma)$ конечномъ въ томъ случаѣ, когда разсматриваются всѣ преобразованія степеней $n:h^2$. Придерживаясь обозначеній Гирстера, пишемъ z_m, если Δ не дѣлится на p и $m\equiv a+d$ (*mod.* p); если $\Delta\equiv 0$ (*mod.* p), $c\equiv d-a\equiv b\equiv 0$ (*mod.* p), то пишемъ z_∞; если $\Delta\equiv 0$ (*mod.* p), но c не дѣлится на p, то пишемъ z^{+1}_∞, z^{-1}_∞, z'_∞, первое для $p\equiv 1$ (*mod.* 4), $\left(\frac{c}{p}\right)=+1$, второе—для $p\equiv 1$ (*mod.*4), $\left(\frac{c}{p}\right)=-1$, третье—при $p\equiv 3$ (*mod.* 4) (z^{+1}_∞, z^{-1}_∞ и z'_∞ пишемъ также при $\Delta\equiv 0$ (*mod.* p), если b не дѣлится на p). Легко вывести слѣдующія формулы:

$$z_m=\left\{p-\left(\frac{-\Delta}{p}\right)\right\}\sum M(4n-h^2_m),\qquad(119)$$

$$z_\infty=p(p^2-1)\sum M\left(\frac{4n-l^2_1}{p^2}\right);\qquad(120)$$

$$z^{+1}_\infty=2p\Sigma M_{+1}(4n-l^2),\ z^{-1}_\infty=2p\Sigma M_{-1}(4n-l^2),\qquad(121)$$

$$z'_\infty=p\left\{\sum M(4n-l^2)-\sum M\left(\frac{4n-l^2_1}{p^2}\right)\right\};\qquad(121')$$

h_m, l и l_1 означаютъ то же, что въ формулахъ (118), (112), (111) и (106).

§ 101. Перейдемъ къ опредѣленію числа *совпаденій* (90) въ томъ случаѣ, когда $J(\sigma)=J(\tau)=\infty$.

Если въ выраженіи $\sigma=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma_1$, въ которомъ $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, положимъ $\sigma_1=\infty.i$, а γ не равнымъ 0, то получимъ $\sigma=\frac{\alpha}{\gamma}$; такимъ образомъ всѣ числа, эквивалентныя $\infty.i$, суть раціональныя дроби, если мнимыя ихъ части—не безконечны. Относительно p два числа $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\infty.i$ и $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\infty.i$ эквивалентны, если $(-1)^\lambda\alpha\equiv\alpha'$, $(-1)^\lambda\gamma\equiv\gamma'(mod.p)$. Дѣйствительно, пусть α', β', γ' и δ'—опредѣленныя числа, а β и δ измѣняются, оставаясь сравнимыми по модулю p съ данными числами; въ такомъ случаѣ всегда найдется такое число t, что

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma=\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pm1, & t\\ 0, & \pm1\end{pmatrix}\sigma,\ \alpha\delta-\beta\gamma=1,\ \alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1;\ (122)$$

но числа $\sigma\pm t$ при $\sigma=\infty.i$ эквивалентны относительно p. Изъ предъидущаго видимъ, что между числами $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\infty.i$ будетъ только $\frac{1}{2}(p^2-1)$ чиселъ, неэквивалентныхъ относительно p.

Пусть τ получается изъ σ какимъ нибудь преобразованіемъ n—ой степени; пусть σ_1 *число приведенное* и $\tau_1=\frac{A\sigma_1+B}{D}$, гдѣ $AD=n$.

Если $J(\tau_1)=J(\sigma_1)=\infty$, то $\sigma_1=\infty . i$. Всякое совпаденіе $J(\tau)=J(\sigma)=\infty$ получится, если надъ σ_1 и τ_1 произвести какія нибудь линейныя преобразованія $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}$ и положить $\sigma_1=\infty . i$, тогда σ и τ будутъ эквивалентны. Но чтобы σ и τ были эквивалентны относительно p, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись два сравненія: $\alpha\equiv(-1)^{\lambda'}\alpha_1 \ (mod.\ p)$, $\gamma\equiv(-1)^{\lambda'}\gamma_1 \ (mod.\ p)$. Чтобы, кромѣ того, было совпаденіе (90), числа

$$\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\sigma_1; \quad \begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A, & B\\ 0, & D\end{pmatrix}\sigma_1 \tag{123}$$

должны быть эквивалентны относительно p при всякомъ σ_1 (a, b, c и d означаютъ то же, что въ (81)); но для этого необходимо удовлетворить сравненіямъ:

$$a\alpha+b\gamma\equiv(-1)^{\lambda}A\alpha \ (mod.\ p),\ c\alpha+d\gamma\equiv(-1)^{\lambda}A\gamma \ (mod.\ p). \tag{124}$$

Сравненія (124) — достаточны, ибо сравненія

$$a\beta+b\delta\equiv(-1)^{\rho}(B\alpha_1+D\beta_1),\ c\beta+d\delta\equiv(-1)^{\rho}(B\gamma_1+D\delta_1) (mod.\ p)$$

всегда удовлетворятся приличнымъ выборомъ β_1 и δ_1 (или выборомъ B при данныхъ β_1 и δ_1); выбрать β_1 и δ_1 всегда можно, потому что D не дѣлится на p. Если (124) будутъ удовлетворены, то σ и τ будутъ эквивалентны $\frac{\alpha}{\gamma}$ относительно p.

Сравненія (124) совмѣстны только въ томъ случаѣ, когда

$$(a-(-1)^{\lambda}A)(d-(-1)^{\lambda}A)-bc\equiv0 \ (mod.\ p). \tag{125}$$

Помня, что $n=AD$, легко выводимъ изъ сравненія (125)

$$m\equiv a+d\equiv(-1)^{\lambda}(A+D) \ (mod.\ p); \tag{126}$$

если $a+d$ не дѣлится на p, то изъ двухъ значеній $(-1)^{\lambda}$ будетъ фигурировать для извѣстнаго разложенія $n=AD$ только одно.

Сколько же системъ чиселъ α и γ изъ $\frac{1}{2}(p^2-1)$ системъ удовлетворяютъ (124) при данномъ A?

1) Если $a \equiv d$, $b \equiv c \equiv 0$ $(mod.\ p)$, то или вовсе нѣтъ α и γ, удовлетворяющихъ (124), или всѣ $\frac{1}{2}(p^2-1)$ системъ α и γ удовлетворяютъ (124). Послѣднее будетъ только въ случаѣ, когда $A \equiv D$ $(mod.\ p)$.

2) Если $\Delta = 4n - \varkappa^2 \equiv 0$ $(mod.\ p)$, но одно изъ чиселъ b или c не дѣлится на p, то опять возможны *совпаденія* (90) только при $A \equiv D$ $(mod.\ p)$. Если послѣднее условіе удовлетворено, то въ сравненіяхъ (124) одно изъ чиселъ α или γ можно будетъ приравнивать числамъ $1, 2, 3, \ldots\ldots p-1$, между тѣмъ какъ другое будетъ опредѣляться изъ сравненій (124). Итакъ для даннаго A будетъ $\frac{1}{2}(p-1)$ системъ чиселъ α и γ.

3) Если—Δ—квадратичный невычетъ, то сравненія (124) ни въ какомъ случаѣ не имѣютъ рѣшеній. Дѣйствительно, $A+D \equiv \pm\varkappa (mod. p)$; слѣдовательно $(2A \mp \varkappa)^2 \equiv -\Delta$ $(mod.\ p)$.

4) Пусть $-\Delta \equiv f^2$ $(mod.\ p)$; тогда

$$(-1)^{\lambda} 2A \equiv m \pm f,\quad (-1)^{\lambda} 2D \equiv m \mp f \ (mod.\ p). \tag{127}$$

Сравненія (124) въ этомъ случаѣ примутъ видъ:

$$(d - a \pm f)\alpha \equiv 2b\gamma,\quad 2c\alpha \equiv (a - d \pm f)\gamma \ (mod.\ p). \tag{128}$$

Такъ какъ четыре коэффиціента при α и γ не могутъ разомъ дѣлиться на p, то, беря передъ f опредѣленный знакъ, можемъ придать одному изъ чиселъ α или γ произвольное значеніе (1, 2, 3,...$p-1$); тогда другое изъ чиселъ имѣетъ только одно значеніе относительно модуля p. Слѣдовательно, беря оба знака передъ f, получимъ $p-1$ значеній $\frac{\alpha}{\gamma}$.

До сихъ поръ мы полагали, что между нѣкоторыми полными системами первоначальныхъ и преобразованныхъ модулей существуетъ нѣкоторое *соотвѣтствіе*; далѣе мы будемъ полагать, что существуютъ главные модули $\mu(\sigma)$ и $\mu(\tau)$, связанные нѣкоторымъ уравненіемъ; степень этого уравненія ν (см. формулу (87)) какъ относительно $\mu(\tau)$, такъ и относительно $\mu(\sigma)$.

Такъ какъ предполагается, что модуль $\mu(\sigma_1)$ дѣлается безконечнымъ при $\sigma_1 = \infty . i$, то это $\mu(\sigma_1)$ можно представить въ видѣ ря-

да по восходящимъ степенямъ $q = e^{\sigma_1 \pi i}$, гдѣ σ_1—приведенное число: тогда при приближеніи σ_1 къ $\infty . i$ модуль $\mu(\sigma_1)$ выразится формулою

$$\mu(\sigma_1) = cq^{-\rho} = ce^{-\rho\sigma_1 \pi i}, \tag{129}$$

гдѣ ρ—нѣкоторое положительное число, а c—постоянное, не равное нулю. Если будемъ придавать σ значенія, безконечно мало отличающіяся отъ $\frac{\alpha}{\gamma}$, гдѣ γ—не нуль, то $\mu(\sigma)$ опять можно представить въ видѣ ряда по восходящимъ степенямъ q; при этомъ въ этомъ новомъ рядѣ отрицательныхъ показателей q не будетъ. Если r есть величина, къ которой приближается $\mu(\sigma)$, когда σ приближается къ $\frac{\alpha}{\gamma}$, то для σ, безконечно мало отличающагося отъ $\frac{\alpha}{\gamma}$, будемъ имѣть

$$\mu(\sigma) - r = Ce^{\varepsilon\sigma_1 \pi i} = Cq^{\varepsilon}, \tag{130}$$

гдѣ ε—нѣкоторое положительное число, C же—постоянное, не равное нулю.

Положимъ теперь, что въ уравненіи, опредѣляющемъ $\mu(\tau)$ черезъ $\mu(\sigma)$, сдѣлано $\mu(\sigma) = \mu(\tau)$. Сколько корней, равныхъ r, окажется въ такъ полученномъ уравненіи? Если въ равенствѣ (130) σ замѣняемъ черезъ τ, опредѣляемое однимъ изъ представителей (81), для котораго существуетъ совпаденіе, то σ_1 замѣнится черезъ $\tau_1 = \frac{A\sigma_1 + B}{D}$, и слѣдовательно при σ, безконечно мало отличающемся отъ $\frac{\alpha}{\gamma}$,

$$\mu(\tau) - r = Ce^{\frac{B\varepsilon\pi i}{D}} q^{A\varepsilon : D}\ ; \ \mu(\tau) - r = C^{(D-A):D} e^{\frac{B\varepsilon\pi i}{D}} \{\mu(\sigma) - r\}^{A:D}. \tag{131}$$

Такъ какъ $\mu(\sigma) - r$ при σ, отличающемся (безконечно мало) отъ $\frac{\alpha}{\gamma}$, не можетъ имѣть одинаковыхъ значеній при двухъ величинахъ σ, неэквивалентныхъ относительно p, то $\mu(\tau) - r$ получаетъ $\frac{D}{T}\varphi(T)$ различныхъ значеній, когда B измѣняется; здѣсь T означаетъ общій наибольшій дѣлитель A и D.

$\mu(\tau)-r$ можетъ равняться нулю при различныхъ значеніяхъ A и D; при этомъ формулы страницъ 480 и 481 указываютъ на то, что $\mu(\tau)=r$ и въ томъ случаѣ, когда A и D помѣняются ролями. Расположимъ дроби $\frac{A}{D}$, для которыхъ могутъ существовать (131), по порядку такъ, чтобы меньшія дроби предшествовали большимъ:

$$\frac{A'}{D'}, \frac{A''}{D''}, \frac{A'''}{D'''}, \ldots\ldots\ldots \frac{D'''}{A'''}, \frac{D''}{A''}, \frac{D'}{A'}. \tag{132}$$

Будемъ употреблять обозначенія:

$$\mu(\tau)-r=u,\quad \mu(\sigma)-r=v. \tag{133}$$

Модулярное уравненіе, опредѣляющее $\mu(\tau)$ черезъ $\mu(\sigma)$, можно преобразовать такъ, что оно будетъ опредѣлять u черезъ v. Положимъ въ преобразованномъ такимъ образомъ уравненіи $v=0$; тогда получимъ уравненіе, у котораго будетъ $\frac{D'}{T'}\varphi(T')+\frac{D''}{T''}\varphi(T'')+\ldots$ $\ldots+\frac{A'}{T'}\varphi(T')$ корней, равныхъ нулю. Положимъ $u=u_0 v^{A':D'}$; подставивъ въ уравненіе, опредѣляющее u черезъ v, вмѣсто u послѣднее произведеніе и раздѣливъ обѣ части равенства на нисшую степень v, положимъ $v=0$; тогда уравненіе, опредѣляющее u_0, будетъ имѣть $\frac{D'}{T'}\varphi(T')$ корней конечныхъ, $\frac{D''}{T''}\varphi(T'')+\ldots+\frac{A'}{T'}\varphi(T')$ корней нулевыхъ, а остальные корни—безконечны. Отсюда заключаемъ, что въ уравненіи, состоящемъ изъ членовъ $Nu^m v^l$, существуютъ члены, для которыхъ

$$\left.\begin{aligned} &l=l'=0,\ m=m'=\frac{D'}{T'}\varphi(T')+\frac{D''}{T''}\varphi(T'')+\ldots\ldots+\frac{A'}{T'}\varphi(T'),\\ &l=l''=\frac{A'}{T'}\varphi(T'),\ m=m''=\frac{D''}{T''}\varphi(T'')+\ldots\ldots+\frac{A'}{T'}\varphi(T'),\end{aligned}\right\} \tag{134}$$

и что для всѣхъ членовъ $Nu^m v^l$

$$l+m\frac{A'}{D'}\geqq m'\frac{A'}{D'}=l''+m''\frac{A'}{D'}. \tag{135}$$

Если положимъ $u=u_1 v^{A'':D''}$, то докажемъ существованіе членовъ, для которыхъ

$$\left.\begin{aligned} l=l'''&=\frac{A'}{T'}\varphi(T')+\frac{A''}{T''}\varphi(T''),\\ m=m'''&=\frac{D'''}{T'''}\varphi(T''')+\ldots\ldots+\frac{A'}{T'}\varphi(T').\end{aligned}\right\}\quad(136)$$

Продолжая эти разсужденія, вполнѣ сходныя съ разсужденіями § 93, докажемъ, что наименьшая величина $m+l$ въ нашемъ уравненіи есть

$$\zeta=2\sum\frac{A}{T}\varphi(T)+o\varphi(\sqrt{n}),\qquad(137)$$

гдѣ o равно 1 или 0, смотря по тому, входитъ ли въ рядъ дробей (132) 1, или нѣтъ; сумма въ (137) распространяется на всѣ такія A изъ ряда (132), которыя менѣе $n:A=D$.

Въ разсматриваемомъ уравненіи, состоящемъ изъ членовъ $Nu^m v^l$, сдѣлаемъ $u=v$; тогда въ этомъ уравненіи окажется множитель v^ζ. Отсюда заключаемъ, что уравненіе, получаемое изъ модулярнаго положеніемъ $\mu(\sigma)=\mu(\tau)$, имѣетъ ζ корней, равныхъ r.

Замѣтимъ, что и въ случаѣ несуществованія модулярнаго уравненія легко доказать существованіе ζ *совпаденій*, для которыхъ $\sigma=\frac{\alpha}{\gamma}$, $\mu(\sigma)=\mu(\tau)=r$. Допуская совпаденія, для которыхъ $\mu(\sigma)=\mu(\tau)=\infty$, мы легко распространимъ формулу (137) и на случай, когда $\gamma=0$, $\sigma=\infty.i$.

Производя тотъ же анализъ, который дѣлали для n, для преобразованій степени $n:h^2$, легко придемъ къ заключенію, что всѣхъ совпаденій $\mu(\sigma)=\mu(\tau)=r$, если допускать общихъ дѣлителей для a, b, c и d въ формулахъ (81),

$$2U=2\Sigma A+o\sqrt{n},\quad A<\sqrt{n},\qquad(138)$$

гдѣ A взято изъ ряда (132).

Допустимъ на время *совпаденія* $\mu(\sigma)=\mu(\tau)=\infty$. Будемъ обозначать черезъ y_m, y_∞, y_∞^{+1}, y_∞^{-1}, y'_∞ то, что получится изъ z_m, z_∞,

$z_{\infty}^{\pm 1}$, z_{∞}^{-1}, z'_{∞}, если къ этимъ послѣднимъ числамъ прибавимъ совпаденія при $J(\sigma)=J(\tau)=\infty$, существующія въ данномъ случаѣ. Будемъ при U въ формулѣ (138) ставить внизу значекъ s, при чемъ

$(-1)^{\lambda}A\equiv s\ (mod.\ p)$, также $\pm\sqrt{n}\equiv s\ (mod.\ p)$, если $o=1$ въ (138).

Положимъ $t^2\equiv n\ (mod.\ p)$. Вспоминая предъидущія разсужденія, выводимъ слѣдующія формулы:

$$\Delta\equiv 0\ (mod.\ p),\ \left\{\begin{aligned} y_{\infty}=z_{\infty}+(p^2-1)U_t,\ y'_{\infty}=z'_{\infty}+(p-1)U_t,\\ y_{\infty}^{\pm 1}=z_{\infty}^{\pm 1}+(p-1)U_t;\end{aligned}\right\} \quad (139)$$

$$\left(\frac{-\Delta}{p}\right)=-1,\quad y_m=z_m; \quad (140)$$

$$\left(\frac{-\Delta}{p}\right)=+1,\ y_m=z_m+(p-1)\{U_{\frac{1}{2}(f+m)}+U_{\frac{1}{2}(f-m)}\}; \quad (141)$$

въ формулѣ (141) $\frac{1}{2}(f+m)$ и $\frac{1}{2}(f-m)$ предполагаются цѣлыми числами.

Если существуютъ модулярныя уравненія, опредѣляющія $\mu(\tau)$ черезъ $\mu(\sigma)$, то простымъ перемноженіемъ можно составить уравненіе

$$f(\mu(\tau),\ \mu(\sigma))=0, \quad (142)$$

въ которомъ τ опредѣляется (81) при допущеніи общихъ дѣлителей у a, b, c и d. Степень уравненія (142) какъ относительно $\mu(\tau)$, такъ и относительно $\mu(\sigma)$ равна (см. формулу (87))

$$\sum_{\delta}\frac{\delta}{T}\left[\sum_{s}\varphi\left(\frac{T}{s}\right)\right]=\sum\delta=\Phi(n). \quad (143)$$

Степень уравненія

$$f(\mu(\sigma),\ \mu(\sigma))=0 \quad (144)$$

опредѣлится, если изъ одного изъ y, опредѣляемыхъ (141), (140) и (139), вычтемъ всѣ допущенныя нами совпаденія $\mu(\sigma)=\mu(\tau)=\infty$.

§ 102. Требуется опредѣлить степень уравненія (142) алгебраическимъ путемъ.

Если при $\mu(\sigma)=\infty$ ни одинъ изъ корней уравненія (142) не обращается въ ∞, то степень (144) равна $2\Phi(n)$. Дѣйствительно, дѣля обѣ части уравненія (142) на $\mu(\tau)^{\Phi(n)}\mu(\sigma)^{\Phi(n)}$, получимъ уравненіе, опредѣляющее $1:\mu(\tau)=u$ черезъ $1:\mu(\sigma)=v$. Когда $v=0$, то это уравненіе приметъ видъ $Gu^{\Phi(n)}+Hu^{\Phi(n)-1}+\ldots+B_1=0$, гдѣ B_1—не нуль. Слѣдовательно въ уравненіи (142) существуетъ членъ $B_1\mu(\tau)^{\Phi(n)}\mu(\sigma)^{\Phi(n)}$.

Пусть теперь для нѣкоторыхъ разложеній $n=AD$ $\mu(\tau)=\mu(\sigma)=\infty$, если $\sigma=\infty.i$, а τ—одинъ изъ представителей (81). Расположимъ всѣ дроби $\frac{A}{D}$, для которыхъ существуютъ такія совпаденія, въ рядъ (132). Положимъ, что мы получили уравненіе

$$F(u,\ v)=0,\quad 1:\mu(\tau)=u,\quad 1:\mu(\sigma)=v, \tag{145}$$

когда раздѣлили обѣ части уравненія (142) на $\mu(\tau)^{\Phi(n)}\mu(\sigma)^{\Phi(n)}$.

Поставимъ въ (145) $u_0v^{A':D'}$ вмѣсто u, раздѣлимъ обѣ части уравненія на нисшую степень v; тогда при $v=0$ получимъ уравненіе, у котораго D' корней конечныхъ, $D''+D'''+\ldots\ldots+A''+A'$ корней нулевыхъ, остальные корни—безконечны; слѣдовательно въ уравненіи, опредѣляющемъ u_0 при $v=0$, будутъ два члена, содержащіе u_0 въ степеняхъ $D'+D''+\ldots+A''+A'$ и $D''+\ldots+A''+A'$ Если все уравненіе (145) состоитъ изъ членовъ Nu^mv^l, то

$$l+m\frac{A'}{D'}\geqq\frac{A'}{D'}(D'+D''+\ldots A''+A')$$

$$=A'+\frac{A'}{D'}(D''+\ldots+A''+A').\ ^{1)} \tag{146}$$

Поставимъ въ (145) $u_1v^{A'':D''}$ вмѣсто u и раздѣлимъ обѣ части уравненія на нисшую степень v; тогда, полагая $v=0$, получимъ уравненіе съ D'' конечными корнями, съ $D'''+\ldots+A''+A'$

¹) Если въ (145) сдѣлаемъ $v=0$, то окажется членъ $Nu^{D'+D''+\ldots+A''+A'}$.

корнями нулевыми и съ остальными—безконечными. Отсюда заключаемъ, что

$$l+m\frac{A''}{D''} \geqq A'+A''+\frac{A''}{D''}(D'''+\ldots+A''+A'). \quad (147)$$

Полагаемъ $u=u_2 v^{A''':D'''}$ и такъ далѣе. Такимъ образомъ мы докажемъ существованіе въ уравненіи (145) такихъ членовъ, для которыхъ

$$\left.\begin{array}{l} m=D'+D''+\ldots+A',\ m=D''+D'''+\ldots+A', \\ \qquad m=D'''+\ldots+A''+A',\ldots\ldots, \\ l=0, \qquad l=A', \qquad l=A'+A'',\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (148)$$

Очевидно, наименьшее $m+l$ въ членахъ (148) будетъ

$$m+l=2\Sigma A+o\sqrt{n}, \quad (149)$$

гдѣ A и o означаютъ то же, что и въ (137), (138).

Легко доказать, что выраженіе (149) будетъ наименьшее $m+l$ для всѣхъ членовъ уравненія (145); это слѣдуетъ изъ неравенствъ (146), (147) и такъ далѣе и изъ другихъ неравенствъ, получаемыхъ когда въ уравненіи (145) послѣдовательно замѣняемъ v черезъ $v_0 u^{A':D'}$, $v_1 u^{A'':D''}$, $v_2 u^{A''':D'''}$ и такъ далѣе.

Все уравненіе (142) состоитъ изъ членовъ $N\mu(\tau)^m\mu(\sigma)^l$; изъ предъидущаго слѣдуетъ, что наибольшее $m+l$ будетъ

$$2\Phi(n)-\{2\Sigma A+o\sqrt{n}\}. \quad (150)$$

Обратимся теперь къ концу § 101. Тамъ, для нахожденія степени уравненія (144), мы вычитали изъ y выраженіе (149); здѣсь мы то же (149) вычитаемъ изъ $2\Phi(n)$; поэтому въ случаѣ существованія модулярнаго уравненія

$$y_\infty=y_\infty^{+1}=y_\infty^{-1}=y'_\infty=y_m=2\Phi(n). \quad (151)$$

Гирстеръ доказываетъ равенства (151) съ помощью извѣстнаго закона Шаля о совпаденіяхъ въ системахъ точекъ, между ко-

торыми существуетъ соотвѣтствіе и которыя лежатъ на кривой съ *родомъ* (Geschlecht, genre), равнымъ нулю (напримѣръ, на прямой). $2\Phi(n)$ у Гирстера всегда—правая часть равенства; въ XXII томѣ Математическихъ Анналъ Гирстеръ занимается опредѣленіемъ лѣвыхъ и правыхъ частей равенствъ въ случаѣ, когда главные модули не принадлежатъ къ классу модулей (77) (вторая тетрадь, стр. 190—210).

§ 103. Примѣнимъ предъидущія общія разсужденія къ выводу числовыхъ равенствъ третьей и пятой ступеней.

Положимъ, что $p=3$; въ такомъ случаѣ существуютъ модулярныя уравненія для тетраэдрическихъ ирраціональностей. Въ этомъ случаѣ изъ равенствъ (139) мы должны разсматривать только первыя два.

Если $n\equiv 1$ (*mod.* 3), то слѣдуетъ только разсматривать первыя два равенства (139) и равенство (140), потому что $-\Delta$ не можетъ быть вычетомъ модуля 3. Въ равенствѣ (140) $m\equiv h_m\equiv 0$ (*mod.* 3). Такъ какъ всегда $A\equiv D\equiv$ или съ t, или съ $-t$, то U_t содержитъ всякій множитель A; поэтому $2U_t=\Phi(n)-\Psi(n)$. Вставляя въ равенства (139) и (140) найденныя величины для U_t, y и z, немедленно находимъ формулы, отмѣченныя въ третьей главѣ нумерами (110), (96) и (95).

Если $n\equiv -1$ (*mod.* 3), то Δ не можетъ дѣлиться на 3; поэтому слѣдуетъ только разсматривать равенства (140) и (141), беря въ первомъ за m числа, не дѣлящіеся на 3, а во второмъ $m\equiv 0$ (*mod.* 3). Здѣсь опять $2U_{\frac{1}{2}(f+m)}=2U_{\frac{1}{2}(f-m)}=\Phi(n)-\Psi(n)$. Послѣ этихъ замѣчаній легко получимъ изъ (140) формулу (101) третьей главы, а изъ (141)—формулу (102) третьей главы.

§ 104. Положимъ, что $p=5$; въ такомъ случаѣ существуютъ модулярныя уравненія для икосаэдрическихъ ирраціональностей. Въ этомъ случаѣ изъ равенствъ (139) слѣдуетъ разсматривать первое и третье.

Пусть $\left(\frac{n}{5}\right)=-1$; тогда Δ не можетъ дѣлиться на 5, и мы должны разсмотрѣть равенства (140) и (141). Полагая въ (140) $m=0$, получаемъ

$$3\Sigma M(4n-h_0^2)=\Phi(n),\ h_0=0,\ \pm 5,\ \pm 10,\ \pm 15,\ldots \quad (152)$$

Полагая въ (140) $m^2 \equiv 8n$ (*mod.* 5), получаемъ

$$3\Sigma M(4n-h^2_m)=\Phi(n); \tag{153}$$

если $n\equiv 2$ (*mod.* 5), *то* $h_m=\ldots\ldots-9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11\ldots\ldots;$

если же $n\equiv 3$ (*mod.* 5), *то* $h_m=\ldots\ldots-8,\ -3,\ 2,\ 7,\ 12,\ldots\ldots$

Положимъ въ (141) $\varkappa^2\equiv m^2\equiv 2n$ (*mod.* 5). Изъ двухъ чиселъ A и D въ разложенiи $n=AD$ одно—вычетъ, а другое—невычетъ по модулю 5. Такъ какъ $(f+m)(f-m)\equiv -4n$ (*mod.* 5), то изъ двухъ чиселъ $f+m$ и $f-m$ одно—вычетъ, а другое—невычетъ. Вслѣдствiе предъидущаго

$$2U_{\frac{1}{2}(f+m)}+2U_{\frac{1}{2}(f-m)}=\Phi(n)-\Psi(n),$$

такъ какъ A входитъ непремѣнно въ одно изъ U, и только въ одно. Такимъ образомъ изъ (141) слѣдуетъ

$$2\Sigma M(4n-h^2_m)=\Psi(n), \tag{154}$$

гдѣ $h_m=\ldots\ldots-8,\ -3,\ 2,\ 7,\ 12,\ldots\ldots$, *если* $n\equiv 2$ (*mod.* 5);

если же $n\equiv 3$ (*mod.* 5), *то* $h_m=\ldots\ldots-9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11,\ldots\ldots$

Пусть теперь $\left(\frac{n}{5}\right)=+1$. Въ равенствѣ (140) мы должны полагать m не кратнымъ 5. *Если* $n\equiv 1$ (*mod.* 5), *то* m *должно быть квадратичнымъ вычетомъ модуля* 5; *если же* $n\equiv 4$ (*mod.* 5), *то* m*— невычетъ*. Самое же равенство будетъ

$$3\Sigma M(4n-h^2_m)=\Phi(n),\ h_m\equiv m\ (mod.\ 5). \tag{155}$$

Будемъ далѣе употреблять слѣдующiя обозначенiя:

$$\Psi_{+1}(n)=\sum\left[D+\left(\frac{A}{5}\right)A\right],\ \Psi_{-1}(n)=\sum\left[D-\left(\frac{A}{5}\right)A\right], \tag{156}$$

гдѣ A обозначаетъ всякiй дѣлитель n, меньшiй $\sqrt{n}$, а $D=n:A$; суммы распространяются на всѣ A. Выраженiе $\Psi_s(n)$ обозначаетъ или $\Psi_{+1}(n)$, или $\Psi_{-1}(n)$, первое, если $s\equiv +1$ (*mod.* 5), второе, если $s\equiv -1$ (*mod.* 5). Если $n\equiv 1$ (*mod.* 5), то t—вычетъ, и слѣдо-

вательно U_t есть сумма только тѣхъ изъ A, которыя вычеты, т. е. $2U_t=\Phi(n)-\Psi_{-1}(n)$ ($\sqrt{n}$ вычетъ). Если же $n\equiv-1$ ($mod.$ 5), то U_t есть сумма невычетовъ A, т. е. $2U_t=\Phi(n)-\Psi_{+1}(n)$. Поэтому первое и третье равенства (139) даютъ

$$60\sum M\left(\frac{4n-l_1^2}{25}\right)=6\Psi_{-n}(n)-5\Phi(n), \tag{157}$$

$$5\Sigma M_{+1}(4n-l^2)=5\Sigma M_{-1}(4n-l^2)=\Psi_{-n}(n). \tag{158}$$

Напомнимъ, что l *и* l_1—*положительныя числа, удовлетворяющія сравненіямъ* $l^2\equiv4n$ ($mod.$ 5), $l_1^2\equiv4n$ ($mod.$ 25).

Обратимся наконецъ къ (141), въ которомъ должно положить $m=0$. Слѣдовательно $U_{\frac{1}{2}(f\pm m)}=U_{\frac{1}{2}f}=U_{2t}$, ибо $f^2\equiv-4n\equiv16n$ ($mod.$ 5). Если $n\equiv1$ ($mod.$ 5), то U_{2t}—сумма невычетовъ модуля 5; поэтому $2U_{2t}=\Psi_{-1}(n)-\Psi(n)$. Если же $n\equiv-1$ ($mod.$ 5), то U_{2t}—сумма вычетовъ модуля 5; слѣдовательно $2U_{2t}=\Psi_{+1}(n)-\Psi(n)$. Итакъ

$$2\Sigma M(4n-h_0^2)=\Phi(n)+2\Psi(n)-2\Psi_{-n}(n), \tag{159}$$

$$h_0=0,\ \pm5,\ \pm10,\ \pm15,\ldots\ldots \tag{159'}$$

Въ XVII томѣ Математическихъ Анналъ, нынѣ издаваемыхъ Клейномъ и Майеромъ, Гирстеръ даетъ двѣ формулы пятой ступени для $n\equiv0$ ($mod.$ 5) (первая тетрадь, стр. 73).

ОПЕЧАТКИ.

Стр.	*Строка.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
90	4 св.	$\frac{2hK}{n}$ и $\frac{2hK}{m}$	$\frac{hK}{n}$ и $\frac{hK}{m}$
117	4 „	$x=\frac{\pi}{4}+\frac{K'i}{2K}$	$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi K'i}{2K}$
147	8 „	для $\sqrt[4]{k}$	для $\sqrt[4]{k'}$
150	9 „	$=\,^{\frac{1}{4}}\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}$	$=q^{\frac{1}{4}}\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}$
162	16 „	$12\vartheta_3(0,q)\Sigma\{2F(n)-G(n)\}=$	$12\vartheta_3(0,q)\Sigma\{2F(n)-G(n)\}q^n=$
226	5 сн.	$\Sigma d\cos(d+2^\alpha d')$	$\Sigma d\cos(d+2^\alpha d')x$
262	8 св.	$+\,^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\Big[$	$+q^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\Big[$
286	1 „	$\left[\frac{1+}{a+bi}\right]^2=$	$\left[\frac{1+i}{a+bi}\right]^2=$
326	1 сн.	$-2ig^\lambda\ mod.\ m),\ (u$	$-2ig^\lambda\ (mod.\ m),\ u$
346	1 св.	$\alpha\delta-\beta\gamma=i$	$\alpha\delta-\beta\gamma=i^\rho,$
360	9 сн.	—число рѣшеній того же	τ—число рѣшеній того же
376	1 „	$\frac{e^{(4h+1)R\pi i}\cos nS\pi}{\{(4h+1)^2+4u^2\}^{1+\rho}}$	$\frac{e^{(4h+1)R\pi i}\cos nS\pi}{\{(4h+1)^2+4n^2\}^{1+\rho}}$
395	11 „	Пусть m'	Пусть m''
408	12 св.	$_1hx+M_1'h'x'+$	$M_1hx+M_1h'x'+$
448	7 „	$\frac{t_1a}{A}B\equiv\frac{t_1b+\varepsilon\varkappa}{2}(mod.\ D)$	$\frac{t_1a}{A}B\equiv\frac{t_1b+\varepsilon_1\varkappa_1}{2}(mod.\ D)$

Bayerische
Staats-
Bibliothek
München

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО МОСКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

выходятъ безсрочными выпусками, по отдѣламъ: историко-филологическому, физико-математическому, естественно-историческому, юридическому и медицинскому.

Получать можно у коммиссіонеровъ Университета, книгопродавцевъ **И. И. Глазунова**, на Петровкѣ, и **А. И. Ланга**, на Кузнецкомъ мосту. Желающіе могутъ также обращаться въ **Правленіе Московскаго Университета**, причемъ пользуются уступкою 20%.

Редакціи, желающія получать „Ученыя Записки" въ обмѣнъ на свои изданія, прилашаются обращаться съ заявленіями о томъ въ Правленіе Московскаго Университета.

ВЫШЛИ ИЗЪ ПЕЧАТИ И ПРОДАЮТСЯ:

Выпускъ 1-й Отдѣла Историко-Филологическаго. Содержаніе: Объ основахъ для критики текста Динарховыхъ рѣчей. **Карла Томазини**.— Осетинскіе этюды. **Всеволода Миллера**.

Выпускъ 1-й Отдѣла Физико-Математическаго. Содержаніе: Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. **П. С. Назимова**.—Изъ теоріи электричества (по Кирхгоффу и Гельмгольцу). **А. П. Соколова**.

Выпускъ 2-й Отдѣла Физико-Математическаго. Содержаніе: Курсъ теоретической механики. **Ѳ. А. Слудскаго**.

Выпускъ 3-й Отдѣла Физико-Математическаго. Содержаніе: Курсъ теоретической механики. **Ѳ. А. Слудскаго**. (Окончаніе).— О гальванической поляризаціи электродовъ. **А. П. Соколова**.

Выпускъ 4-й Отдѣла Физико-Математическаго. Содержаніе: О прочности движенія. **Н. Е. Жуковскаго**.—Объ опредѣленіи блеска бѣлыхъ звѣздъ (съ таблицею чертежей) **В. К. Цераскаго**.—Изъ теоріи свѣта (по лекціямъ Кирхгоффа) **А. П. Соколова**.

Выпускъ 5-й Отдѣла Физико-Математическаго. Содержаніе: Изслѣдованіе о психрометрѣ (съ таблицею чертежей) **Н. А. Зворыкина.**— Предисловіе **А. Г. Столѣтова.**—О приложеніяхъ теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ **П. С. Назимова.**

Выпускъ 1-й Отдѣла Естественно-историческаго. *(Съ 10-ю таблицами рисунковъ).* Содержаніе: О корпускулахъ и половомъ процессѣ у голосѣмянныхъ. **И. Н. Горожанкина.** — Tetrastes griseiventris n. sp. **М. А. Мензбира.**

Выпуски 2-й и 3-й Отдѣла Естественно-историческаго. *(Съ 9-ю таблицами рисунковъ).* Содержаніе: Орнитологическая географія Европейской Россіи. **М. А. Мензбира.** — Строеніе скелета туловища и хвоста рѣчной миноги (Petromyzon fluviatilis). **К. П. Перепелкина.**

Выпускъ 4-й Отдѣла Естественно-историческаго. (*Съ 8-ю таблицами*). Содержаніе: Чтенія **Я. А. Борзенкова** по сравнительной анатоміи.— Отчеты по командировкѣ **М. Мензбира.**—Сравнительное изслѣдованіе и описаніе волоса, щитины, иглы у млекопитающихъ и пера у птицъ. **В. Львова.**—О внутреннемъ строеніи и способѣ утолщенія клѣточной оболочки и крахмальнаго зерна. **В. Палладина.**

Выпускъ 1-й Отдѣла Юридическаго. Содержаніе: Формальныя ограниченія свободы завѣщаній въ римской классической юриспруденціи. **Н. П. Боголѣпова.**

Выпускъ 2-й Отдѣла Юридическаго. Содержаніе: О соучастіи въ преступленіи. **Г. Е. Колоколова.** — Изслѣдованія о русской правдѣ. **П. Н. Мрочекъ-Дроздовскаго.**

Выпускъ 3-й Отдѣла Юридическаго. Содержаніе: Основанія классификаціи государствъ въ связи съ общимъ ученіемъ классификаціи. **Н. Звѣрева.**

Выпускъ 1-й Отдѣла Медицинскаго. Содержаніе: Основы ученія о лихорадкѣ. Врача **Н. Баженова.**—Къ вопросу о предѣлахъ индивидуальныхъ и племенныхъ видоизмѣненій типическихъ бороздъ и извилинъ мозга. **Д. Зернова.**

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Učenyja zapiski Imperatorskago Moskovskago Universiteta

Bd.: 5. 1885

Moskva 1885

H.lit.p. 332 sv,B-3/5
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11616805-5